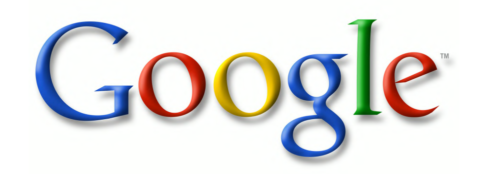
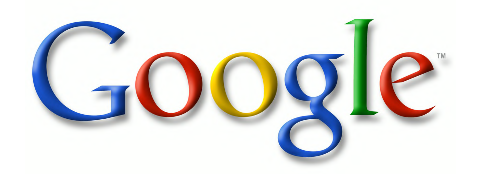
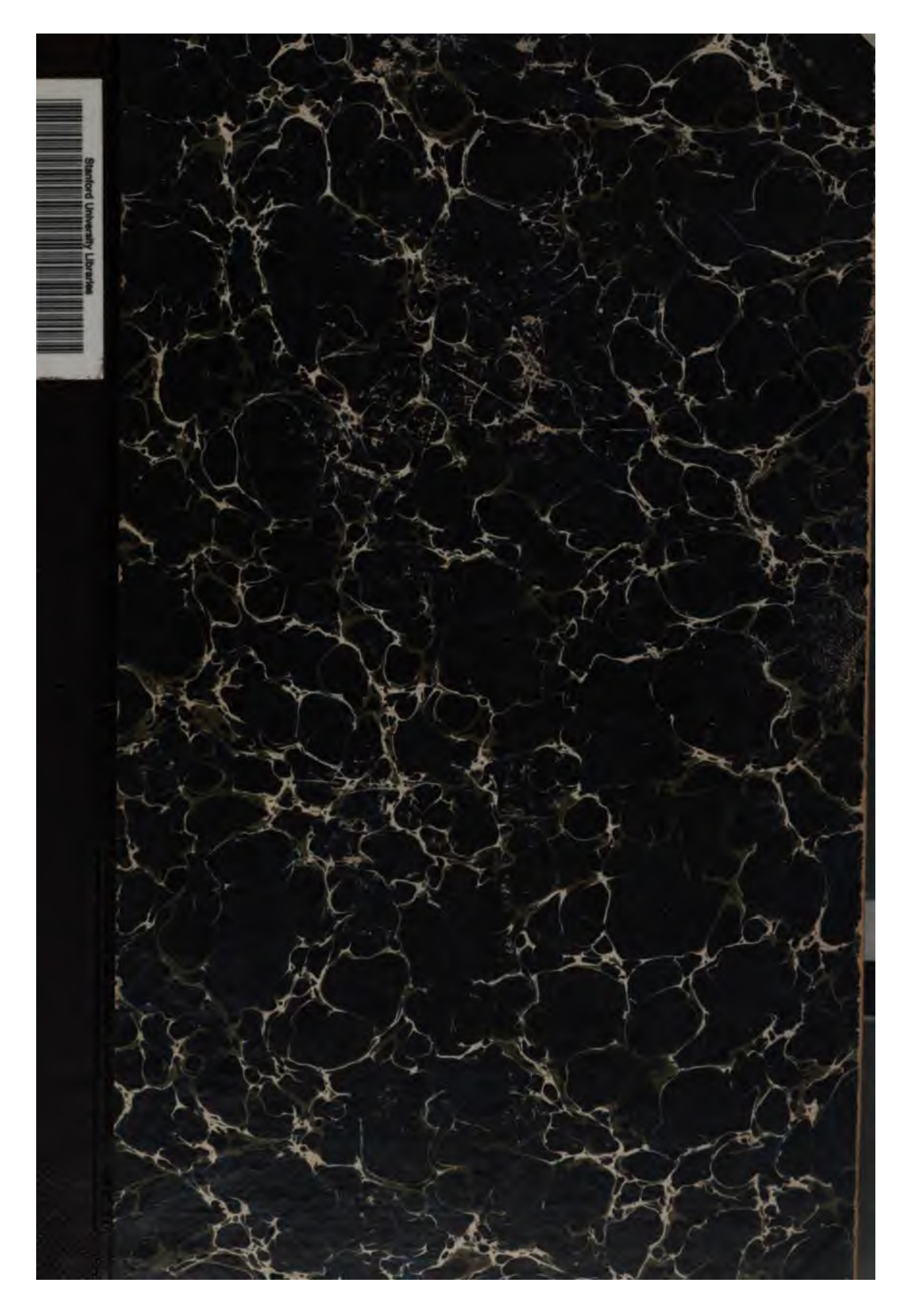



Google


Stanford University Libraries

Zeitschrift

für

Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Sechster Jahrgang.

Mit 6 lithographirten Tafeln und Holzschnitten.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1861.

Inhalt.

Arithmetik und Analysis.

Theoretische und praktische Geometrie.

Mechanik.

Optik.

Wärmelehre und Molecularphysik.

Elektricität und Magnetismus.

Meteorologie.

Vermischtes.

I.

Zwei Hauptsätze der neueren Geometrie.

Von Dr. Wilh. Fiedler,
Lehrer an der Königl. Gewerbschule zu Chemnitz.

Die beiden allgemeinen Sätze, deren Darlegung und Erläuterung ich beabsichtige, betreffen die homographische Theilung und die Involution. M. Chasles hat in seinem „*Traité de géométrie supérieure*" davon die folgenden Definitionen gegeben; zuerst in Betreff der homographischen Theilung: Wenn zwei gerade Linien durch Punkte, die sich einer zu einem entsprechen, so getheilt sind, dass das anharmonische Verhältniss von vier beliebigen Punkten der einen dem anharmonischen Verhältniss der vier entsprechenden Punkte der anderen gleich ist, so sagen wir, dass diese beiden geraden Linien homographisch getheilt sind, oder auch, dass ihre Punkte zwei homographische Theilungen bilden.

Und wenn in zwei Strahlenbüscheln, deren Strahlen sich einer zu einem entsprechen, vier beliebige Strahlen des ersten ihr anharmonisches Verhältniss immer dem der vier entsprechenden des zweiten gleich haben, so sagen wir, dass die beiden Büschel homographisch sind. (No. 99.*)

Und betreffs der Involution: Wenn drei Systeme von zwei conjugirten Punkten, die in derselben geraden Linie liegen, so beschaffen sind, dass vier dieser Punkte, in den drei Systemen genommen, ihr anharmonisches Verhältniss gleich dem ihrer vier conjugirten haben, so sagen wir, dass die sechs Punkte in Involution sind. (No. 182.) Und sechs von demselben Punkte ausgehende und paarweis conjugirte gerade Linien sind in Involution, wenn irgend vier derselben, in den drei Paaren genommen, mit ihren vier conjugirten das nämliche anharmonische Verhältniss haben. (No. 243.)

Man weiss, welche Entwickelung und Anwendung M. Chasles diesen Begriffen gegeben hat. In neuester Zeit hat nun der ausgezeichnete Geometer diese beiden Sätze unter einem neuen Gesichtspunkte gefasst und dieselben dadurch zu wahren Fundamentalsätzen der neuern Geome-

---

*) *Die Citate beziehen sich auf* die Originalausgabe.

trie gemacht. In seinen Vorlesungen an der Pariser *Faculté des Sciences* hat er zuerst die Vortheile der neuen Auffassung entwickelt, und sie sodann in einem in den *Comptes rendus* der Academie niedergelegten Memoire allgemeiner zugänglich gemacht. (*C. r. t.* 41, *p.* 1097.)

Ich habe die Absicht, diese Auffassung hier darzulegen, indem ich die Beweisgründe hinzufüge, die Chasles an jener Stelle nicht gegeben hat, und die Sätze an einigen Beispielen erläutere.

Ich gebe zunächst die beiden Sätze in ihrer neuen Ausdrucksweise selbst; sie heissen:

I. Wenn man in einer Aufgabe, worin keinerlei Transcendenten vorkommen (weder Functionen noch Curven) zwei geradlinige Reihen von Punkten (auf einer und derselben geraden Linie oder nicht) hat, und wenn nach der Natur der Aufgabe sich die Punkte beider Reihen in der Weise entsprechen, dass jedem Punkte der ersten Reihe nur ein Punkt in der zweiten zugehört, und umgekehrt einem Punkte der zweiten nur ein bestimmter Punkt in der ersten, so kann man daraus schliessen, dass diese zwei Reihen von Punkten homographisch sind, oder dass das anharmonische Verhältniss von irgend vier Punkten der ersten dem der entsprechenden vier Punkte der zweiten gleich sei. Mit andern Worten, das bezeichnete Entsprechen zweier geradlinigen Punktreihen ist stets ein anharmonisches Entsprechen.

Ganz dasselbe Princip ist auf ein Strahlenbüschel und eine geradlinige Punktreihe anwendbar, nämlich: Wenn man zeigen kann, dass je einem Strahl des Büschels nur ein Punkt der Reihe und umgekehrt einem Punkte der Reihe nur ein Strahl des Büschels entspricht, so ist daraus zu schliessen, dass das anharmonische Verhältniss von irgend vier Strahlen immer gleich dem der entsprechenden vier Punkte sein wird, oder dass die Punkte der Reihe und die Strahlen des Büschels sich anharmonisch entsprechen.

Endlich gilt dasselbe von zwei Strahlenbüscheln: Wenn sich zwei Strahlenbüschel dergestalt entsprechen, dass jedem Strahl des einen nur ein Strahl des andern zugehört und umgekehrt, so ist das Entsprechen anharmonisch, oder das anharmonische Verhältniss von irgend vier Strahlen des einen Büschels ist dem der vier correspondirenden des andern gleich.

II. Wenn man in einer Aufgabe, in welcher keinerlei Transcendenten vorkommen, zwei Reihen von Punkten (auf einer und derselben geraden Linie oder nicht) hat, und wenn nach den Bedingungen der Aufgabe jedem Punkte der ersten Reihe nur ein Punkt der zweiten entspricht, aber jedem Punkte der zweiten Reihen immer zwei Punkte der ersten in völlig gleicher

Weise, so hat man zu schliessen, dass alle diese Paare von Punkten in Involution sind, und dass sie den einzelnen Punkten der zweiten Reihe anharmonisch entsprechen. Und dieser Satz erleidet die nämliche Ausdehnung wie der erste auf eine Punktreihe und ein Strahlenbüschel und auf zwei Strahlenbüschel.

Ohne jetzt auf die Fruchtbarkeit der neuen Ausdrucksweise einzugehen, erörtere ich zunächst ihre Richtigkeit.

Angenommen, dass — was den ersten Satz über die Homographie zweier Punktereihen betrifft — der bewegliche Punkt m die erste Reihe und der Punkt m' die zweite Reihe durchlaufe, und dass a in jener, b' in dieser je ein fester Anfangspunkt sei, von dem aus man die durchlaufenen Segmente zählt, so ist Folgendes ausser Zweifel: Die zwischen je zwei entsprechenden Punkten beider Reihen bestehende Relation muss sich in einer Gleichung zwischen zwei Veränderlichen ausdrücken lassen, welche keine andern als die zwei Segmente am und $b'm'$ sein werden; gewiss muss diese Gleichung rein algebraisch sein, und gewiss kann sie hinsichtlich beider Veränderlichen nur in gleicher Weise vom ersten Grade sein, sobald man die eine Veränderliche als constant betrachtet, weil jedem Punkte der einen Reihe nur ein Punkt der andern entsprechen soll. Die allgemeine Form dieser Gleichung ist daher

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0$$

(wo λ, μ, ν constante Coefficienten sind); hier entspricht jedem bestimmten Werthe von am ein bestimmter Werth von $b'm'$ und umgekehrt.

Ganz dieselbe allgemeine Gleichung drückt aber die Homographie zweier geradlinigen Punktreihen aus; sie ist in No. 131 der „*Géom. super.*" gegeben. Hier ihre kurze Ableitung: Wenn a, b, c drei Punkte der ersten geraden Linie und a', b', c' die drei entsprechenden Punkte der zweiten sind, und ein vierter Punkt m der ersten Linie willkührlich angenommen wird, so ist der ihm entsprechende Punkt m' der zweiten durch die Bedingung der Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse beider Theilungen bestimmt:

$$\frac{am}{bm} : \frac{ac}{bc} = \frac{a'm'}{b'm'} : \frac{a'c'}{b'c'} \quad \text{oder} \quad \frac{am}{bm} = \frac{a'm'}{b'm'} \,.\, \left(\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}\right).$$

So lange man nun die Punkte m, m' respective immer auf die drei ersten Punkte a, b, c, a', b', c' bezieht, ist $\frac{ac}{bc} : \frac{a'c'}{b'c'}$ eine Constante, und man kann schreiben

$$\frac{am}{bm} = k \frac{a'm'}{b'm'}.$$

Dies passt ohne Weiteres auf den jetzigen Fall; a und b' waren die beiden festen Punkte der ersten und zweiten Punktreihe, a' und b sind daher ihre entsprechenden Punkte der zweiten und ersten Reihe. Und man hat zwischen ihnen die Gleichung

$$am \,.\, b'm' - k \,.\, bm \,.\, a'm' = 0.$$

Aus derselben sind nun die Segmente bm und $a'm'$ zu entfernen, weil sie die der gegenwärtigen Frage fremden Punkte a' und b enthalten; das geschieht einfach durch die Substitutionen

$$bm = am - ab, \quad a'm' = b'm' - b'a',$$

und man erhält

$$am \,.\, b'm' - k\,(am - ab)\,(b'm' - b'a') = 0,$$

oder

$$am \,.\, b'm' + \frac{k}{1-k}\, b'a' \,.\, am + \frac{k}{1-k}\, ab \,.\, b'm' - k \,.\, ab \,.\, b'a' = 0,$$

welche man mit Rücksicht auf die in der Frage constanten Grössen schreiben darf:

$$am \,.\, b'm' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, b'm' + \nu = 0,$$

wie oben. Wenn hierdurch die neue Fassung für den ersten Satz in Bezug auf zwei Punktereihen vollständig bewiesen ist, so lehren die bekannten Zusammenhänge zwischen Punktereihen und Strahlenbüscheln, die die wesentliche Grundlage der gesammten neueren Geometrie bilden, dass für die Geltung desselben Satzes in Bezug auf eine Punktereihe und ein Strahlenbüschel und in Bezug auf zwei Strahlenbüschel keine besondern Beweise nöthig sind, oder dass der hier angewendete Beweis sich einfach auf sie übertragen lässt.

Der Beweis des zweiten Satzes wird durch folgende Schlüsse geführt. Die Involution und die homographische Theilung hängen bekanntlich aufs Engste zusammen. Wenn aa', bb' zwei Punktepaare sind, so kann man eine Unendlichkeit von Paaren cc', dd', ee'... bestimmen, deren jedes mit aa' und bb' eine Involution bildet. Die Punkte a, b, c, d, e... und die Punkte a', b', c', d', e'... bilden alsdann zwei homographische Theilungen; denn die vier Punkte a, b, a', c müssen nach dem Begriff der Involution ihr anharmonisches Verhältniss dem der vier Punkte a', b', a, c' gleich haben. Betrachtet man nun, wie es nach dem Gesagten in Ordnung ist, die drei Punkte a, b, a' der ersten und die drei a', b', a der zweiten Tneilung als fest und lässt die Punkte c, c' alle Lagen durchlaufend sich bewegen, also cde..., $c'd'e'$... beschreiben, so müssen ihre entsprechenden Orte zwei homographische Theilungen bilden. Und wenn nun in diesen beiden Theilungen einen Punkt c' der zweiten als der ersten angehörig betrachtet, so wird dann c sein entsprechender in der zweiten sein; denn wegen der Involution der drei Segmente aa', bb', cc' ist das anharmonische Verhältniss der vier Punkte a, b, a', c' dem der vier a', b', a, c gleich, d. h. dem Punkt c', als der ersten Theilung angehörig betrachtet, entspricht in der zweiten der Punkt c. Und sobald diese Statthaftigkeit der Vertauschung eines Punktes mit seinem Homologen in zwei homographischen Theilungen derselben geraden Linie für ein einziges Paar entsprechender Punkte gilt, so ist sie für alle wahr und kann daher als ein Charakterzeichen der Involution angesehen werden. Denn wenn die vorher gebrauchte allgemeine Gleichung durch die

Voraussetzung, dass jetzt für die beiden Theilungen der nämlichen geraden Linie nur ein fester Anfangspunkt a statt der beiden a und b genommen werde, in

$$am \,.\, am' + \lambda \,.\, am + \mu \,.\, am' + \nu = 0$$

übergeht, so muss diese Gleichung, wenn sie die Vertauschung von am mit am' auch nur einmal gestatten soll, durch die Erfüllung der Bedingung $\lambda = \mu$ zu

$$am \,.\, am' + \lambda\,(am + am') + \nu = 0$$

werden; nun enthält sie am und am' in ganz gleicher Weise und diess schon zeigt die allgemeine Gültigkeit der Vertauschung.

Aber sie geht auch aus der Natur der Involution hervor. Seien a, b, c drei Punkte der ersten, a', b', c' die entsprechenden der zweiten Theilung, und habe c, als der zweiten Theilung angehörig betrachtet, c' zum entsprechenden Punkt in der ersten, so muss auch a' der Punkt der ersten Theilung sein, der dem a, als Punkt der zweiten Theilung betrachtet, entspricht; denn die Punkte a, b, c, c' der ersten Theilung haben nach der Vorsetzung zu entsprechenden in der zweiten die Punkte a', b', c', c; folglich sind die drei Paare von conjugirten Punkten aa', bb', cc' in Involution und also haben die zwei Reihen von Punkten $aa'bc$ und $a'ab'c'$ gleiches anharmonisches Verhältniss, d. h. der Punkt a, als der zweiten Theilung angehörig betrachtet, hat zum homologen Punkt in der ersten den Punkt a'; und in gleicher Weise würde sich die Vertauschbarkeit für jedes andere Paar entsprechender Punkte beweisen lassen.

Eben diese Vertauschungsfähigkeit aber ist der Coincidenzpunkt der hier gegebenen allgemeinen Betrachtungen mit den Voraussetzungen der zu beweisenden gegenwärtigen Auffassung im zweiten Satze. Denn bezeichnet man die zwei Punkte der einen Punktreihe, die dem einen Punkte in der andern entsprechen, mit m', m'', so kann man wie bei der Entwicklung des vorigen Satzes die Lage dieser Punkte durch die Angabe ihrer Segmente von zwei Anfangspunkten aus bestimmen. Dann müssen nach dem bereits bewiesenen ersten Satze die Reihen der Punkte m', m'' mit einander homographisch sein, da jedem Punkte m' nur ein Punkt m'' und umgekehrt entspricht. Was aber diesen Fall von der blossen einfachen Homographie unterscheidet, ist eben diess, dass dem einen Punkte m ganz in gleicher Weise die beiden Punkte m', m'' entsprechen, dass also jedem dieser Punkte, mag man ihn als der ersten oder zweiten Theilung angehörig denken, immer derselbe homologe Punkt zugehört. Daher ist diese Homographie eine Involution.

Hiernach ist hier nur noch hinzuzufügen, was man unter dem anharmonischen Entsprechen einer Reihe involutorischer Segmente mit einer Reihe von Punkten versteht. Wenn man als den Pol eines Punktes bezüglich eines Segmentes den conjugirt harmonischen Punkt desselben im Verhältniss zu den Endpunkten des Segments versteht, so hat man

diesen Satz: Wenn vier auf einer geraden Linie angenommene Segmente in Involution sind, so ist das anharmonische Verhältniss der Pole eines Punktes der Linie bezüglich dieser Segmente constant, welches auch der Punkt sei.

Dieser Satz ist eine unmittelbare Consequenz des ersten Hauptsatzes; denn wenn man irgend zwei Punkte der geraden Linie denkt, und deren zweimal vier Pole in Bezug auf die gedachten Segmente bestimmt, so entsprechen sich diese ganz in der dort vorausgesetzten Weise und müssen sich daher anharmonisch entsprechen. Jenes anharmonische Verhältniss der vier Pole wird, da es für dieselben involutorischen Segmente constant ist, das anharmonische Verhältniss der vier Segmente genannt. In dem speciellen Falle, dass der eine dieser beiden Punkte im Unendlichen liege, werden seine Pole in Bezug auf die vier Segmente die Mittelpunkte derselben und man kann daher sagen, dass das anharmonische Verhältniss von vier involutorischen Segmenten dem ihrer vier Mittelpunkte gleich ist.

Und nach dieser Erklärung ist nach dem ersten Satze kein Zweifel, dass das Entsprechen jener Punktreihe m und dieser Reihe involutorischer Segmente m', m'' ein anharmonisches ist.

Ebenso wie der erste Satz überträgt sich der jetzige auf eine Punktreihe und ein Strahlbüschel und auf zwei Strahlbüschel, und ist somit hierdurch vollständig bewiesen.

Einige Beispiele werden nun die grosse Tragweite dieser Sätze deutlich machen.

Zu Satz I. Man denke einen Kegelschnitt und zwei feste Tangenten an denselben; eine bewegliche Tangente dieses Kegelschnitts wird, dann auf jeder von diesen beiden eine Punktreihe beschreiben; in diesen Reihen entspricht jedem Punkt der ersten ein und nur ein Punkt der zweiten und umgekehrt. Demnach müssen beide Reihen homographisch sein, oder das anharmonische Verhältniss von irgend vier Punkten der ersten ist dem der vier entsprechenden Punkte der zweiten gleich.

Und dem entsprechend denke man einen Kegelschnitt und darin zwei feste Punkte, lasse nun einen Punkt sich auf dem Kegelschnitt bewegen und verbinde ihn in jeder seiner Lagen mit jenen beiden durch eine gerade Linie; man erhält zwei Strahlenbüschel, in denen jedem Strahl des einen ein und nur ein Strahl des andern entspricht und umgekehrt, und dieselben müssen daher sich anharmonisch entsprechen, d. h. das anharmonische Verhältniss von irgend vier Strahlen des einen Büschels muss gleich sein dem anharmonischen Verhältniss der vier entsprechenden Strahlen des andern. — So ergeben sich also die anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte unmittelbar und ohne Beweis aus der blossen Darlegung des Sachverhaltes und dem Satze I. Man *erkennt erst die ganze Bedeutung* dieser Ergebnisse, wenn man bedenkt,

dass alle die allgemeinsten Sätze über die Kegelschnitte aus ihnen entspringen; so der berühmte Satz von Pascals mystischem Sechseck und sein reciproker, der Satz von Desargues über die Involution von sechs Punkten, der von Newton über die organische Beschreibung der Kegelschnitte, der von Pappus über das Verhältniss der Perpendikel, die man von irgend einem Kegelschnittspunkte auf die Gegenseiten eines ihm eingeschriebenen Vierecks fällt, und der Satz von Carnot über die Segmente, die ein Kegelschnitt auf den Seiten eines Dreiecks in seiner Ebene bildet.

Oder man denke sich eine Reihe von Curven dritter Ordnung, die alle durch dieselben neun Punkte $a, b, c \dots$ gehen und ziehe in einem dieser Punkte a die Tangenten dieser Curven $T, T_1 \dots$. Wenn man nun zwischen zwei beliebigen anderen der neun Punkte die Sehne zieht, z. B. von b nach c, so schneidet dieselbe jede der Curven in einem dritten Punkte und man hat eine Punktreihe $n, n_1, n_2 \dots$ auf ihr. (Die Gleichheit des Index bei n und T bedeutet, dass jener Punkt und diese Tangente zur nämlichen Curve der Reihe gehören.) Jedem der Punkte n entspricht nur eine bestimmte Tangente T nnd umgekehrt jeder Tangente T nur ein bestimmter Punkt in der Reihe der n; es muss folglich dieses Entsprechen ein anharmonisches sein. M. Chasles machte diess Ergebniss zur Quelle interessanter Eigenschaften der Curven dritter Ordnung.

Wenn man sich in einem andern der neun Bestimmungspunkte gleichfalls die Tangenten $T, T_1, T_2 \dots$ gezogen denkt, so müssen diese denen der ersten Schaar anharmonisch entsprechen und die Folge davon ist, dass die entsprechenden Strahlen beider Tangentenbüschel sich auf einem Kegelschnitt durchschneiden. Man erkennt leicht, dass diese Eigenschaft nicht dem System der Curven dritter Ordnung allein eigen, sondern dass sie eine allgemeine Eigenschaft aller auf ähnliche Weise bestimmten Curvensysteme ist.

M. Chasles hat in seinem „*Mémoire sur les surfaces du 2. degrée*“ mehrere Sätze gegeben, die sich als unmittelbare Folgen des Satzes I herausstellen; z. B.: Vier an eine windschiefe Oberfläche durch dieselbe Erzeugende gelegte Tangentialebenen und ihre vier Berührungspunkte in dieser Erzeugenden haben gleiches anharmonisches Verhältniss. Die Richtigkeit des Satzes ist klar, sobald man sich nur der Beziehung erinnert, in welcher das anharmonische Verhaltniss von Ebenen, die sich in derselben geraden Linie schneiden, zu dem von geraden Linien an einem Punkte oder Punkten auf einer geraden Linie steht.

Ebenso: Vier Ebenen, die man willkürlich durch dieselbe Erzeugende einer windschiefen Oberfläche legt, haben vier Berührungspunkte auf dieser mit der Oberfläche und das anharmonische Verhältniss derselben ist dem der vier Punkte gleich, wo dieselben Ebenen zur Oberfläche normal sind.

Ebenso: *Wenn sich von vier* geraden Linien jede an drei willkür-

lich im Raume liegende feste gerade Linien anlehnt, so ist das anharmonische Verhältniss der auf einer von diesen drei geraden Linien gebildeten Punktreihe dem der entsprechenden Punktreihe auf jeder der beiden andern gleich. Und so ergiebt sich diese Haupteigenschaft des elliptischen einmanteligen Hyperboloids ohne alle Mühe: Vier Erzeugende derselben Art bestimmen auf jeder beliebigen Erzeugenden der andern Art vier Punkte, deren anharmonisches Verhältniss denselben constanten Werth hat, welches auch die Lage dieser Erzeugenden der zweiten Art sein mag.

Um für spätere Entwickelungen vorzubereiten, komme ich noch einmal auf die Kegelschnitte zurück und zwar speciell auf solche, die dem nämlichen Viereck umschrieben sind. Ist $ABCD$ das Viereck und sind S, S', S''.... dergleichen umschriebene Kegelschnitte, so ist klar, dass jeder unter ihnen durch einen fünften Punkt vollkommen bestimmt ist. Zu dieser Bestimmung können die Punkte dienen, in denen eine durch A gezogene gerade Linie AL die aufeinanderfolgenden Kegelschnitte schneidet; sei $a\,a'a''\ldots$ diese Punktreihe. Wenn man eine zweite solche Transversale AL_1 zieht, so bestimmt sie in den respective entsprechenden Kegelschnitten die Punkte $b, b', b''\ldots$; diese beiden Reihen $aa'\ldots$, $bb'\ldots$ entsprechen einander in der Weise, dass jedem Punkt der einen ein und nur ein Punkt der andern entspricht und müssen daher homographisch sein.

Lamé hat ferner bewiesen, dass die Polaren eines beliebigen Punktes in ihrer Ebene in Bezug auf die Kegelschnitte einer solchen Schaar alle durch einen festen Punkt hindurchgehen. Auch diess ergiebt sich mittelst des ersten Satzes durch eine blosse Darlegung der Verhältnisse. Denn denkt man sich die sämmtlichen Polaren und dieselben von zwei beliebigen Transversalen in den Punktreihen $cc'c''\ldots$, $dd'd''\ldots$ geschnitten (wobei der gleiche Index den Schnittpunkt mit derselben Polare bezeichnet) so ist offenbar, dass jedem der beiden Kegelschnitte nur ein Punkt c in der ersten und nur ein Punkt d in der zweiten Transversale entspricht; auch umgekehrt entspricht jedem dieser Punkte nur ein Kegelschnitt und es folgt daraus, dass die Reihe der Punkte c mit der Reihe der Punkte d homographisch sein muss. Diese Eigenschaft kann aber nur dann für jede beliebige Transversale bestehen, wenn die sämmtlichen Polaren ein Strahlbüschel bilden, also durch einen festen Punkt gehen. Wenn man nun mit dieser Vorstellung des Polarenbüschels sich jener Punktreihe $aa'a''\ldots$ erinnert, so erkennt man sofort, dass dieselbe mit dem Büschel homographisch sein muss und dass daher die Polarenbüschel aller möglichen Punkte in der Ebene der Schaar von Kegelschnitten anharmonisch entsprechen*). (Speciell z. B. die

*) Es bedarf wohl nur der einfachen Anmerkung, dass hier überall reciproke Betrachtungen betreffs der einem Viereck eingeschriebenen Schaar von Kegelschnitten durchzuführen sind.

Tangentenbüschel in den vier Ecken des eingeschriebenen Vierecks.) — Von diesem Gesichtspunkte aus kann man, wie es Chasles thut, von einem Büschel von Kegelschnitten reden, welches einem Büschel von geraden Linien oder einem zweiten Büschel von Kegelschnitten anharmonisch entspricht. Das anharmonische Verhältniss von irgend vier Kegelschnitten eines solchen Büschels ist das ihrer vier Polaren in Bezug auf irgend einen Punkt in ihrer Ebene, oder speciell das ihrer vier Tangenten in einer der Ecken des eingeschriebenen Vierecks. Ich habe die Absicht, in weiteren Mittheilungen die ungemeine Entwickelungsfähigkeit dieses Begriffs vom anharmonischen Entsprechen von Kegelschnitten an der Hand seines Erfinders darzulegen; die gegenwärtige Mittheilung steht im Ganzen, wie in diesem einzelnen Beispiele im engsten Zusammenhang mit dieser Absicht.

Es bleibt mir übrig, II. Beispiele über den Satz von der Involution zu geben.

Wenn man von jedem Punkte einer geraden Linie aus zwei Tangenten an einen Kegelschnitt zieht, so begegnen dieselben einer festen Tangente immer in zwei Punkten; jedem Punkte jener geraden Linie entsprechen auf diese Weise zwei verschiedene Punkte in jener festen Tangente und jedem Punkte dieser festen Tangente nur ein Punkt in der gegebenen geraden Linie; demnach sind die Punktpaare in der festen Tangente in Involution und entsprechen den Punkten der geraden Linie anharmonisch.

Wenn man von einem festen Punkte aus Transversalen nach einem gegebenen Kegelschnitt und von einem beliebigen Punkte des Kegelschnitts aus nach den Endpunkten jeder Sehne gerade Linien zieht, so hat man Paare von geraden Linien, die durch denselben Punkt gehen und den Transversalen so entsprechen, dass jedem Paar und jedem Strahl eines Paares eine und nur eine bestimmte Transversale, jeder Transversale aber ganz gleichmässig ein Paar von Strahlen entspricht; daher müssen jene Strahlenpaare ein involutorisches Büchel bilden, und dem Büschel der Transversalen anharmonisch entsprechen. Wenn man fragen wollte, warum jenes Centrum der Strahlenpaare ein Punkt des Kegelschnittes sein müsse, so ist zu antworten, dass einem Punkte ausserhalb des Kegelschnitts nicht eine bestimmte Transversale, sondern deren zwei entsprechen würden, und dass dann die im Satze II geforderte Art des Entsprechens eben nicht stattfände. In ganz ähnlicher Weise beseitigen sich übrigens analoge Bedenken bei den früheren Beispielen.

Denke man wieder eine Reihe von Kegelschnitten, welche durch vier Punkte hindurch gehen und lasse dieselben durch eine Transversale geschnitten werden, die durch einen der vier Punkte geht, aber überdiess durch *eine beliebig gezogene*. Auf jener bestimmen die Kegel-

schnitte eine Reihe von Punkten $aa'a''\ldots$, auf dieser die Reihe von Punktpaaren Bb, $B'b'\ldots$. Dabei entsprechen jedem Punkte a der ersten Transversale ganz gleichmässig zwei Punkte B, b der zweiten, aber jedem Punkte in dieser nur ein Punkt der erstern. Es müssen daher jene Punktpaare in Involution und mit jener Punktreihe in anharmonischem Verhältniss sein. Bekannt ist der Theil des Satzes, nach welchem jene Segmente in Involution sind*), aber dass sie den Punkten a anharmonisch entsprechen, ist eine neue Vervollständigung des Satzes. Diese Vervollständigung ist fruchtbar, denn wenn man z. B. jeden Punkt a mit den entsprechenden Punkten B, b verbindet, so umhüllen darnach die sämmtlichen so bestimmten geraden Linien einen Kegelschnitt. Und wenn man in einer geraden Linie eine Reihe von involutorischen Segmenten hat, und durch die drei festen Punkte a, b, c eine Reihe von Kegelschnitten legt, so dass jeder derselben überdiess durch die Endpunkte eines Segments jener Reihe geht, so gehen nun nothwendig alle diese Kegelschnitte durch einen bestimmten vierten Punkt und entsprechen den Segmenten anharmonisch. Wenn jeder der Kegelschnitte durch die vier Punkte sich auf zwei gerade Linien reducirt, so liefert der Satz, dass die von denselben auf einer beliebigen Transversale gebildeten Segmente involutorisch sind, diesen bekannten Satz vom Viereck: Jede in der Ebene eines Vierecks gelegte Transversale begegnet seinen vier Gegenseiten und seinen beiden Diagonalen in Punkten, die in Involution sind; ein Satz, den man gewöhnlich zur Construction des sechsten Punktes einer Involution anwendet und den man schon in des Pappus mathematischen Sammlungen findet, wenn auch in anderer Form.

Wegen der vollkommenen Zusammengehörigkeit von Punktreihen und Strahlenbüscheln, also auch der von involutorischen Punktreihen und involutorischen Strahlenbüscheln gehen auch hier aus allen Sätzen correlative Sätze ohne Weiteres hervor; so zu dem Vorhergehenden vom Viereck, um nur ein Beispiel anzuführen, dieser: Die sechs Geraden, welche von einem beliebigen Punkte nach den vier Eckpunkten und den beiden Durchschnittspunkten der Gegenseiten eines Vierecks gezogen werden, bilden einen involutorischen Strahlbüschel. (Mit Hilfe dieses Satzes kann man bequem den sechsten Strahl einer Involution finden. So auch in den anderen vorgelegten Beispielen**).

Ein interessantes Beispiel aus der Geometrie des Raumes bieten die Oberflächen 3. Ordnung dar. Man weiss, dass eine solche allgemein 27 gerade Linien enthält; jede Ebene, die man durch eine dieser geraden Linien

*) Er enthält die Sätze von Desargues und Sturm.

**) Weitere Beispiele von der Anwendbarkeit dieser Sätze kann man finden in dem sehr schätzbaren Buche: *Mélanges de géometrie pure comprenant diverses Applications des Théories exposées dans le traité de géometrie supérieure de M. Chasles; par E. de Jonquières. Paris. Mallet. 1856.*

legt, schneidet die Oberfläche ausser ihr in einem Kegelschnitt, und ist in den zwei Punkten, welche dieser mit der geraden Linie gemein hat, Tangentialebene der Oberfläche. Denkt man vier solche Ebenen durch dieselbe gerade Linie, so bestimmen dieselben durch ihre Berührungspunkte in dieser vier Segmente, die in Involution sind und den vier Ebenen anharmonisch entsprechen. Man kann bemerken, dass die Doppelpunkte dieser Involution von der Art der parabolischen Punkte sind, für welche die Tangentialebenen der Oberfläche in zwei unendlich nahe benachbarten Punkten — die betrachtete gerade Linie verbindet sie — zusammenfallen.

Diess mag ausreichen, um von der Brauchbarkeit dieser Sätze eine Anschauung zu geben. Man versteht darnach, mit welchem Rechte ihr Erfinder Chasles ihnen den Titel Principien hat geben können*); sie sind allerdings durch ihre Allgemeinheit und den abstracten Charakter, der ihnen eigen ist, ausserordentlich fruchtbare Wahrheiten; sie liefern unmittelbar und in einer Menge von Aufgaben einfache Beziehungen, die von dem anharmonischen Verhältniss abhängen und sich auf dem gewöhnlichen Wege gar nicht so leicht darbieten würden. Sie stellen sich in allen diesen Beziehungen dem Princip der Reciprocität an die Seite, umfassen aber jenes in dem Bereich ihrer Anwendbarkeit, in Folge der Doppelnatur des anharmonischen Verhältnisses zugleich mit und zeichnen sich dadurch vor ihm aus, dass sie nicht schon bekannte Wahrheiten durch Entwicklung der Correlata vervielfältigen, sondern im Angriff neuer Aufgaben sich fruchtbar erweisen.

Während solche Principien, deren Haupteigenschaft die ist, dass durch sie sehr verschiedene Aufgaben auf denselben Ausdruck zurückgeführt werden, in der Analysis und Mechanik mehrfach vorhanden sind, fehlen sie eigentlich in der Geometrie, deren Untersuchungen fast stets einen concreten Charakter haben. Als ein Princip in diesem Sinne hat man meiner Ansicht nach die Vereinigung dieser Sätze allerdings zu betrachten.

Hiernach nur noch eine kurze Bemerkung. Von einem andern Gesichtspunkte aus erscheint die gegebene Form dieser Sätze als eine nothwendige erst jetzt erfüllte Forderung. Bekanntlich ist die Gleichheit der anharmonischen Verhältnisse die allgemeine Eigenschaft aller in der Verwandtschaft der Collineation stehenden geometrischen Figuren; erst in der hier vorgelegten einfachen Form ist diese Charakteristik auf denselben Grad von Anwendbarkeit und Einfachheit gebracht, welcher gefordert zu werden scheint von der grundlegenden Definition dieser Verwandtschaft: Zwei Systeme sind einander collinearverwandt, wenn jedem Punkte des einen ein Punkt des andern so entspricht, dass die entsprechenden Punkte des zweiten Systems zu denen einer geraden Linie des ersten stets wieder eine gerade Linie bilden.

*) In dem citirten Mémoire.

II.

Die geometrischen Gesetze der Ortsveränderung starrer Systeme.

Von K. Küpper,
Lehrer a. d. Gewerbschule zu Trier.

Die Entdeckung der Gesetze, welche bei der Ortsveränderung starrer Systeme, insofern man dieselbe als unabhängig von physischen Ursachen betrachtet, obwalten, ist eine schöne Frucht jener allgemeinen Methoden mathematischer Forschung, deren Einführung in die Wissenschaft den Geometern unserer Zeit vorbehalten war: Obwohl nun diese Gesetze eine ergiebige Quelle mathematischer Wahrheiten sind, und die Auffassung sowie die richtige Anwendung derselben keinen erheblichen Schwierigkeiten unterliegt, so wurde doch bisher weder ihre Bedeutung stark genug betont, noch ihre Begründung und Entwickelung so klar und vollständig gegeben, wie es bei einem in hohem Grade einfachen Gegenstande wünschenswerth erscheinen sollte.

Folgenden hierher gehörigen merkwürdigen Satz hat zuerst Euler mit Hülfe einer geometrischen Construktion bewiesen:

„Wenn zwei congruente feste Körper*) einen Punkt gemein haben, so gibt es immer, welches auch die Stellung der beiden Körper im Raume sein mag, eine durch jenen Punkt gehende Gerade, welche gegen beide Körper einerlei Lage hat, so dass durch Drehung um diese Gerade der eine Körper mit dem andern zur Deckung gebracht werden kann.“ Es liegt sehr nahe, diesen Satz dadurch zu generalisiren, dass man die beschränkende Bedingung eines gemeinschaftlichen Punktes aufhebt, und höchst wahrscheinlich leuchtete unserem grossen Mathematiker diese Generalisation sofort ein; indess hat sowohl er, wie auch sein berühmter Nachfolger Lagrange, es unterlassen, das allgemeine Prinzip, welches aus ihren analytischen Formeln leicht herauszulesen ist, in Bezug auf Folgerungen für die Geometrie und Mechanik auszubeuten.

Im Jahre 1830 veröffentlichte der um die Geometrie hochverdiente französische Mathematiker Chasles in dem *Bulletin des Sciences* von Férussac einen kleinen Aufsatz, in welchem er einige allgemeine Eigenschaften des Systems zweier ähnlichen Körper, die irgendwie im Raume

---

*) Allgemeiner ist der Ausdruck starres System, weil er diskontinuirliche *Verbindungen von* Punkten, deren gegenseitige Abstände unveränderlich sind, mit *umfasst*.

gelegen sind, mittheilt, und diese sodann für die Annahme zweier congruenten Systeme folgendermassen spezialisirt: „Wenn man im Raum zwei congruente Körper in beliebiger Lage hat, so gibt es immer eine unendliche Gerade, welche, wenn man sie als dem einen Körper angehörig betrachtet, selbst ihre Homologe im andern Körper ist. Woraus man sogleich diese allgemeine Eigenschaft der Ortsveränderung eines festen Körpers folgert: Wenn ein fester Körper irgend eine endliche Ortsveränderung erfährt, so gibt es in diesem Körper stets eine gewisse unendliche Gerade, welche nach der Veränderung sich wieder an derselben Stelle befinden wird, wie vorher. Wenn man den zweiten Körper (d. h. den Körper in seiner zweiten Lage genommen) um diese Gerade dreht, so gelangt er in ähnliche Lage zu dem ersten, und wenn man ihn dann weiter in der Richtung dieser Geraden fortschiebt, so kommt er zur Deckung mit dem ersten Körper; dies beweist, dass man immer einen festen Körper aus einer Lage in eine beliebige andere durch die Bewegung einer Schraube, an welcher er befestigt ist, überführen kann."

Die Geschichte der Mathematik und Naturwissenschaft bestätigt fast auf allen Seiten die bemerkenswerthe Thatsache, dass Wahrheiten von allgemeiner Natur nur in seltenen Fällen auf dem direkten Wege erreicht werden, welchen man später als den geeignetsten zu ihrer Deduktion einschlägt. Indem Chasles die Relationen der Lage, welche zwischen zwei projektivischen, oder wie er sie nennt, homographischen Gebilden stattfinden, zunächst dem besondern Fall zweier ähnlichen, sodann zweier congruenten Systeme anpasst, gelangt er zu einem Resultat, welches man unmittelbar und ohne Mühe erhalten hätte, wäre man auf der von Euler vorgezeichneten Spur fortgeschritten. Natürlicherweise verbleibt damit der Herleitung Chasles' immerhin der eigenthümliche Vorzug, einen Zusammenhang mit weiteren geometrischen Gesetzen zu offenbaren, der umgekehrt nur auf künstliche Weise wieder hergestellt werden kann. Chasles selbst zeigte in seinem bekannten Werke: *Aperçu historique* etc. wie man sich seines Theorems zur Construktion der Normalen bei einer grossen Anzahl von Curven bedienen kann; er wies nach, dass die besondere Tangentenmethode, mit deren Hülfe Descartes und Pascal das berühmte Problem über die Cykloide lösten, unter diese Anwendungen zu rechnen sei. Seitdem haben es verschiedene Schriftsteller bei schwierigen Fragen aus der reinen Mechanik mit grossem Nutzen gebraucht. So benutzte Poinsot dasselbe in seinem classischen Werke über die Rotation, um der Vorstellungskraft ein deutliches Bild von der allgemeinen Bewegung eines Körpers zu liefern; Olinde Rodrigues

leitete daraus den analytischen Ausdruck der endlichen, oder unendlich kleinen Coordinaten-Variationen in einem beweglichen starren System, sowie die Bedingungen der Unbeweglichkeit eines solchen Systems ab. Auch die Maschinenkunde hat diesem Prinzip einige schätzbare Resultate zu verdanken, zum Beispiel die scharfsinnig erdachte Methode zur Construktion von Zahnformen mittels Kreisbogen, welche der Professor Willis in den *Transactions of the institution of civil engeneers* bekannt machte; ein solches wäre ferner die bedeutende Vereinfachung, welche sich für geometrische Theorie correspondirender Zahnflächen ergeben würde, wollte man ihr dies Prinzip zu Grunde legen. Und bei dem heutigen Standpunkt dieses Zweigs unserer Kenntnisse ist es für den Ingenieur und Maschinenbauer geradezu unerlässlich geworden, sich mit dem in Rede stehenden Grundwahrheiten möglichst vertraut zu machen.

Weil ihm aber die gewöhnlichen Handbücher hiezu keine Gelegenheit bieten, so dürfte eine Arbeit nicht überflüssig sein, die es unternimmt, diese Wahrheiten dem allgemeinen Verständniss, insbesondere dem Verständniss des Technikers näher zu bringen. Die letztere Rücksicht bestimmte mich denn auch, eine Methode der Herleitung zu wählen, welche in Bezug auf mathematische Vorkenntnisse nur geringe Anforderungen an den Leser stellt, und solche Uebungen beizufügen, welche den eigentlichen Sinn der Sätze zum Bewusstsein bringen können. Dabei lag es nicht in meiner Absicht, die Anwendungen mit derselben Ausführlichkeit wie die Hauptsache zu behandeln; der Beschränktheit des Raumes wegen musste es überdiess zuweilen bei blosen Andeutungen sein Bewenden haben.

Gelänge es mir, meine Leser soweit anzuregen, dass sie sich aufgefordert fühlten, einige Lücken auszufüllen und Unvollständiges zu ergänzen, so wäre das Ziel, das ich mir bei Abfassung dieser Arbeit vorgesetzt habe, erreicht.

§ 1. Ortsveränderung eines ebenen Systems S in seiner Ebene.

Um die Beziehungen zwischen zwei beliebigen Lagen, die ein ebenes System in seiner Ebene einnimmt, zu ermitteln, stelle ich mir einen Kreis (Taf. I, Fig. 1.) vor, welcher zu dem System gehört und in dessen erster Lage mit dem um A mit dem Radius AP beschriebenen Kreise, in der zweiten Lage mit dem um A' mit demselben Radius beschriebenen Kreise zusammenfällt. Jede Bewegung des ebenen Systems der Art, dass der Kreis (A) mit (A') zur Deckung kommt und dass ausserdem irgend ein Punkt P des Kreises (A) mit dem ihm entsprechenden (homologen) P' zusammenfällt, kann dazu dienen, S aus der ersten Lage in die zweite überzuführen. Natürlich ist es nun, dass man dem S einmal eine parallele Verschiebung gleich AA' ertheilt und dasselbe hierauf um den Punkt A' *so lange dreht, bis* der Punkt P an die ihm angewiesene Stelle P'

gelangt. Die hiezu erforderliche Drehung sei durch den Winkel 2φ gemessen. Errichtet man nun auf AA', in A und A' die Normalen AC, $A'C'$, und macht $\angle PAC = P'A'C' = \varphi$, so sind nothwendig P, P' zwei homologe Punkte. Zieht man PA, $P'A'$ und verlängert diese Geraden bis zu ihrem Durchschnitt O, so wird $OP = OP'$, $\angle POP' = 2\varphi$, und es ist evident, dass das System S aus der ersten Lage in die zweite gebracht werden kann, indem man ihm um den Punkt O eine Drehung ertheilt, deren Amplitude 2φ ist. Oder: Wenn auf irgend eine Weise die zweite Lage aus der ersten abgeleitet wird, so gibt es in S einen bestimmten Punkt O, welcher an seinen ursprünglichen Ort zurückkehrt, d. h. eine geschlossene Linie beschreibt.

Zur Uebung. Die Natur der von O beschriebenen Curve hängt allein von dem durchaus willkührlichen Modus der Herleitung der einen Lage aus der andern ab. Behält man die Mittelpunkte A, A' einmal bei, und bestimmt den Radius x der zugehörigen Kreise, so dass $(OA + x)\, 2\varphi = 2\pi \, . \, x$, so kann man den Kreis (A) über dem Bogen PP' fortrollen lassen, bis er mit (A') zusammenfällt, dann werden auch die Punkte P, P' sich decken. Alle Punkte des Systems (A allein ausgenommen) beschreiben Cykloidenbögen, O durchläuft die Schleife einer Cykloide. Einiges Interesse bietet folgende Modifikation dar:

Aus A, A' beschreibe man mit $AO = A'O$ zwei Kreise (Taf. I, Fig. 2.), welche sich ferner in M schneiden mögen. Aus M beschreibe man mit einem Radius $= 2\,MA$ einen Kreis, welcher jene in Q, R berührt, und lasse nun den Kreis A über dem Bogen QR rollen. Ist dann A nach A' gekommen, so befindet sich auch das System S in seiner zweiten Lage; denn zieht man die Geraden AOP, $A'OP'$, so sind P, P' zwei homologe Punkte, und es ist bekannt, dass beim Rollen des Kreises (A) über dem Bogen QR der Punkt O das gerade Stück OV hin und her durchläuft, dass P auf der Geraden PMP' bleibt, und demnach, wenn A nach A' gelangt, mit P' zusammenliegt. Bei dieser Bewegung beschreibt also O eine geschlossene krumme Linie, alle auf dem Kreise (A) liegende Punkte beschreiben geradlinige Bahnen, welche mit der Bahn von O sich im Punkte M schneiden; die übrigen Punkte von S beschreiben Bögen von Ellipsen, deren Mittelpunkt M, und für welche entweder die Summe der Halbaxen oder die Differenz dem Durchmesser von (A) gleich ist, je nachdem diese Punkte innerhalb oder ausserhalb des Kreises (A) liegen.

Die nämliche Bewegung nimmt S auch an, wenn man zwei Punkte (Taf. I, Fig. 3.), welche mit O nicht in einer Geraden liegen, auf geradem Wege in ihre neuen Lagen führt. Denn man sieht leicht, dass, wenn P, Q *die ersten*, P', Q' die zweiten Lagen der beiden Punkte sind,

die Geraden PP', QQ' sich schneiden müssen, etwa in M. Um die Dreiecke MPQ, $MP'Q'$ beschreibe man zwei Kreise, so sind diese von gleicher Grösse, und wegen der Congruenz von APQ, $A'P'Q'$ sind ihre Mittelpunkte A, A' homologe Punkte. Beschreibt man nun noch aus M mit dem Radius $2MA$ einen Kreis, und lässt (A) über diesem rollen, bis A und A' zusammenfallen, so werden sich auch die Punkte P, P' decken; wir sind daher auf die vorige Art zurückgeführt.

Die eben betrachteten gleichen Kreise haben noch eine andere Bedeutung: Auf jeder Geraden gibt es, wie man sofort erkennt, zwei homologe Punkte, und nicht mehr. Fragt man nach dem Ort der homologen Punkte, welche sich in einem Strahlenbüschel von gegebenen Mittelpunkt M auf denselben Strahlen finden, so erhält man für diesen zwei gleiche, sich in M und dem Drehpunkt O unter dem Winkel 2φ schneidende Kreise; die Punkte des einen entsprechen denen des andern und ihre Verbindungslinien enthalten den Punkt M.

Wie aber auf jeder Geraden zwei sich entsprechende Punkte liegen, so gehen durch jeden Punkt zwei und nur zwei homologe Gerade. Der Ort für die den Punkten M einer gegebenen Geraden m zugehörigen Geradenpaare besteht aus zwei congruenten Parabeln, welche die Gerade m zur gemeinschaftlichen Tangente, den Drehpunkt O zum gemeinschaftlichen Brennpunkt haben.

Wählt man als den Ort des Punktes M einen Kreis, so umhüllen die Paare homologer Geraden zwei diesen Kreis doppelt berührende Kegelschnitte, welche O zum Brennpunkt haben und durch eine Drehung von der Amplitude 2φ um O zur Deckung gebracht werden können. Diese Kegelschnitte sind beide entweder Ellipsen oder Hyperbeln, je nachdem der Drehpunkt O von dem Ortskreise M umschlossen wird oder nicht.

Verbindet man die Punkte P, Q einer Geraden mit ihren homologen P', Q', und beachtet, dass die Dreiecke OPP', OQQ' ähnlich sind, so sieht man, dass die Geraden PP', QQ' zusammen mit PQ, $P'Q'$ eine Parabel umhüllen, deren Brennpunkt O ist. — Verbindet man die Punkte eines Kreises mit ihren homologen, so folgt in analoger Weise, dass die Verbindungslinien einen Kegelschnitt (Ellipse oder Hyperbel) umhüllen, welcher von den beiden zugeordneten Kreisen doppelt berührt wird.

Anmerkung. Wenn die beiden Lagen von S einander unendlich nahe liegen (benachbarte sind), so gilt Alles, was wir aufgestellt haben, wenn nur berücksichtigt wird, dass an die Stelle der Verbindungslinie zweier homologen Punkte das Wegelement eines Punktes, und an die Stelle des Durchschnittspunktes zweier homologen Geraden der Berührungspunkt der in Bewegung befindlichen Geraden mit der von ihr umhüllten Curve tritt.

§. 2. Ortsveränderung eines räumlichen Systems S mit einem absolut festen Punkt.

Wir betrachten zwei Lagen (Taf. I, Fig. 4.) von S, welche das Gemeinsame haben, dass ein zu S gehöriger Punkt O in beiden Lagen dieselbe Stelle einnimmt, und wollen beweisen, dass die eine Lage aus der andern mittels einer einfachen Drehung von S um eine durch O gehende Axe abgeleitet werden kann. Bei diesem Beweise verfahre ich ebenso wie vorher; ich suche einem mit S fest verbundenen Kreise eine solche Bewegung zu ertheilen, dass er aus seiner ersten Lage in die zweite gelangt. Um den festen Punkt O als Mittelpunkt denke ich eine Kugel beschrieben und auf dieser sei ein Kreis, dessen Mittelpunkt A und dessen Radius AP ist, so zu bewegen, dass sein Mittelpunkt A nach A' und noch irgend einer seiner Punkte P nach P' kommt. Offenbar wird dies erreicht, wenn man den Kreis zuerst um eine im Punkte O auf der Ebene OAA' normale Axe dreht bis A mit A' zusammenfällt und zu dieser Drehung noch eine andere um OA' als Axe hinzufügt, durch welche P nach P' geführt wird. Seien nun AC, $A'C'$ die Bögen zweier grössten Kreise, deren Ebenen auf AOA' normal sind, 2φ der Winkel, um welchen man das System noch zu drehen hat, wenn bereits OA mit OA' zusammenliegt, so mache man die sphärischen Winkel PAC, $P'A'C'$ jeden gleich φ, und verlängere die Bögen PA, $P'A'$ bis zu ihrem Durchschnitt O'. Dann ist $O'P = O'P'$, und es ist klar, dass der Kreis (A) durch eine Drehung um die Axe OO' zur Coincidenz mit (A') gebracht werden kann, wobei denn auch die Punkte P, P', also überhaupt irgend zwei homologe Punkte der Kreise sich decken. Die Amplitude der nöthigen Drehung ist der sphärische Winkel $AO'A' = 2\varphi$. Demnach haben wir erreicht, dass durch eine einzige Drehung um die Axe OO' alle Punkte des gedachten Kreises aus ihrer ersten Lage in die zweite übergeführt werden, und es geht aus der Unveränderlichkeit der gegenseitigen Abstände aller Punkte von S hervor, dass dasselbe von jedem Punkte gilt. Bewegt sich ein starres System in der Weise, dass einer seiner Punkte endlich wieder seine ursprüngliche Lage annimmt, so kann man eine durch diesen Punkt gehende Gerade angeben, welche in ihre frühere Lage zurückkehrt, d. h. welche eine geschlossene Fläche beschreibt. Oder: Es lässt sich das System in eine Schaar ebener Systeme zerlegen (normal auf der Drehaxe), welche, wenn sie ihre ursprünglichen Ebenen auch verlassen, doch wieder in dieselben zurückkehren, und stets ist die eine Lage aus der andern so abzuleiten, dass jene ebenen Systeme in ihren Ebenen verbleiben. In jeder dieser Ebenen gibt es einen zurückkehrenden Punkt O', und alle diese Punkte liegen auf der Drehaxe. *Weil die* Verbindungslinien homologer Punkte in einer

bestimmten Stellung (normal zur Drehaxe) sich befinden, so liegen alle solche Punkte, deren Verbindungslinien durch einen beliebigen Punkt M gehen, in einer Ebene und in dieser besteht ihr Ort aus zwei gleichen Kreisen, welche durch M und O' gehen und sich unter dem Winkel 2φ schneiden.

Verbindet man die Punkte einer Geraden G mit ihren homologen, so erfüllen diese Verbindungslinien ein hyperbolisches Paraboloid, welches zu einer Ebene wird, wenn G die Drehaxe schneidet, oder damit parallel, oder darauf normal ist.

Fassen wir zwei benachbarte Lagen in's Auge, so folgt, dass die Bahnelemente aller Punkte einer Geraden, die sich unendlich wenig um eine andere dreht, in einem hyperbolischen Paraboloid liegen; oder: Errichtet man auf den Ebenen eines Ebenenbüschels in den Punkten, in welchen sie von irgend einer Geraden getroffen werden, Normalen, so erzeugen diese ein hyperbolisches Paraboloid.

Zur Construction der Drehaxe bedarf es nur der Angabe zweier Punkte P, Q des Systems und ihre homologen P', Q'; nämlich die beiden Ebenen, welche in den Mitten von PP' und QQ' beziehlich auf diesen Geraden normal sind, schneiden sich in der Drehaxe.

§. 3. Ortsveränderung, bei welcher kein Punkt des Systems S seine anfängliche Stelle im Raume wieder einnimmt.

Vermöge einer derartigen Ortsveränderung sei ein Punkt A nach A' gekommen, so wird man die zweite Lage aus der ersten dadurch ableiten, dass man dem S eine parallele Verschiebung ertheilt, welche A nach A' bringt und dasselbe weiter um eine gewisse, durch A' gehende Axe $A'X$ eine Drehung von bestimmter Amplitude 2φ ausführen lässt. Stellen wir uns nun alle Punkte von S auf dem Parallel-Strahlenbündel vor, dessen Richtung durch AX angegeben ist, so begreift man, dass unter diesen Strahlen einer sein muss, der durch die Drehung in die nämliche Gerade geführt wird, in welcher er sich ursprünglich befand. Denn eine auf AX normale Ebene E hat in der ersten Lage des Strahlenbündels S mit demselben ein ebenes System Σ gemein, welches in der zweiten Lage Σ' in einer mit E parallelen Ebene E' liegt, so dass der Parallel-Strahlenbündel es jetzt auf E als ein mit Σ congruentes System projizirt. Da aber zwei congruente ebene Systeme immer einen Punkt gemein haben, so gibt es auch in der zweiten Lage einen Strahl c, welcher durch denselben Punkt von E geht, den er in der ersten Lage traf, d. h. der nach vollzogener Drehung wieder in die Lage kommt, welche er vor der Verschiebung inne hatte. Wenn daher keine Ableitung der beiden Lagen denkbar ist, bei welcher ein *Punkt eine geschlossene* Linie durchläuft, so kann man

unter allen Umständen eine Gerade angeben, die eine geschlossene Fläche beschreibt; die Punktenreihe aber, welche ursprünglich in jener Geraden lag, befindet sich in der zweiten Lage darin um eine gewisse Strecke verschoben. Diese Strecke ist nichts anderes als die rechtwinklige Projektion von AA' auf die Richtung von $A'X$ oder c; oder auch, wenn B, B' zwei beliebige homologe Punkte sind, die Projektion von BB' auf jene Richtung. Man kann also das System aus einer Lage in jede andere überführen, indem man dasselbe einer gewissen Richtung parallel verschiebt, und es hierauf um eine Gerade, welche dieser Richtung angehört, dreht; diese Gerade heisst Centralaxe (wir bezeichnen sie mit c). Wir fanden c parallel der besondern zum Punkte A' gehörigen Axe $A'X$, und es könnte scheinen, als wenn ihre Richtung von der Wahl des Punktes A abhinge. Dem ist jedoch nicht so, wie folgendermassen erhellt. B gehöre zu dem auf AX normal gedachten ebenen System Σ, B' also zu Σ'. Weil die Verschiebung BB' das System normal gegen sich selbst um dieselbe Grösse entfernt, wie die Verschiebung AA', so gelangt Σ durch jene in dieselbe Ebene E', wie durch diese. Soll es mithin nach vollzogener Drehung um eine durch B gerichtete Axe BY' noch in der Ebene E' sich befinden, wie es ja in der That sein muss, so muss auch die Axe $B'Y$ auf E' normal, d. i. der Centralaxe parallel sein. — Ferner seien C, C' die Punkte von c, welche den Systemen Σ, Σ' angehören, so kann man die Verschiebung BB' als zusammengesetzt betrachten aus einem mit CC' gleichen und parallelen Stück BB'', und der in E' liegenden Strecke $B''B'$; und der Punkt C kommt durch die Verschiebung BB' in eine Lage C'' der Art, dass $C'C''$ gleich und parallel $B''B'$ ist. Bewirkt man daher die Ortsveränderung von S durch die Verschiebung CC', und die nachfolgende Drehung um c, so muss durch diese letztere B'' nach B' geführt werden; bewirkt man sie durch die Verschiebung BB', welcher eine Drehung um $B'Y$ folgt, so muss vermöge dieser Drehung C'' nach C' gelangen: Woraus man schliesst, dass für alle möglichen Axen die Drehung sowohl der Grösse wie dem Sinne nach die nämliche ist, wie für die Centralaxe. Das eben entwickelte Theorem, welches das Fundament der geometrischen Theorie der Bewegung bildet, lautet vollständig:

Die Hinüberleitung eines starren Systems aus einer Lage in irgend eine andere lässt sich auf unzählige Arten mit Hülfe einer parallelen Verschiebung und einer darauf folgenden Drehung, oder auch umgekehrt, erreichen. Dabei ist die Drehaxe durch die beiden Lagen allein der Richtung nach bestimmt; die entsprechende Verschiebung hängt aber davon ab, durch welche Punkte des Systems

die Drehaxe geht. Sie ist der Grösse und Richtung nach durch die Verbindungslinie eines solchen Punktes mit seinem homologen gegeben; die Drehung ist, was ihren Sinn und ihre Amplitude betrifft, durchaus constant. Unter den unendlich vielen möglichen Drehaxen befindet sich eine, die Centralaxe, für welche die zugehörige Verschiebung mit ihr selbst parallel und von allen denkbaren die kleinste ist; sie stellt die Axe einer Schraubenbewegung dar, mittels welcher die beabsichtigte Ortsveränderung hervorgebracht werden kann.

Zur Construktion der Centralaxe c dient eine Verallgemeinerung der am Ende von §. 2 vorgebrachten Bemerkung. Zwei homologe Punkte B, B' liegen auf einem Umdrehungscylinder, dessen Axe c ist; folglich ist die Mitte M von BB' derjenige Punkt dieser Linie, welcher am nächsten bei c liegt*). Zieht man daher durch M eine Gerade, normal auf c, so wird diese auch auf BB' normal sein, oder zieht man durch M einn Gerade c' parallel zu c (oder BY) und errichtet in c' auf der Ebene, welche c' und BB' enthält, eine Ebene rechtwinklig, so geht diese durch c. Somit genügen bei gegebener Richtung von c zwei Punkte und ihre homologen um c zu finden.

Von den Eigenschaften homologer Punkte wollen wir nur eine beweisen, welche uns in sehr verschiedenen Transformationen wieder entgegentreten wird, nämlich: Die Verbindungslinien der Punkte einer Geraden mit ihren homologen bilden ein hyperbolisches Paraboloid. — Den Punkten P, Q einer Geraden mögen P', Q' als homologe entsprechen; durch PP' denke man eine Ebene E parallel QQ', dann werden die Geraden PQ, $P'Q'$ gegen E gleich geneigt sein, denn $PQ = P'Q'$, und die Abstände der Punkte Q, Q' von der gedachten Ebene sind ebenfalls gleich. Ist daher R ein Punkt der Linie PQ, so muss sein homologer R', weil durch die Relation $PR = P'R'$ bestimmt, eben so weit von E entfernt sein wie R, mithin ist RR' mit E parallel.

§. 4. Anwendungen.

I. Benachbarte Lagen und Bewegung eines starren Systems. Jede unendlich kleine Bewegung eines ebenen Systems, bei welcher dasselbe seine Ebene nicht verlässt, fällt mit einer Drehung um einen bestimmten Punkt der Ebene zusammen; die Normalen der Bahnelemente aller Punkte schneiden sich in diesem augenblicklichen Drehpunkt. Wenn das System fortfährt sich in seiner Ebene zu be-

*) Um auf zwei windschiefen Geraden die Punkte des kleinsten Abstandes zu erhalten, beschreibe man um eine jede dieser Geraden als Axe einen Rotationscylinder und halbire das Stück, welche diese Fläche auf der andern begrenzt.

wegen, und man verfolgt den Weg des jedesmaligen Drehpunktes, so bemerkt man eine, durch die Natur der Bewegung bestimmte Curve. Aber anstatt die absolute Stelle in's Auge zu fassen, welche der Drehpunkt einnimmt, kann man auch die Reihenfolge derjenigen Punkte des bewegten Systems betrachten, welche successive zu Drehpunkten werden, und als Ort für diese wird man eine gewisse Curve finden, welche an der Bewegung des Systems Theil nimmt. Betrachtet man die absolut feste, und die mit dem beweglichen System verbundene Curve als gegeben, so erhält man die Bewegung des Systems auch dadurch, dass man die zweite Curve in gewissem Sinn auf der ersten rollen lässt und mit jener das System unveränderlich verbindet.

Jede unendlich kleine Bewegung eines Systems um einen festen Punkt fällt mit einer Drehung um eine bestimmte durch diesen Punkt gehende Axe zusammen; die Normalebenen für die Bahnelemente aller Punkte schneiden sich in dieser Axe. Fährt das System fort, um jenen festen Punkt sich zu bewegen, so erhält man für den Ort der jedesmaligen Drehaxe einen Kegel, welcher den festen Punkt zur Spitze hat und im Raume fest ist. Verfolgt man aber die Geraden des Systems, welche der Reihe nach mit den Drehaxen zusammenfallen, so bilden diese einen zweiten, mit dem System beweglichen Kegel. Die Bewegung des Systems erhält man nun auch dadurch, dass man den beweglichen Kegel in gewissem Sinne auf dem festen rollen lässt und mit jenem das System unveränderlich verbindet.

Endlich, jede beliebige unendlich kleine Bewegung eines Systems kann betrachtet werden als zusammengesetzt aus einer Drehung um eine gewisse Gerade als Axe, und einer Verschiebung parallel zu dieser Axe. Die Bahnelemente aller Punkte gehören cylindrischen Spiralen an, welche gemeinsame Axe und gleiche Ganghöhe haben. Stellt man sich den Ort der Geraden vor, welche der Reihe nach Axen werden, einmal im absoluten Raume, sodann im beweglichen System, so erhält man zwei Regelflächen, wovon die eine über der andern rollt und zugleich gleitet. Denkt man sich diese beiden Flächen, sowie die Bewegung der einen gegeben, so hat man ein einfaches Mittel, die wirkliche Bewegung des Systems zu erzeugen, und z. B. für jeden Punkt Geschwindigkeit und Beschleunigung, wie auch die lebendige Kraft des Systems zu berechnen.

II. Zusammenhang zweier Bewegungen. Unterliegt ein System nacheinander mehreren Rotationen und Verschiebungen, so handelt es sich darum, für die definitive Deplacirung die Centralaxe, die zugehörige Drehung und Verschiebung anzugeben. Zur Lösung dieser Aufgabe richtet man sein Augenmerk darauf, die gerade Punktenreihe zu ermitteln, welche, nachdem sie alle Bewegungen, denen sie unterworfen war, durchgemacht hat, schliesslich wieder in der Geraden sich befindet, *in welcher sie anfangs* war; und es kommt einzig und allein

darauf an, das Verlangte für zwei derartige Bewegungen zu leisten. Von unserer Betrachtung schliessen wir, als hinreichend bekannt, die Zusammensetzung von blossen Verschiebungen, und, als minder wichtig, den Fall von endlichen Ortsveränderungen aus, für den die allgemeine Methode zwar anwendbar bleibt, der sich aber wesentlich von dem unendlich kleiner Bewegungen dadurch unterscheidet, dass bei jenem die Ordnung, in welcher die Zusammensetzung vorgenommen wird, nicht, wie bei diesem, gleichgültig ist. Der für die Philosophie der Mathematik äusserst wichtige Umstand, dass bei der Zusammensetzung unendlich kleiner Bewegungen die Art der Aufeinanderfolge ohne Einfluss auf das Resultat bleibt, leitet uns aus dem Gebiet der Geometrie über in das der Mechanik, welche coexistirende unendlich kleine Bewegungen (die von gewissen zugleichbestehenden Ursachen, wenn diese einzeln thätig wären, hervorgebracht würden) zu einer Gesammtwirkung vereinigt; aber es ist der Beachtung wohl werth, dass die Uebereinstimmung zwischen den Gesetzen der geometrischen und mechanischen Zusammensetzung von Bewegungen durch keinen Schluss *a priori* eingesehen werden kann, dass sie hier, wie überall ein eigentliches Naturgesetz, einen der Erfahrung entlehnten oder ihr anticipirten Satz constituirt.

III. Zusammensetzung einer Drehung $d\varphi$ um eine Axe a mit einer Verschiebung dv, deren Richtung einer Geraden G parallel ist, die mit a den Winkel ω bildet. — Um die Axe a denke man einen Umdrehungs-Cylinder, dessen Normalschnitt den Radius ϱ hat, beschrieben, und an diesem zwei Berührungsebenen parallel zu G gelegt. Bei der Drehung bleiben die Berührungsseiten in diesen Ebenen, und auch noch bei der Verschiebung; eine der gedachten Seiten bewegt sich vermöge der Drehung um $\varrho d\varphi$ in einem der Verschiebungscomponente $dv \sin \omega$ gerade entgegengesetzten Sinn; die Grösse ihres definitiven Fortrückens ist folglich: $\varrho d\varphi - dv \sin \omega$, und wird Null, wenn ϱ der Bedingung $\varrho d\varphi = dv \sin \omega$ gemäss angenommen wird. Um daher die Centralaxe zu erhalten, beschreibe man um die Axe a denjenigen Umdrehungs-Cylinder, dessen Punkten die Rotationsgeschwindigkeit $dv \sin \omega$ zukommt, und lege in diesem je nach dem Sinn der Drehung eine Berührungsebene der Geraden G parallel; dann ist die Seite, in welcher die Berührung stattfindet, Centralaxe. Die Drehungsamplitude ist $d\varphi$, die Verschiebung in der Richtung von c ist $dv \cos \omega$, denn die mit a zusammenfallende Punktenreihe des Systems wird durch diese Bewegung ebenso deplacirt, wie durch die ursprünglich gegebene.

Wenn die Richtung von dv einen rechten Winkel mit a bildet, so findet man sofort durch Umkehrung die vielfach brauchbare Regel: Einer gegebenen Drehung $d\varphi$ um eine Axe c kann man eine *gleiche Drehung* um eine beliebige mit c parallele Axe a

substituiren, wenn man mit dieser noch eine normal gegen die Ebene beider Axen gerichtete Verschiebung verbindet, welche gerade hinreicht, um die durch die zweite Drehung aus ihrer Lage gebrachte Axe c wieder in dieselbe zurückzuführen.

Zur Uebung. Relative Bewegung eines Systems S, welches mit einer der Grösse und Richtung nach unveränderlichen Geschwindigkeit v fortschreitet, gegen den mit constanter Winkelgeschwindigkeit φ um eine feste Axe a rotirenden Raum R. Aufgabe ist, den Ort derjenigen Punkte des Raumes R zu charakterisiren, welche successive mit denen des Systems S zusammenfallen, der Vorstellung gleichsam die Spur zu zeigen, welche S in R zurücklässt. Hierzu benutzen wir den bekannten Grundsatz, wonach die relative Bewegung zweier Körper nicht gestört wird, wenn man beiden eine gemeinschaftliche Bewegung mittheilt. Fügen wir nun den vorhandenen Bewegungen eine Rotation hinzu, welche der des Raumes R geradezu entgegengesetzt ist und mit derselben Geschwindigkeit $d\varphi$ vor sich geht, so gelangt R für eine unendlich kurze Dauer dt zur Ruhe, die relative Bewegung von S wird zu einer absoluten und diese ist in jedem dt zusammengesetzt aus der Drehung $-d\varphi$ und der Verschiebung dv. Beide Bewegungen lassen sich nach dem Vorigen durch eine Drehung von gleicher Grösse und gleichem Sinn um eine mit a parallele Axe c und eine Verschiebung in der Richtung dieser Axe ersetzen, und welchen Moment man auch zur Bestimmung von c wählen möge, c wird seine Lage im absoluten Raume nicht ändern; dahingegen wird die mit c zusammenfallende Punktenreihe des Raumes R, je nach dem gewählten Moment jedesmal eine andere sein. Denkt man sich nämlich im Raume R einen Umdrehungs-Cylinder ϱ, welcher c zur Axe und a zur Seite hat, so wird nach jedem dt eine neue Seite dieses Cylinders mit c zusammenfallen. Aehnlicherweise werden die Geraden des fortschreitenden Systems S, welche gleichzeitig mit jenen Cylinderseiten sich in c befinden, in S eine Ebene E zum Ort haben, welche mit v parallel ist und den Cylinder ϱ in der Seite c berührt.

Stellen wir uns demnach vor, der Cylinder ϱ sei mit dem Raume R fest, die Ebene E wälze sich über seiner Oberfläche, indem sie zugleich in der Richtung von c fortgleitet und S sei mit E unveränderlich verbunden, so nimmt das System eine Bewegung an, welche mit der zu suchenden relativen im Raume R identisch ist. Jede Gerade von S, welche a parallel ist, beschreibt eine cylindrische Fläche, deren Normalschnitt eine gewöhnliche, gestreckte oder verkürzte Evolvente des Kreises ist, welcher den Normalschnitt von ϱ darstellt, zugleich verschieben sich die Punkte einer solchen Geraden in derselben um $dv \cos \omega$. Jede Gerade von S, welche in E liegt, behält ihren kürzesten Abstand von der Cylinderaxe *bei und berührt* den Cylinder fortwährend in Punkten

einer leicht zu bestimmenden Schraubenlinie; diese Schraubenlinie wird ein Kreis für alle Geraden, welche die Richtung v haben, deshalb beschreiben die bezüglichen Geraden Rotationshyperboloide; die übrigen Geraden von S beschreiben im Allgemeinen windschiefe, bei einer besondern Lage jedoch auch abwickelbare Schraubenflächen. Die relative Trajektorie eines Punktes ist eine Art Spirale auf einem Kreisevolventen-Cylinder und kann auch als Durchschnitt eines solchen Cylinders mit einer abwickelbaren Schraubenfläche construirt werden. — Nimmt man die Richtung der Bewegung von S normal gegen die Axe a an, so erhält man die Basis für die Theorie der Kreis evolventen-Verzahnung.

IV. Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$, $d\nu$, um parallele Axen m, n. Um die Axen m, n denke man zwei Umdrehungs-Cylinder, welche sich in der Weise berühren, dass ihre zusammenliegenden Seiten, indem sie den betreffenden Drehungen folgen, in entgegengesetztem Sinn auseinandertreten. Wenn nun die Radien ϱ, ϱ' der Normalschnitte beider Cylinder so gewählt sind, dass $\varrho d\mu = \varrho' d\nu$, so wird die Berührungslinie, wenn sie nacheinander beide Drehungen vollzieht, wieder in ihre anfängliche Lage gelangen; sie ist mithin die Centralaxe c. Was die Amplitude der resultirenden Drehung betrifft, so sei diese $d\psi$; weil nun n durch Drehung um m ebenso deplacirt werden muss, wie durch Drehung um c, so ist entweder:

$$(\varrho + \varrho')\, d\mu = \varrho' d\psi, \text{ oder } \pm (\varrho - \varrho')\, d\mu = \varrho' d\psi$$

je nachdem c zwischen m und n liegt, oder über m, oder über n hinaus. Der Kürze wegen setzen wir im Folgenden stets voraus, dass die resultirende Drehaxe zwischen die gegebenen Axen falle, eine Voraussetzung, welche die Allgemeinheit unseres Verfahrens nicht beeinträchtigt. Man hat gleicherweise

$$(\varrho + \varrho')\, d\nu = \varrho d\psi; \text{ daher } 1)\ \varrho d\mu = \varrho' d\nu; \text{ und } 2)\ d\psi = d\mu + d\nu$$

Woraus folgt, dass die Centralaxe den Abstand der Axen m,n im umgekehrten Verhältniss der Drehungs-Amplituden $d\mu$, $d\nu$ theilt; oder die Centralaxe hat die Richtung der Resultante zweier in m,n wirkenden Kräfte, von den Intensitäten $d\mu$, $d\nu$; die zugehörige Drehung hat eine Amplitude, welche dieser Resultanten gleich ist.

Zur Uebung. Die Bewegung eines ebenen Systems, von dem ein bestimmter Kreis (M, Radius ϱ) auf einem absolut festen Kreise (N, Radius ϱ') rollt, fällt in jedem Moment mit einer Drehung um den Berührungspunkt beider Kreise zusammen; denn das gedachte System lässt sich immer aus einer Lage in die benachbarte durch zwei successive Drehungen beziehlich um die Punkte M,N überführen, und wenn $d\mu$ die Amplitude der ersten Drehung ist, so wird $\frac{\varrho d\mu}{\varrho'}$ die der zweiten

sein; der augenblickliche Drehpunkt C theilt demnach die Linie MN in dem Verhältniss $\varrho : \varrho'$; die resultirende Amplitude ist $(1 \pm \frac{\varrho}{\varrho'})\, d\omega$, je nachdem der rollende Kreis sich ausser oder innerhalb des festen befindet. Das Bahnelement für irgend einen Punkt P wird $PC\,(1 \pm \frac{\varrho}{\varrho'})\, d\omega$, und man sieht, dass die Rektifikation der von P beschriebenen Curve auf die Ermittelung des Integrals $\int PC\, d\omega$ hinausläuft. Ohne analytische Hülfsmittel in Anspruch zu nehmen, kann man sich über die Natur dieses Integrals auf folgende Weise Aufklärung verschaffen. Liegt der rollende Kreis in dem festen, und ist $\varrho = \frac{1}{2}\varrho'$, so wird das Differenzial der von P beschriebenen Curve $\frac{1}{2} PC d\omega$, und da diese Linie bekanntlich entweder ein elliptischer Bogen (P ausserhalb des rollenden Kreises), oder eine gerade Linie (P im Umfang dieses Kreises) ist, so erhellt dass die Rektifikation der gestreckten und verkürzten Cykloiden aller Art durch ein elliptisches Integral zweiter Gattung, die der gewöhnlichen Cykloiden einfach durch eine Kreisfunktion bewerkstelligt wird. Auf diesem Wege kommt man am schnellsten zu den von Pascal herrührenden Sätzen über gleiche Ellipsen und Cykloidenbögen.

V. Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$, $d\nu$ um zwei Axen m, n, welche sich in einem Punkte O schneiden. Um diese Axen denkt man zwei sich berührende Umdrehungskegel der Art, dass ihre beiden zusammenfallenden Seiten, indem sie den betreffenden Drehungen folgen, in entgegengesetztem Sinn sich bewegen. Wenn nun die Radien ϱ, ϱ' zweier sich berührenden Kreisschnitte dieser Kegel so angenommen sind, dass $\varrho\, d\mu = \varrho'\, d\nu$, so wird ihre Berührungslinie, wenn sie nacheinander beide Drehungen vollzogen hat, wieder in ihrer anfänglichen Lage sein. Diese Linie ist also Centralaxe. Die Amplitude $d\psi$ der resultirenden Drehung kann danach bestimmt werden, dass ein beliebiger Punkt M der Axe m durch diese Drehung in dieselbe Lage gelangt, wie durch die Drehung $d\nu$ um die Axe n, d. h.

$$OM \sin \omega\, d\psi = OM \sin \alpha\, d\nu, \text{ oder } ON \sin (\alpha - \omega)\, d\psi = ON \sin \alpha\, d\mu.$$

Auch hier stellt sich heraus, dass die Centralaxe mit der Resultanten zweier in m, n wirkenden Kräfte $d\mu$, $d\nu$ zusammenfällt, und dass die Amplitude der resultirenden Drehung dieselbe Grösse $d\psi$ zum Maas hat, wie jene Resultante.

In den mitgetheilten Sätzen tritt eine merkwürdige Analogie zwischen der Zusammensetzung von Kräften und von Rotationen zu Tage. Da wir an einer andern Stelle Gelegenheit haben werden, darauf zurückzukommen, *so genüge hier die* Bemerkung, dass Poinsot, indem er den

glücklichen Gedanken der Aequivalenz einer Verschiebung oder Translation und eines sogenannten Drehungspaars (d. i. zweier successiven, gleichen, aber entgegengesetzten Drehungen um parallele Axen) durchführte, eine vollkommen gleichartige Behandlung der Statik und Dynamik ermöglichte und anbahnte. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass die erwähnte Analogie keineswegs, wie man auf den ersten Blick vermuthen möchte, neben die Verschiebung die einfache Kraft, neben die Drehung das Kräftepaar stellt, dass sie im Gegentheil die Kraft der Rotation, das Kräftepaar (die Axe desselben) der Translation entsprechen lässt.

Wir gehen auf die Zerlegung von Rotationen in andere, als eine durch das bisher Gesagte eigentlich schon erledigte Aufgabe, nicht näher ein, und wenden uns zu einer Untersuchung, welche die momentane Bewegung eines Systems von einer neuen Seite zeigt, und uns gestatten wird, der Lehre von der Zusammensetzung von Bewegungen gegenüber einen höhern Standpunkt zu gewinnen.

VI. Von der Zusammensetzung zweier Drehungen $d\mu$ $d\nu$, um windschiefe Axen m, n.

1) Man ziehe die auf m und n normalstehende Gerade MN (Taf. I, Fig. 4.) (die Linie des kürzesten Abstandes), ihre Länge sei e. Durch den Punkt N ziehe man $m' \parallel m$, so lässt sich statt der um m erfolgenden Drehung $d\mu$ eine um die die Axe m' erfolgende Drehung von gleicher Amplitude und gleichem Sinn substituiren, wenn nur zu dieser noch eine Verschiebung sich gesellt, die normal gegen die Ebene mm' gerichtet ist und deren Maas: $e d\mu$. Die beiden jetzt bestehenden Drehungen um m' und n geben eine resultirende Drehung $d\psi$ um eine gewisse, in der Ebene mm' liegende und durch den Punkt N gehende Axe c'. Bezeichnen wir die Winkel $m'c'$, $m'n$, d. h. welche von den Geraden m', c' und m', n gebildet werden, mit ω, α so ist:

$$1)\ d\mu \sin\omega = d\nu \sin(\alpha - \omega);\quad 2)\ d\psi = \frac{d\nu \sin\alpha}{\sin\omega} = \frac{d\mu \sin\alpha}{\sin(\alpha-\omega)}.$$

Aber die Drehung $d\psi$ um c', vereinigt mit der Verschiebung $e d\mu$ führt auf eine Drehung $d\psi$ um eine mit c' parallele Axe c, combinirt mit einer zu c parallelen Verschiebung, deren Grösse: $e d\mu \cos(\frac{\pi}{2} - \omega) = e d\mu \sin\omega$.

Daraus, dass die Richtung von $e d\mu$ einen rechten Winkel mit MN bildet, folgert man leicht, dass c die Linie MN in einem Punkte C treffen muss, der je nach dem Sinn von $d\mu$ entweder auf der Strecke MN, oder auf deren Verlängerung liegt, jedoch stets so, dass

$$CN d\psi = e d\mu \cos\omega.$$

Setzen wir $CM = \varrho$, $CN = \varrho'$, so folgt:

$$\varrho' d\psi = e d\mu \cos\omega, \text{ also } \varrho' = \frac{d\mu}{d\nu} \frac{\sin\omega \cos\omega}{\sin\alpha} = e \frac{\cos\omega \sin(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}$$

und: $\varrho = e - \varrho' = e \dfrac{\sin\omega \cos(\alpha-\omega)}{\sin\alpha}$; daher: 3) $\dfrac{\varrho}{\varrho'} = \dfrac{\tang\omega}{\tang(\alpha-\omega)}$.

2) Construktion der Centralaxe c. Die horizontale Projektionsebene (Fig. VII) sei durch MN normal auf m gelegt, die Vertikal-Ebene gehe durch m und sei mit n parallel; n'', n' seien die Projektionen von n, durch die Gerade c'' werde der Winkel $PMO = \alpha$ in zwei Theile ω, $\alpha-\omega$ getheilt, deren Sinus in dem umgekehrten Verhältniss der Winkelgeschwindigkeiten $d\mu$, $d\nu$ stehen; dann ist c'' die Vertikal-Projektion der Axe c. Ihre Horizontal-Projektion zu bestimmen, ziehe ich auf c'' eine beliebige Normale $PR''Q''$, betrachte dieselbe als Vertikal-Projektion einer Geraden, welche sich an die Axen m,n in den Punkten P,Q anlehnt, deren Horizontal-Projektion mithin MQ' ist. Ich behaupte, dass die Linie PQ auch einen Punkt R mit der Axe c gemein hat; R'', R' müssten dann die Projektionen von R sein und das Behauptete ist bewiesen, wenn ich zeige, dass die Linie $R'C$, die ich mit n' parallel ziehe, die Horizontal-Projection von c ist. Nach Gleichung 3) bedarf es nur des Nachweises, dass $\dfrac{CM}{CN} = \dfrac{\tang\omega}{\tang(\alpha-\omega)}$; und die Figur zeigt sofort, dass diese Gleichung durch: $\dfrac{PR''}{R''Q''} = \dfrac{\tang\omega}{\tang(\alpha-\omega)}$, welche in der That erfüllt ist, mitbedingt wird. Hiermit ist unsere Aufgabe erledigt, zugleich ersieht man, dass die zu Hülfe genommene Gerade PQ, da ihre Vertikal-Projection auf c'' normal, c'' aber mit c parallel ist, die Centralaxe in dem Punkte R unter rechtem Winkel schneidet: Die Geraden m, n, c gehören folglich zu der einen Schaar von Seiten eines hyperbolischen Paraboloid's, von welchem die Seiten der andern Schaar, wie PQ, mit c einen rechten Winkel bilden.

3) Identität einer willkürlichen unendlich kleinen Bewegung eines starren Systems mit zwei succesiveen Drehungen um windschiefe Axen (Fig. VIII). Wir setzen voraus, dass die gegebene Bewegung zurückgeführt sei auf eine Drehung $d\psi$ um die Centralaxe c, und eine Verschiebung df, parallel dieser Axe. N sei ein beliebiger Punkt des Systems, die Linie NC sei normal auf der Centralaxe. Durch den Punkt N ziehen wir $N\psi'$ zu c parallel, so ist die vorliegende Bewegung zu ersetzen durch eine Drehung $d\psi$ um die Axe $N\psi'$ vereint mit einer Verschiebung, welche aus der gegebenen df und der vermöge der ursprünglichen Drehung erfolgenden Bewegung $CNd\psi$ des Punktes N geometrisch zusammengesetzt ist. Diese Resultante (die Axe der Translation für N) sei NN'. Nun zerlegen wir $N\psi'$, das Maas von $d\psi'$, in zwei Componenten $N\nu = d\nu$, $N\mu' = d\mu$, wovon die letztere normal auf der Ebene CNN', die erste beliebig, natürlicherweise aber in der durch $N\psi'$ und $N\mu'$ gelegten, auf CN normalen *Ebene enthalten ist. Die Drehung* $N\mu'$, verbunden mit der auf ihrer

Axe normalen Verschiebung NN' führt auf eine Drehung $d\mu$ um eine mit $N\mu'$ parallele Axe $M\mu$, so dass endlich die gegebene Bewegung auf zwei Drehungen $d\mu$, $d\nu$ um die Axen $M\mu$ oder m, $N\nu$ oder n zurückgeführt ist. Diese Axen nennen wir Gegenaxen, die Punkte M,N, die Endpunkte des kleinsten Abstands zwischen ihnen, Gegenpunkte.

Man bemerkt, dass eine solche Axe (wie $M\mu$) mit der Translationsaxe ihres Gegenpunktes (N) einen rechten Winkel bildet, und wenn daher ω der Winkel ist, unter welchem $M\mu$ (oder $N\mu'$) gegen die Axe c sich neigt, so ist dies derselbe, den NN' mit der Richtung von $CNd\psi$ einschliesst; folglich:

$$tang\,\omega = \frac{df}{CNd\psi} \ldots . \; 1)$$

ω hängt somit von der Lage des Punktes N, nicht aber von der Axe $N\nu$ ab; dieser letzteren gemäss bestimmt sich aber die Lage des Punktes M. Wenn $N\nu$ alle möglichen Lagen (normal auf CN) annimmt, so beschreibt gleichzeitig der Punkt M die unendlich verlängerte Gerade NC, die Axe $M\mu$ bleibt dabei in einer Ebene, welche mit c den Winkel ω bildet. Um bei einer besondern Lage von $N\nu$, die durch den Winkel α bestimmt sei, welchen $N\nu$, $M\mu$ bilden sollen, den Punkt M zu bestimmen, hat man:

$$MN d\mu = NN' = \sqrt{CN^2\, d\psi^2 + df^2};$$

Also nach 1) $MNd\mu = CNd\psi \sqrt{1 + tang\,\omega^2} = \frac{CNd\psi}{cos\,\omega}$.

Weil aber, in Folge der Zerlegung von $d\psi$, $\frac{d\psi}{d\mu} = \frac{sin\,\alpha}{sin\,(\alpha - \omega)}$, so ist auch:

$$\frac{MN}{CN} = \frac{sin\,\alpha}{cos\,\omega\, sin\,(\alpha-\omega)} = \frac{tang\,\omega + tang\,(\alpha-\omega)}{tang\,(\alpha-\omega)}$$

mithin: $$\frac{CM}{CN} = \frac{tang\,(\alpha-\omega)}{tang\,\omega}, \text{ und: } CM = \frac{df}{d\psi\, tang\,(\alpha-\omega)} \ldots 2)$$

Es genügt auf die bei der Construktion von c vorkommende Betrachtung hinzuweisen, um den Satz aufstellen zu können, dass irgend zwei Gegenaxen m,n nebst der Centralaxe c einem hyperbolischen Paraboloid als Seiten angehören, in welchem die eine Schaar von Geraden auf c, die andere auf der Geraden NM, in welcher die kürzesten Abstände von m, c, n liegen, normal ist.

4) Eigenschaften der Gegenaxen. Ehe wir diese Auseinandersetzung beginnen, müssen wir in Kürze des Falles Erwähnung thun, bei dem es sich um die Gegenaxe einer Geraden m handelt, welche die Centralaxe schneidet. Zunächst ist klar, dass, wenn der Winkel mc ein Rechter ist, von einer Zerlegung der Drehung $d\psi$ nach der Axe m nicht *die Rede sein kann*, *also* auch nicht von einer Gegenaxe; wenn ferner

derselbe Winkel = Null ist, oder $m \parallel c$, so gehört zu der Drehung $d\psi$ um m noch eine parallele Verschiebung, die auch als eine Drehung um eine unendlich ferne Axe angesehen werden darf. Im Allgemeinen zerlege man $d\psi$ iu zwei Componenten, wovon die eine m zur Axe, die zweite eine auf c normale Axe hat. Diese letztere liefert in Verbindung mit der Verschiebung df eine Drehung um eine Axe n, welche einmal in einer im Durchschnittspunkt von m,c auf c normalstehenden Ebene, sodann in einer der Ebene mc parallelen Ebene liegen muss. Hiernach kehren wir zu den Gegenaxen m,n zurück, die wir in der vorigen Nummer näher bestimmt haben. Die Punkte M,N,C, die Winkel α,ω nehmen wir in derselben Bedeutung, wie dort, und bezeichnen der Kürze wegen die im Punkte N auf NC normale Ebene in der Folge stets mit $\mathfrak{N}$.

Wir fanden, dass, wofern die Gerade n in der Ebene $\mathfrak{N}$ bleibt und fortwährend den Punkt N enthält, ihre Gegenaxe m einen constanten Winkel ω mit c bildet, sonst aber ihre Lage dergestalt ändert, dass sie eine durch NC gehende Ebene beschreibt. Der Reihenfolge von Lagen, in denen die Geraden m,n Gegenaxen sind, entspricht eine Schaar von hyperbolischen Paraboloiden, welche dieselbe (auf c normale) Richtebene, sowie zwei Seiten (c und die Gerade NC) gemein haben. Diese Paraboloide können dazu dienen, um der Vorstellung die Anordnung der möglichen Gegenaxen zugängig zu machen, und wir werden zeigen, dass in einem solchen Paraboloid unendlich viele Paare von Gegenaxen liegen, dass für ein solches Paar das Rechteck aus den Entfernungen der beiden Axen von c, ebenso wie das Produkt aus den Tangenten der Winkel, welche sie mit c bilden, constant ist.

In dem Paraboloid, welches c,m,n enthält, seien s,t zwei zur selben Schaar wie m,n gehörige Seiten, S,T seien die Punkte, in welchen sie die Gerade MN schneiden, α' heisse der Winkel st, ω' der Winkel sc, dann ist

$$\frac{CS}{CT} = \frac{\tang \omega'}{\tang (\alpha' - \omega')}.$$

Wenn nun zwei Drehungen $d\sigma$, $d\tau$ um s,t als Axen vorliegen, derart, dass $d\sigma : d\tau = \sin(\alpha' - \omega') : \sin \omega'$, so wird die resultirende Centralaxe mit c parallel werden. Damit zugleich die resultirende Drehung $= d\psi$ werde, muss sein

$$\frac{ds \sin \alpha'}{\sin(\alpha' - \omega')} = d\psi, \text{ oder auch } \frac{d\tau \sin \alpha'}{\sin \varphi'} = d\psi \ldots . 3)$$

und damit ferner die resultirende Axe mit c zusammenfalle,

$$CTd\psi = STd\sigma \cos \omega' \ldots . 4)$$

Endlich damit die resultirenden Verschiebungen identisch seien, ist erforderlich:

$$STd\sigma \sin \omega' = e d\mu \sin \omega \ldots 5)$$

Die Gleichungen 4), 5) transformire ich durch Einführung von $e = \varrho + \varrho'$, und durch Benutzung der Proportion: $\varrho + \varrho' : \varrho' = tang\ \omega + tang\ (\alpha - \omega) : tang\ (\alpha - \omega) = sin\ \alpha : cos\ \omega\ sin\ (\alpha - \omega)$. Es entsteht:

$$STd\sigma\ sin\ \omega' = \varrho' d\mu\ tang\ \omega \frac{sin\ \alpha}{sin\ (\alpha - \omega)};$$ daher nach 4):

$$CT\ tang\ \omega'\ d\psi = \varrho' d\mu\ tang\ \omega \frac{sin\ \alpha}{sin\ (\alpha - \omega)};$$ und weil:

$d\psi : d\mu = sin\ \alpha : sin\ (\alpha - \omega)$, so folgt: $CT = \varrho' \frac{tang\ \omega}{tang\ \omega'}$ ..... 6)

Mit Hülfe der Gleichungen $\varrho : \varrho' = tang\ \omega : tang\ (\alpha - \omega)$, $CS : CT = tang\ \omega' : tang\ (\alpha' - \omega')$ ergiebt sich:

$$CS = \varrho \frac{tnng\ (\alpha - \omega)}{tang\ (\alpha' - \omega')} \ldots . 7)$$

Hiernach kann der Punkt T, oder die Axe t willkürlich angenommen werden, der Winkel ω', den die Gegenaxe s mit c bildet, ist dann nach 6) bestimmt; und durch diesen Winkel hat man sogleich S; denn in dem betrachteten Paraboloid ist:

$$CS : \varrho = tang\ \omega' : tang\ \omega \ldots . 8)$$

Endlich folgt aus 7) und 8) die zur Bestimmung von Gegenaxen bequeme Beziehung:

$CS.\ CT = \varrho\varrho'$, die erste der behaupteten Eigenschaften.

Sie enthält nach 6) und 7) die zweite:

$$tang\ \omega\ tang\ (\alpha - \omega) = tang\ \omega'\ tang\ (\alpha' - \omega').$$

b) Die Gleichungen 3), 4), 5) beziehen sich nicht blos auf Gegenaxen in einem bestimmten Paraboloid, sondern sie enthalten ganz allgemeine Eigenschaften dieser Linien. Wendet man nun auf 5) die Formeln:

$$d\tau = \frac{d\psi\ sin\ \omega'}{sin\ \alpha'};\ d\nu = \frac{d\psi\ sin\ \omega}{sin\ \alpha}$$

an, so kommt: $STd\sigma\ d\tau\ sin\ \alpha' = ed\mu\ d\nu\ sin\ \alpha$.... 9)

Denken wir uns auf den Axen s,t die Stücke $d\sigma$, $d\tau$ abgeschnitten, und ein Tetraeder gebildet, welches zu gegenüberliegenden Seiten eben diese Stücke hat, so drückt die linke Seite der Gleichung 9) den sechsfachen Inhalt dieses Tetraeders aus; ähnliches gilt für die rechte Seite in Bezug auf die Stücke $d\mu$, $d\nu$ in den Axen m,n: Wie man auch die gegebenen Drehungen $d\mu$, $d\nu$ durch zwei andere ersetzen mag, stets bleibt das Tetraeder, welches die auf den Drehaxen abgetragenen Maasse dieser Drehungen zu gegenüberliegenden Seiten hat, von unveränderlichem Inhalt. Dieser Satz ist das Analogon des bekannten Chasles'sehen Satzes über zwei einem Kräftesystem aequivalente Kräfte.

c) Der Winkel α, den zwei in einem bestimmten der vorhin erwähnten Paraboloide liegende Gegenaxen einschliessen, ändert sich im Allgemeinen von einem Paar zum andern, denn sonst würde die Gleichung

$tang\ \alpha = \frac{tang\ \omega + tang\ (\alpha - \omega)}{1 - tang\ \omega\ tang\ (\alpha - \omega)}$ wegen der Constanz des Werthes von $tang\ \omega\ tang\ (\alpha - \omega)$ auf einen bestimmten Werth von ω führen, was offenbar nicht möglich ist. Jedoch bildet eine Ausnahme der Fall, wo $tang\ \omega\ tang\ (\alpha - \omega) = 1$ oder $\alpha = \frac{\pi}{2}$. Erinnert man sich daran, dass, während die Axe n sich in der Ebene $\mathfrak{N}$ um den Punkt N drehte, ihre Gegenaxe m sich selbst parallel blieb, dabei mit der Translationsaxe NN' einen rechten Winkel bildete, so gewahrt man, dass, wenn n mit dieser Translationsaxe zusammenfällt, und nur dann, ihre Gegenaxe m mit ihr einen rechten Winkel bildet. Stellen wir uns mithin das Paraboloid her, in welchen jetzt m,n,c Seiten sind, so sind in diesem irgend zwei Gegenaxen normal gegen einauder gerichtet und sie fallen zusammen mit den Translationsaxen ihrer der Centralaxe zunächst liegenden Punkte. In keinem der andern Paraboloide gibt es zwei unter rechtem Winkel geneigte Gegenaxen.

Eigentlich versteht es sich von selbst, dass zwei Gegenaxen dadurch charakterisirt sind, dass die Wegelemente (Translationsaxen) der Punkte der einen normal gegen die andere gerichtet sind; weil aber der direkte Beweis dieser Eigenschaft sehr einfach ist, so fügen wir ihn hier noch bei.

$N\nu$ ist die Axe n, NN' die Translationsaxe von N, $N\mu'$ mit m, $N\psi'$ mit c parallel; diese verschiedenen Geraden liegen in der Ebene $\mathfrak{N}$ und Winkel $N'N\mu'$ ist ein rechter. Nun ist das Wegelement des Punktes ν die Resultante von NN' und einer Drehung um die Axe $N\psi'$, und die letztgenannte Componente ist normal gegen die Ebene $\psi'N\nu$, d. h. parallel der Geraden NC; folglich ist die in Rede stehende Resultante der Ebene CNN' parallel, oder gehört einer auf $N\mu'$ (m) normalen Stellung an.

5) Hier ist der Ort, einige Sätze aufzustellen, welche mit gewissen, von Möbius in seiner Statik mitgetheilten die grösste Aehnlichkeit haben. Damit aber diese eigenthümliche Verwandtschaft zwischen dem Gegenstande nach wesentlich verschiedenen Wahrheiten recht sichtbar hervortrete, bediene ich mich der von Möbius gebrauchten Namen:

Unter Nullebene des Punktes N soll die Ebene verstanden werden, welche in N normal auf der Translationsaxe NN' von N ist. Dieselbe enthält nach Früherem die Gegenaxe einer jeden durch N gehenden auf NC normalen oder in $\mathfrak{N}$ liegenden Geraden.

Nullpunkt einer Ebene E heisst derjenige Punkt von E, dessen Translationsaxe normal auf E ist. Diese Definition verlangt eine besondere Rechtfertigung. Wenn E die Centralaxe schneidet und zugleich auf ihr normal ist, so sieht man, dass der Punkt, in welchem sie die Centralaxe trifft, ihr Nullpunkt ist; denn dieser und kein anderer ausser ihm

bewegt sich normal gegen E. Ferner, schneidet E die Centralaxe c in einem Punkte C, ohne auf c normal zu sein, so denke man durch C in E eine Normale auf c; die Translationsaxen der Punkte dieser Linie bilden ein hyperbolisches Paraboloid und neigen sich gegen E unter allen möglichen Winkeln, mithin ist eine und nur eine normal auf E; diese sei NN'. Dass für keinen zweiten Punkt von E die Translationsaxe mit NN' parallel ist, folgt so: durch N ziehe man $c' \parallel c$, so besteht die Bewegung aus einer Drehung $d\psi$ um c' und einer Verschiebung gleich und parallel NN', also muss das Wegelement eines jeden Punktes von E, als zusammengesetzt aus NN' und einem andern gegen c' normal gerichteten Stück, von der Richtung NN' abweichen. Wenn E der Centralaxe parallel ist, so gibt es in ihr keinen Nullpunkt, denn die eine Componente des Wegelementes eines jeden ihrer Punkte ist mit c parallel, fällt also in E.

Erster Satz. Die Nullebene eines beliebigen Punktes O einer Ebene E geht durch den Nullpunkt N von E.

Beweis. Das Wegelement des Punktes O ist die Resultante von NN' und dem Kreiselement, welches O vermöge der Drehung um die durch N zu c parallel gedachte Axe c' beschreibt. Da dieses letztere normal auf der durch c' und ON gehenden Ebene, NN' aber auf E normal ist, so muss jene Resultante auf ON normal sein, mithin muss die Nullebene von O die Gerade ON enthalten.

Zweiter Satz. Die Nullpunkte aller Ebenen, welche einen Punkt N gemein haben, fallen in die Nullebene E dieses Punktes.

Denn E muss, als Nullebene von N durch den Nullpunkt einer jeden Ebene gehen, in welcher N liegt.

Dritter Satz. Die Nullebenen der Punkte einer Geraden n schneiden sich in einer andern Geraden m, und diese ist die Gegenaxe jener.

Beweis. E', E'' seien die Nullebenen zweier Punkte Q', Q'' der Geraden n, sie mögen sich in einer Geraden m schneiden; P', P'' seien zwei beliebige Punkte von m, ihre Nullebenen F', F'' müssen nach dem Vorigen sowohl Q' als Q'' enthalten, weil jeder der Punkte P', P'' sowohl in E' als auch in E'' liegt. Betrachtet man demnach n als Durchschnittslinie von F', F'' so erhellt, dass die Nullebene eines jeden ihrer Punkte durch P' und P'', also auch durch m gehen muss.

Um zweitens zu erweisen, dass m, n Gegenaxen sind, stelle man sich das hyperbolische Paraboloid vor, welches die von den Punkten Q', Q'' etc. der Geraden n auf die Centralaxe gefällten Normalen $Q'C'$, $Q''C''$ etc. enthält. In diesem Paraboloid liegt, wie wir wissen, die Gegenaxen von n. Weil aber die Ebenen E', E'' etc. sich in einer Geraden m schneiden, und beziehlich durch die Geraden $Q'C''$, $Q''C''$ etc. gehen,

so wird m auch von den zuletzt genannten Geraden getroffen; m ist daher eine Seite des gedachten Paraboloids. Nun sei N der der Centralaxe zunächstliegende Punkt von n, E seine Nullebene; E enthält bekanntlich die Gegenaxe von n, und da E auch die Gerade m enthält, so müsste, wenn m diese Gegenaxe nicht selbst wäre, die Ebene E drei Seiten unseres Paraboloids, nämlich NC, m, und die Gegenaxe von n aufnehmen, was unmöglich ist; somit fällt m mit der Gegenaxe von n zusammen. W. z. b. w.

Ebenso beweist man das Reziproke: die Nullpunkte der Ebenen eines Ebenenbüschels, dessen Axe n ist, liegen in der Gegenaxe von n.

Vierter Satz. Die Gegenaxen aller durch einen Punkt N gehenden Geraden befinden sich in der Nullebene E dieses Punktes. Denn jede durch N gehende Gerade ist die Axe eines Büschels von Ebenen, deren Nullpunkte in der Gegenaxe dieser Geraden und auch in der Ebene E liegen. (Nach dem dritten und zweiten Satz).

Umgekehrt: Die Gegenaxen aller Geraden einer Ebene E schneiden sich im Nullpunkt N dieser Ebene. Denn die Nullebenen der Punkte einer solchen Geraden müssen durch deren Gegenaxe und zugleich durch N gehen. (Nach dem dritten und ersten Satz.)

Die vorstehenden Sätze enthalten eine specielle Art dualer oder reziproker Beziehung zweier Raumsysteme aufeinander. Jedem Gebilde, insofern es als Ort eines Punktes angesehen wird, ist ein anderes, von einer durch diesen Punkt gehenden Ebene umhülltes Gebilde zugeordnet, und umgekehrt. Jeder von einer Geraden n beschriebenen Regelfläche entspricht eine andere, die von ihrer Gegenaxe m erzeugt wird; einem Kegel z. B. entspricht ein von einer Curve begrenztes Stück einer Ebene. Anstatt aber zu einer vorgegebenen Regelfläche die Reziproke aufzusuchen, welches das gewöhnliche Verfahren ist, kann man auch irgend eine der Natur der Sache gemässe Abhängigkeit zwischen zwei reziproken Elementen (Geraden) feststellen, und nach der Anordnung derselben in zwei sich entsprechenden Grundgebilden (Ebene nnd Strahlenbündel) fragen. Indem wir beispielsweise nur solche Gegenaxen berücksichtigen, welche einen rechten Winkel miteinander bilden, d. i., welche zugleich Translationsaxen für ihre der Centralaxe am nächsten gelegenen Punkte sind, werden wir zu Eigenschaften geführt, die wiederum eine phoronomische Deutung zulassen; und so kommen wir zu dem Punkt zurück, von dem wir ausgegangen sind.

Anordnung der Translationsaxen oder Tangenten für die Bahnen der Punkte eines eine willkürliche momentane Bewegung vollziehenden starren Systems:

a) in einer Ebene E.

In einer auf der Centralaxe c normalen Ebene giebt es keine Translationsaxe, *es müsste denn die* Verschiebung df Null sein. In einer

mit c parallelen Ebene findet man alle darin enthaltenen Translationsaxen so: um c beschreibe man einen Rotationscylinder, welcher E in einer Geraden g berührt, dann fallen die Translationsaxen der Punkte von g in E und sind, weil diese gleichweit von c abstehen, parallel. Für keinen andern Punkt von E kann die Translationsaxe in E fallen, denn beschreibt man durch einen solchen Punkt um c als Axe einen Rotationscylinder, so wird dieser von der gedachten Translationsaxe berührt, welche daher E schneidet. Die Ebene möge endlich mit c den Punkt C gemein haben, N sei ihr Nullpunkt, NN' dessen Translationsaxe, also normal auf E. Der Nullpunkt P einer jeden durch NN' gehenden Ebene liegt in E, und da eine solche Ebene auf E normal ist, so liegt auch die Translationsaxe p von P in E. Ausser diesen Axen p liegt keine in E, denn wäre q eine solche für den Punkt Q, so müsste die Nullebene von Q einmal durch N gehen, dann auch normal auf q oder auf E sein, mithin müsste sie NN' enthalten, also unter den vorhin gedahten Ebenen vorkommen. Die Nullpunkte P liegen nach Früherem auf der zu NN' rechtwinkligen Gegenaxe MM' (in E); verbinden wir daher N mit den Punkten P und errichten auf NP in E Normalen, so sind diese die sämmtlichen in E vorkommenden Translationsaxen: Sie umhüllen, wie man sieht, eine Parabel, deren Brennpunkt N, deren Scheiteltangente MM' ist.

Das erlangte Resultat gestattet noch eine andere Auslegung. Der Ort für diejenigen Punkte P eines starren Systems, welche bei dessen momentaner Bewegung in einer festen Ebene E verharren, ist in E eine gewisse Gerade MM'; die übrigen Punkte treten aus E heraus, ein einziger darunter (N) normal gegen E. Das ebene System, welches E verlässt, gelangt in eine benachbarte Lage und schneidet E in jener Geraden MM'; folglich berührt das ebene System die abwickelbare Fläche, welche es umhüllt, in MM', oder MM' ist seine charakteristische Linie. Es leuchtet ein, dass jede Translationsaxe und nur eine solche für eine durch sie hindurchgehende Ebene die charakteristische Linie darstellt, weshalb denn auch die ausschliesslich für Translationsaxen stattfindenden Sätze gültig bleiben, wenn man an deren Stelle die charakteristischen Linien der zugehörigen Ebenen setzt. Bei dieser Umformung lehren sie etwas wesentlich Neues, wie z. B. die charakteristischen Linien, welche sich gleichzeitig in einer gegebenen Ebene E befinden, umhüllen darin eine Parabel, deren Brennpunkt der Nullpunkt von E, deren Scheiteltangente die charakteristische Linie von E ist.

b) In einem Strahlenbündel, dessen Mittelpunkt N sei.

Wir erinnern daran, dass aus der Construktion des Wegelementes NN' eines Punktes N unmittelbar hervorgeht: erstens, eine vorliegende *Gerade* kann Translationsaxe nur für denjenigen ihrer Punkte sein, wel-

cher der Centralaxe zunächst liegt; zweitens, damit diese Gerade Translationsaxe sei, muss zwischen dem Winkel ω, den sie mit c bildet, und ihrem kleinsten Abstand CN von c diese Abhängigkeit bestehen:

$$\cot\omega = \frac{df}{CN\,d\psi}.$$

Auch muss nach dem Bisherigen hinlänglich deutlich geworden sein, dass die erforderliche und hinreichende Bedingung, dass eine Gerade Translationsaxe ist, sich darin ausspricht, dass ihre Gegenaxe mit ihr einen rechten Winkel bildet. Wenn demnach E die Nullebene des Punktes N ist, so können sich in N nur solche Translationsaxen treffen, deren Gegenaxen mit den in E liegenden Translationsaxen zusammenfallen, und weil diese letzern nach dem Vorigen bekannt sind, so können sie uns dazu dienen, jene zu bestimmen. Die Kegelfläche, welche die durch N gehenden Translationsaxen enthält, ist die Reciproke der eben in E gefundenen Parabel; aber wir wollen sie ohne Rücksicht auf diesen Zusammenhang direkt aufsuchen.

Durch N führen wir eine beliebige Ebene F (Fig. IX) der Centralaxe c parallel, so gibt es in F eine einzige durch N gehende Translationsaxe. Denn ϱ sei der Abstand der Ebene F von c, ω der Winkel, den eine in F liegende Translationsaxe mit c bildet, so ist $\tan\omega = \frac{\varrho\,d\psi}{df}$, somit für F constant, oder die Translationsaxen in F sind parallel; folglich befindet sich unter ihnen eine l, und nur diese, welche den Punkt N aufnimmt. Nennen wir λ den Punkt von l, für welchen l Translationsaxe ist, $\gamma\lambda$ den kürzesten Abstand zwischen l, c, ferner φ den Winkel, den F mit der durch N und c gehenden Ebene einschliesst, so ist:

$$\varrho = CN \sin\varphi, \text{ daher:}$$

$$\tan\omega = \frac{CN\,d\psi}{df}\sin\varphi.$$

Oder, wenn wir mit ω' den Winkel bezeichnen, den NN' mit c oder mit der zu c parallelen NC' bildet:

$$\tan\omega = \tan\omega' \sin\varphi.$$

Diese Gleichung charakterisirt den Ort, in welchem l liegt. Denken wir im Abstande 1 von N eine Ebene normal auf c, so werde diese von NN' im Punkte N', von NC' in C', von l in L' geschnitten.

Daher: $NC' = 1$, $= C'N' = \tan\omega'$, $C'L' = \tan\omega$, $\angle L'C'N' = \frac{\pi}{2} - \varphi$.

Gemäss unserer Gleichung folgt: $C'L' = C'N' \cos L'C'N'$.

Mithin ist $\angle N'L'C'$ ein Rechter, und L' hat einen Kreis zum Ort, dessen Durchmesser gleich $C'N'$ ist, oder die Geraden l liegen auf einem Kegel, welcher diesen Kreis aus dem Punkte N projizirt. Dieser Kegel berührt die *durch N und c gelegte* Ebene in der Geraden NC', sein

Hauptschnitt ist das bei C' rechtwinklige Dreieck $NC'N'$, die Ebene seines zweiten Kreisschnitts ist auf NN' normal, d. i. der Nullebene von N parallel:

Die in einem Strahlenbündel (N) befindlichen Translationsaxen erfüllen einen Kegel zweiten Grades, dessen Hauptschnitt die Ebene darstellt, welche die zum Punkte N gehörige Translations- und Rotationsaxe enthält, und dessen beide Kreisschnitte auf je einer dieser Axen normal sind.

Zum Schlusse beantworten wir noch die sich hier von selbst aufdrängunde Frage (Fig. X) nach dem Orte der Punkte λ, deren Translationsaxen durch N gehen. Zunächst gewahrt man, dass diese Punkte auf einem Rotationscylinder liegen, dessen Schuitt mit einer durch NC rechtwinklig gegen c geführten Ebene der über NC als Durchmesser beschriebene Kreis ist; denn legen wir durch c eine, auf die vorhin gedachte Ebene F normale Ebene, so muss λ sich in der Durchschnittslinie dieser beiden Ebenen finden; der Ort für diese Durchschnittslinie ist aber offenbar der beschriebene Cylinder. Wenn wir weiter durch $\gamma\lambda$ eine Ebene normal auf c legen, welche NN' im Punkte ν, $N'C'$ im Punkte γ' schwindet, so ist das Dreieck $\gamma'\lambda\nu$ dem $C'L'N'$ ähnlich, daher $\angle \gamma'\lambda\nu = \frac{\pi}{2}$.

Weil nun $\gamma\lambda$ auf der Ebene F, also auch auf der Linie $\lambda\gamma'$ normal ist, so liegen die Punkte γ, λ, ν in einer Geraden. Alle ebenso erhaltenen Geraden erfüllen das hyperbolische Paraboloid, in welchem NN', c, und die Gegenaxe von NN' Leitlinien sind, und so kann der Ort der Punkte λ als Durchschnittscurve von je zweien der Fächen: Cylinder, Kegel, Paraboloid betrachtet werden. Seine Gleichung ergibt sich sehr einfach als eine Beziehung zwischen dem Abstande z des Punktes λ von der durch N rechtwinklich auf c gelegten Ebene und dem oben mit φ bezeichneten Winkel.

Es ist: $CN \cos\varphi = \gamma'\lambda$; und $\gamma'\lambda \cot\omega = z$,

folglich: $z = CN \cos\varphi \cot\omega$, und wegen $\tang\omega = \tang\omega' \sin\varphi$

$$z = CN \cos\varphi \cot\omega', \text{ aber } CN = \frac{df \tang\omega'}{d\psi},$$

mithin: $z = \frac{df}{d\psi} \cot\varphi$.

Im Wesentlichen drückt folgender Satz das Ergebniss der letzten Untersuchung aus: Bei einer willkürlichen momentanen Bewegung eines starren Systems bleiben dessen Punkte in gewissen Geraden t (ihren Translationsaxen), drehen sich seine ebenen Systeme um die nämlichen Geraden t (ihre charakteristischen Linien). Diejenigen Punkte, welche für *eine unendlich* kleine Dauer in derselben Ebene E bleiben,

befinden sich in der charakteristischen Linie von E; die ihnen zugehörigen Geraden t berühren eine Parabel in E. Diejenigen Punkte, welche gleichzeitig auf einen bestimmten Punkt N sich hinbewegen, liegen in einer unendlichen, durch N gehenden gewundenen Curve; die ihnen zugehörigen Geraden t sind die Seiten eines Kegels vom zweiten Grade, der zu jener Parabel in reziproker Verwandtschaft steht. (Vergl. Chasles: *Aperçu historique.*)

III.

Ueber den Zusammenhang der Witterungserscheinungen.

Von Dr. F. Dellmann in Kreuznach.

Die Grundlage einer allgemeinen Theorie der meteorologischen Erscheinungen ist zuerst von Dove in einem Aufsatze gegeben, welcher die Ueberschrift führt: „Ueber den Zusammenhang der Witterungserscheinungen." Zuerst erschien dieser Aufsatz 1835 in den Königsberger Vorträgen, später erweitert in seinen meteorologischen Untersuchungen. Dove hat in dieser Abhandlung dargethan, dass sich bei der Witterung Alles um die Wärme dreht, und zu diesem Satze werden die nachfolgenden Uebersichten und Erörterungen neue Belege liefern, namentlich durch Hervorhebung der beiden letzten Jahre der Beobachtungsreihe.

Es war dem Verfasser, Mitglied des königl. preuss. meteorologischen Instituts, interessant, zu wissen, inwieweit der ausgesprochene Satz noch hervortrete bei einer kleinern Reihe von Beobachtungen und bei Beobachtungen an einem und demselben Orte, da Dove ihn aufgestellt hat besonders im Hinblick auf die Witterung grösserer Erdstrecken. Zu dem Zwecke wurden vom Verfasser seine eignen mit guten Instrumenten gemachten Beobachtungen einer sorgfältigen Berechnung unterworfen.

Vorab sei bemerkt, dass in den nachfolgenden Angaben des Barometers und des Dunstdrucks die Zahlen französische Linien bezeichnen, und dass bei den Zahlen des Luftdrucks stets 330‴ zu addiren sind, wenn sie nicht Differenzen angeben; in diesem Falle bezeichnen sie wie auch *beim Dunstdruck*, *Hundertstel* von Linien. Die Wärmegrad,

sind Reaumur'sche, die Feuchtigkeit Procente des Maximums. Windstärke und Himmelsbedeckung werden bloss geschätzt, und erstere wird von 0 bis 4, letztere von 0 bis 10 gezählt. Bei den Zahlen der Luft-Elektricität ist die Einheit die Spannung eines Elementes einer offenen Zink-Kupfer-Säule. *A*, *B*, *C* sollen der Reihe nach die Mittel der Beobachtungen von Morgens 6 Uhr, Nachmittags 2 Uhr und Abends 10 Uhr bezeichnen. Die kleinen lateinischen Buchstaben sollen der Reihe nach die Mittel der Wärme, des Luftdrucks, Dunstdrucks, der Feuchtigkeit, Windstärke und Himmelsbedeckung angeben, und zwar die ungestrichelten die der Periode von 1851 bis 1858, die gestrichelten der Periode von 1857 + 1858 *). Die beiden letzten Jahre in eine Periode zu vereinigen, zeigte sich beim Gange der Berechnung als zweckmässig; denn obgleich ihre mittlere Wärme beinahe einen Grad differirt, war doch der tägliche Gang ihrer Erscheinungen, somit auch der übrigen, sehr übereinstimmend. So ist z. B. die Differenz ihrer Wärme $B - A = 5^0,385$, und zwar hat hier sogar das Jahr 1858 die grössere von $5^0,44$, wogegen dieselbe Differenz im Mittel der 6 ersten Jahre nur $4^0,72$ beträgt, und auch nur einmal, im warmen Jahre 1852, ein paar Hundertstel über 5^0 steigt. Ebenso ist $C - A$ der Wärme von 1858 am grössten von allen 8 Jahren, und $B - C$ steigt in den beiden letzten Jahren über 4^0, aber in keinem der frühern, wo es im Mittel $3^0,57$ ist. Wir werden sehen, dass diesen Anomalien im Gange der Wärme der beiden letzten Jahre fast überall entsprechende Abweichungen im Verlauf der übrigen Erscheinungen sich zeigen, und wenn ein Satz, wie der von Dove ausgesprochene, sich so in's Detail hinein verfolgen lässt, so erhält er dadurch eine nicht unwichtige Bekräftigung.

Es wird am zweckmässigsten sein, zuerst die Uebersichten folgen zu lassen, welche den Zusammenhang der Erscheinungen am deutlichsten vor Augen legen. Die Zahlen von 1—12 sollen die Monate Januar etc., die von 1—4 die Jahreszeiten Winter etc. bezeichnen. Zum Winter sind die Monate Januar, Februar und December gerechnet etc., wie es in der Meteorologie üblich ist.

1. Uebersicht der Jahreszeiten beider Perioden.

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	e	e'	f	f'
1.	0,89	0,51	3,56	5,10	1,88	1,80	83,5	84,0	0,85	0,58	7,31	6,88
2.	6,77	7,11	2,75	2,45	2,54	2,53	68,5	67,4	0,78	0,82	5,85	5,68
3.	14,58	15,64	3,28	3,46	4,64	4,47	69,1	61,8	0,74	0,76	5,11	3,94
4.	7,53	7,78	3,41	3,77	3,23	3,40	80,3	80,4	0,62	0,44	6,26	5,62.

*) Die Beobachtungen von 1859 habe ich noch nicht berechnen können.
Der Verfasser.

2. Uebersicht der Tageszeiten beider Perioden.

	a	b	c	d	e	f
	B—A	A—B	B—A	A—B	B—A	B—A
8jähr. Per.	4,89	21	22	21,1	0,55	0,12
2jähr. Per.	5,39	28	20	22,0	0,62	—0,11.

	a	b	c	d	e	f
	B—C	B—C	C—B	B—C	C—B	B—C
8jähr. Per.	3,71	24	10	16,5	0,60	1,40
2jähr. Per.	4,13	25	8	17,0	0,75	1,22.

	a	b	c	d	e	f
	C—A	A—C	C—A	A—C	C—A	A—C
8jähr. Per.	1,18	—3	12	4,6	0,05	1,28
2jähr. Per.	1,26	3	12	5,0	0,13	1,33.

3. Uebersicht der Tageszeiten nach den Jahreszeiten beider Perioden.

B — A

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	e	e'	f	f'
			A—B	A—B			A—B	A—B				
1.	2,53	2,95	9	11,5	18	22	9,9	12,6	0,23	0,42	—0,01	—0,33
2.	6,05	6,24	27	28	14	12	26,6	28,3	0,73	0,70	0,28	0,41
3.	6,25	7,11	29	41	15	— 4	28,0	30,3	0,83	0,83	0,45	0,64
4.	4,72	5,24	21	30	40	50	19,2	19,8	0,55	0,55	—0,23	—1,19.

B — C

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	e	e'	f	f'
			C—B	C—B			C—B	C—B				
1.	1,89	2,15	23	21	13	13	6,9	9,0	0,27	0,48	0,93	1,07
2.	4,37	4,61	22	22	4	3	19,6	21,3	0,73	0,85	1,58	1,61
3.	4,99	5,79	26	28	— 1	—9	22,9	24,0	0,87	1,05	1,73	1,45
4.	3,59	3,95	24	26	22	27	15,9	16,0	0,53	0,62	1,35	0,75.

A — C

	a	a'	b	b'	c	c'	d	d'	e	e'	f	f'
	C—A	C—A			C—A	C—A						
1.	0,64	0,80	— 14	— 10,5	5	9	3,0	3,6	0,04	0,06	0,94	1,40
2.	1,68	1,63	5	6	10	9	7,0	5,0	0,00	0,15	1,30	1,20
3.	1,26	1,32	3	12	16	5	5,1	6,3	0,12	0,22	1,28	0,81
4.	1,13	1,29	—3	4	18	23	3,3	2,9	0,05	0,07	1,58	1,94.

Die Umkehrung der Differenzen in den Uebersichten 2 und 3 hat einen doppelten Zweck; einmal, die negativen Grössen zu vermeiden und dadurch die Uebersichtlichkeit zu befördern; dann aber auch, die Gesetzmässigkeit deutlicher hervortreten zu lassen. So findet man diese Umkehrung zwischen Wärme und Luftdruck, wodurch also ausgesprochen, dass mit der Erhöhung der Wärme eine Erniedrigung des Luftdrucks

verbunden ist, und umgekehrt, wie es nach physikalischen Gesetzen sein muss. Indess ist doch beinahe die Hälfte der Zahlen bei der Differenz $A-C$ des Luftdrucks negativ, ein Beweis, dass während der Nacht auch mit dem Sinken des Thermometers ein Fallen des Barometers verbunden sein kann; denn wenn während der Nacht die Abkühlung so stark ist, dass ein Theil des in der Atmosphäre enthaltenen Wasserdampfs tropfbar wird und niederfällt, so kann dieser Ausfall im Luftdruck leicht grösser werden, als die Zunahme, welche er durch die Abkühlung erhält.

Zum Verständniss der Zahlen wird es kaum nöthig sein, noch etwas hinzuzufügen. Nur sei in Rücksicht auf die Jahreszeiten bemerkt, dass die Angaben Mittel für die einzelnen zu den betreffenden Jahreszeiten gehörigen Monate sind; also die Summe der drei Monate ist durch 3 dividirt.

Zur Hervorhebung der Gesetzmässigkeit und weiteren Ausführung des in den Uebersichten Ausgesprochenen möge noch die folgende Erörterungen dienen.

1. Wärme.

Die Jahresmittel der Wärme unserer Breite sind bekanntlich noch wenig constant; je grösser die Breite, desto weniger constant sind sie. Das hiesige Wärmemittel ist nach den 8 Jahren $7^0,44$; die äussersten Schwankungen der Mittel der einzelnen Jahre um das 8jähr. Mittel sind $-0^0,78$ und $0^0,81$; Differenz der Extreme $1^0,59$, also nach Dove's Ermittelungen noch etwa 1^0 zu klein. Das kälteste Jahr war 5, das wärmste 7. Den Verlauf der Wärme zeigen die in der 2ten und 3ten Uebersicht unter a und a' stehenden Zahlen; durch Vergleichung der Zahlen unter a und a' in der 3ten Uebersicht ergibt sich der Unterschied beider Perioden. Nur einmal finden wir unter a' eine etwas kleinere Zahl als unter a, nämlich im Frühling bei der Differenz $C-A$.

Um die Eigenthümlichkeit Kreuznach's im Wärmeverlaufe noch etwas näher kennen zu lernen, berechnete ich nach den vom königl. preuss. meteorolog. Institut herausgegebenen Tabellen für die Jahre 1848—1855 die Differenz $B-A$ von Crefeld. Hier wurde aber Morgens 7 Uhr und Nachmittags 1 Uhr und 3 Uhr beobachtet. Die Nachmittags-Grössen von 1 Uhr und 3 Uhr stimmen dort fast überein, also sind sie auch wenig von denen um 2 Uhr verschieden. Die Morgen-Grössen von 7 Uhr sind im Winter von denen um 6 Uhr ebenfalls wenig verschieden; mehr aber jedenfalls im Sommer, wo nach Sonnenaufgang das Thermometer ziemlich schnell steigt; also ist die erhaltene Differenz etwas zu klein für den Sommer, aber nicht so viel, als es die nachfolgenden Zahlen angeben, da die Steigung des Thermometers nach Sonnenaufgang vorzugsweise nur die heitern Tage trifft und dieser in Crefeld nicht viele sind.

Zur Vergleichung mögen beide Reihen hier stehen:

$B - A$ der Wärme.

	1	2	3	4
Kreuznach	2,53	6,05	6,25	4,72
Crefeld	2,06	4,32	4,52	3,73.

Es spricht sich darin eine nicht unbedeutende Verschiedenheit der Klimate beider Städte aus; das Kreuznacher Klima ist ein wärmeres bei Tage und ein mehr continentales.

Sehen wir in der 3ten Uebersicht auf die Differenz $C - A$, so könnte es auffallen, dass im Frühlinge während der Nacht eine stärkere Abkühlung sich zeigt, als im Sommer; denn nach dem Abkühlungsgesetze kühlt sich der wärmere Körper in derselben Zeit stärker ab. Hier darf dann nicht vergessen werden, dass während des Sommers ein guter Theil der Erwärmung bis 6 Uhr das Morgenmittel erhöht, es also dem Abendmittel nähert, und dass auch in der That die Abkühlungszeiten in beiden nicht gleich sind. Die übrigen Differenzen zeigen sich dem Abkühlungsgesetze gemäss; ihre Verschiedenheiten in den verschiedenen Jahreszeiten erklären sich aus der Berücksichtigung aller obwaltenden Ursachen.

Was die Beständigkeit der Jahres-Wärme-Differenzen betrifft, so schwankt $B - C$ in den acht einzelnen Jahren um $1^0,02$, $B - A$ um $1^0,20$, $C - A$ um $0^0,40$; aber diese Schwankungen verhalten sich ungefähr, wie die Mittel der Differenzen selbst; denn das 8jährige Mittel von $B - C$ ist $3^0,77$, das von $B - A$ $4^0,89$ und das von $C - A$ $1^0,18$. Fassen wir bloss die Jahreszeiten in's Auge, so sind natürlich, weil wir kleinere Zeiträume haben, die Schwankungen meist grösser; denn in 1 betragen sie von $B - C$ zwar nur $0^0,91$, in 2 aber $2^0,06$, in 3 nur $1^0,77$, in 4: $1^0,25$; die von $B - A$ in 1: $1^0,32$, in 2: $2^0,77$; in 3: $1^0,99$, in 4: $1^0,90$; die von $C - A$ in 1: $0^0,52$, in 2: $1^0,01$, in 3: $0^0,54$, in 4: $0^0,88$, und es finden sich die Extreme der letzten Herbst-Schwankung in den Jahren 7 und 8, die doch sonst in so mancher Hinsicht übereinstimmen. Vergleicht man indess diese Schwankungen mit ihren Mitteln, welche in der 3ten Uebersicht unter *a* stehen, so sieht man auch hier beinahe Proportionalität hervortreten.

Die Jahre 7 und 8 zeigen ihre Abnormität, wie in der Einleitung ausgesprochen wurde, zuerst in den Jahres-Differenzen der Wärme. Die Abnormität tritt am stärksten beim Sommer disser Jahre hervor in Bezug auf die beiden ersten Differenzen, und beim Jahre 7 nur etwas bei der dritten, wogegen in den andern Jahreszeiten keine Abnormität bei dieser sich zeigt. $B - C$ kommt in beiden Jahren im Sommer nahe an 6^0, wogegen es in den meisten übrigen Jahren im Sommer unter 5^0 bleibt; $B - A$ im Sommer des Jahres 7 nahe an $7\frac{1}{2}$ Grad, im Jahre 8 nahe an 7^0 wogegen es sonst meist *unter 6^0 bleibt.*

Wollte man die Beständigkeit der Quotienten der bezeichneten Wärmegrössen untersuchen, so müsste man sie, da sie nur relative sind, zuerst in absolute verwandeln, d. h. vom absoluten Nullpunkte (274° unter dem Reaumür'schen Nullpunkte) an zählen. Auf den Differenz-Quotienten $\frac{B-A}{B-C}$ kann diese Verwandlung keinen Einfluss haben. Dieser Quotient zeigt sich sehr constant, da er in den 8 Jahresmitteln zu Kreuznach nur um 0,06 schwankt. Auch für verschiedene Oerter und Jahreszeiten ist er ziemlich constant; denn in Kreuznach ist er im Mittel 1,32, in Padua*) 1,32, in Leith*) 1,31, in Brüssel nach den Beobachtungen von 1846 und 1847: 1,32; in Kreuznach nach den 8jährigen Mitteln in 1: 1,34, in 2: 1,38, in 3: 1,25, in 4: 1,31.

Es versteht sich, dass auch in Rücksicht der Wärmeschwankungen der Sommer hier mehr das Klima von geringerer, der Winter ein solches von höherer Breite hat. Die Differenzen der Wärme-Extreme der Jahreszeiten in der 8jährigen Periode sind in 1: 5,58; in 2: 2,18; in 3: 1,99; in 4: 1,99.

2. Luftdruck.

Das 8jährige Mittel des Drucks der feuchten Luft ist hier 333''',25; die Extreme des Jahresmittel sind 332''',62 (3. Jahr) und 333''',77 (8. Jahr); Schwankung also 1''',15. Die Gesetzmässigkeit im Jahreslaufe tritt nicht hervor, wenn wir die feuchte Luft in Betracht ziehen; denn der Winter hat nach der 1. Uebersicht unter b und b' zwar den höchsten Druck, aber der Frühling den geringsten. In Gegenden mehr continentalen Charakters, wie z. B. St. Louis am Missisippi, dessen Barometer-Curve ich der Güte des Herrn Dr. Engelmann verdanke, ist das freilich anders; hier zeigt der Sommer den geringsten und der Winter den höchsten Druck. Bei uns sind der Winter, Herbst und Sommer, letzterer freilich nur 0''',03 über dem Mittel, der Frühling aber 0''',50 unter demselben. Die Gesetzmässigkeit tritt indess auch hier im Jahreslaufe bei der trockenen Luft hervor. Ihr Jahresmittel ist 330''',18; 1 ist 1''',50, 2 nur 0''',03 drüber, der Herbst hat (fast wie bei der Wärme) genau das Mittel und der Sommer 1''',54 weniger. Ganz entsprechend für alle 4 Jahreszeiten zeigen sich die Wärmemittel (1: — 6°,55; 2: — 0°,67; 3: 7°,14; 4: 0°,09).

Der Verlauf des Drucks der feuchten Luft im Tage ist der Wärme entsprechend. $A-B$ ist in den Jahren 2—7 entweder 0''',20 oder 0''',21, in 1 nur 0''',12; dagegen in 7 und 8 im Mittel 0''',28; die beiden extremen Jahre zeigen sich also hier wieder, wie bei der Wärme, dem $B-A$

*) Nach Angabe in dem Lehrbuche der Meteorologie von Kämtz.
Der Verfasser.

entsprechend. In den Jahreszeiten ist $A-B$ der Reihe nach, mit dem Winter beginnend, 0''',09; 0''',27; 0'''29; 0'''21; $C-B$: 0''',23; 0''',22; 0''',26; 0''',24; $C-A$: 0''',14; —0''',044; —0''',03; 0''',03. Wie also das Wärmemittel Nachmittags im Sommer am meisten über dem Morgenmittel steht und im Winter am wenigsten, so auch der gesammte Luftdruck, und ebenso stehen die beiden andern Jahreszeiten zwischen diesen. Man könnte noch fragen, warum $C-B$ im Luftdruck so beständig ist, da in den 4 Jahreszeiten die grösste Schwankung im Frühjahr noch keine 0''',02 vom Mittel abweicht, dagegen $A-B$ so bedeutende Schwankungen zeigt, indem der Sommer (0''',29) mehr als das 3fache des Winters (0''',09) beträgt. Die Erklärung liegt nicht fern. Die am Boden erwärmte Luft steigt auf, bringt also eine Bewegung in der Atmosphäre hervor; die am Boden Abends erkaltete aber bleibt liegen. Die Luftströmung hat zum Theil lokale, zum Theil generelle, d. h. mit der Erwärmung der ganzen Erde zusammenhängende Ursachen. Tag- und Nachtwinde gibt es nicht bloss an den Küsten, sondern überall. Nachmittags um 2 Uhr ist hier im Durchschnitt die Luftströmung beinahe so gross, wie Morgens und Abends zusammen. Diese täglichen regelmässigen Strömungen treten auch, wie es sein muss, im Sommer am meisten hervor, besonders wenn der Polarstrom herrscht, weil dieser schwächer ist, als der Aequatorialstrom, und den Himmel heiter erhält, also der Sonne eine stärkere Einwirkung gestattet. Es zeigt sich die lokale Einwirkung der Sonne besonders auch in dem Faktum, welches mein meteorologischer College, Herr Astronom Lichtenberger, und ich durchschnittlich bei heiterm Himmel beobachteten, dass die Windfahne in 24 Stunden eine ganze Umdrehung macht. Nach Sonnenuntergang geht die Windfahne Abends nach Osten, weil wir nach Westen Luft abgeben müssen wegen des dort allmählig eintretenden aufsteigenden Luftstromes. Morgens vor Sonnenaufgang findet diese Abgabe nach Osten Statt und die Windfahne geht nach Westen, bis sich denn allmählig nach Sonnenaufgang die normale Strömung aus NO wiederherstellt.

Zur Vergleichung mit Kreuznach habe ich $B-A$ des Luftdrucks in Crefeld berechnet, wo derselbe weniger regelmässig zu sein scheint als hier. Die Differenzen der 8 genannten Jahre sind (nach der Bezeichnung in den Uebersichten): 16, 18, 15, 13, 19, 18, 18, 16; und in den 4 Jahreszeiten: in 1: 6,9; 2: 23,9; 3: 18,2; 4: 17,7.

3. Dunstdruck.

Im Jahre geht mit der Wärme auch der Dunstdruck, der hier das Jahresmittel 3''',07 hat; Abweichungen der Jahreszeiten: 1: —1'''19; 2: —0''',53; 3: 1''',17; 4: 0''',16; die Jahreszeiten, welche bei der Wärme unter dem Mittel bleiben, zeigen sich auch hier mit einer negativen Abweichung, und umgekehrt. Der Verlauf im Tage entspricht scheinbar

dieser Harmonie nicht, da $B-A$ in den 4 Jahreszeiten ist: 1: $0''',18$; 2: $0''',14$; 3: $0''',15$; 4: $0''',40$. Warum, kann man fragen, sind hier diese Differenzen in den 3 ersten Jahreszeiten fast dieselben, und warum überwiegt der Herbst so bedeutend die andern? Was die erste Frage betrifft, so muss man bedenken, dass die Wasserdämpfe einen Theil des Luftdrucks bilden und dieser stets das Bestreben zeigt, das Gleichgewicht zu erhalten. Wenn nun die Summe, der Druck der feuchten Luft, im Allgemeinen dem Wärmegesetze entspricht, so kann der bei Weitem kleinere Summand, der Dunstdruck, in der wärmeren Jahreszeit um so weniger die Tagesperiode zeigen, als die Dämpfe zu der Zeit, wo ihr Druck stärker sein müsste, vermöge des dann herrschenden aufsteigenden Luftstroms mit in die Höhe gehen und oben mit unsern Instrumenten (das trockene und befeuchtete Thermometer) nicht wahrgenommen werden können. Offenbar ist aus diesem Grunde der Dunstdruck im Herbste auch um so viel grösser, weil dann der .tägtich aufsteigende Luftstrom bedeutend nachgelassen.

Die grösste Beständigkeit beim Dunstdruck zeigt die Differenz $C-M$ (M = Tagesmittel). Das Abendmittel übersteigt das Tagesmittel nur um $0''',01$, und unter den 8 Jahren haben diese Differenz deren 6. Aber auch diese Beständigkeit geht nicht gleichmässig durch's Jahr, da sie im Winter — $0''',03$, im Frühling $0''',02$, im Sommer $0''',06$ und im Herbste — $0''',01$ ist.

4. Feuchtigkeit.

Der Gang der Feuchtigkeit ist im Allgemeinon, wie bekannt, dem der Wärme entgegengesetzt. Das Mittel aus den 8 Jahren ist hier 75,3; Extreme der 8 Jahresmittel: 72,1 (8. Jahr) und 77,7 (3. und 5. Jahr), also Schwankungen: —3,2 und 2,4. Die Schwankungen der Jahreszeiten um das Jahresmittel betragen in 1: 8,2; 2: —6,7; 3: — 6,2; 4: 4,9. Der Frühling hat der beiden letzten trockenen Sommer ungeachtet noch immer die geringste unter den 4 Jahreszeiten; er ist also hier die beste Zeit zum Bauen und besonders zum Legen der Fussböden. Der Winter ist die feuchteste Jahreszeit, und der Uebergang aus dieser in die trockenste ist denn auch vielleicht der Grund von gewissen Krankheitserscheinungen; besonders mögen sich die Athmungsorgane dabei angegriffen fühlen, wenn sie leidend sind. Nach dem an die Spitze dieser Nummer gestellten Satze wird mit der Differenz der Wärmemittel auch die der Feuchtigkeit steigen und fallen. $A-B$ ist in 1: 9,9; in 2: 26,6; in 3: 28,0; in 4: 19,2; 8jähriges Jahresmittel: 20,9, welches also wieder am nächsten mit dem Herbstmittel stimmt. $C-B$ ist in 1: 6,9; in 2: 19,6; in 3: 22,9; in 4: 15,9, und dies letztere von der Jahresdifferenz 16,4 wieder wenig abweichend. Die Extravaganz der beiden letzten Jahre zeigt sich bei diesen Differenzen wieder, da sie unter allen die grössten sind; die Differenz

$A-C$ ist beim letzten Jahre die grösste von allen 8 einzelnen Jahren. Von den Quotienten scheint $\frac{A}{C}$ am meisten constant zu sein, da er unter den 8 Jahren und 4 Jahreszeiten um das Mittel 1,06 nur 0,02 schwankt. Die Quotienten $\frac{A}{B}$ und $\frac{A-B}{C-B}$ sind zwar in den einzelnen Jahren noch ziemlich constant, da beim ersten ein Schwanken um das Mittel 1,34 von höchstens 0,07, beim 2. um sein Mittel von höchstens 0,05 vorkommt; aber die Jahreszeiten zeigen ein Schwanken von 0,12 und 0,23 vom Mittel. Der Quotient $\frac{A}{C}$ scheint sogar für verschiedene Oerter ziemlich constant zu sein, da er im Jahre 1846 in Brüssel 1,05 und 1847 daselbst 1,04 (hier 1,06) beträgt. Auch $\frac{A}{B}$ stimmt in Brüssel nahe mit Kreuznach, da er im Mittel der 2 Jahre 1,29 (hier 1,34) ist. $\frac{A-B}{B-C}$ ist in Brüssel im Mittel der 2 Jahre 1,25 (hier 1,28). Dagegen zeigen die Quotienten $\frac{A-B}{C-B}$, $\frac{A-B}{A-C}$ und $\frac{A-B}{C-M}$ ein eigenthümliches Verhalten in Bezug auf die Jahreszeiten, indem in Rücksicht auf sie eine ziemlich nahe Uebereinstimmung sich zeigt zwischen Winter und Frühling einerseits, sowie zwischen Sommer und Herbst andererseits, wogegen beide Gruppen untereinander bedeutend differiren.

5. Himmelsbedeckung.

Die Himmelsbedeckung ist hier im Mittel 6,13. In den meisten Jahren ist sie zwischen 6 und 7, in keinem über 7, nur die beiden letzten gehen unter 6. Im Jahre ist ihr Gang im Allgemeinen der Wärme entgegengesetzt; die Mittel der Jahreszeiten sind in 1: 7,31; 2: 5,85; 3: 5,11; 4: 6,26, wo also nur der Frühling eine Ausnahme macht, wogegen der Herbst wieder nahe mit dem Jahre stimmt. Die beiden letzten Jahre weichen hier am meisten im Sommer ab; im Jahre 7 war das Sommermittel 3,40, im 8. Jahre: 4,47. Im täglichen Gange zeigt sich ein Gegensatz mit dem jährlichen, denn die 8jährigen Mittel sind von *A:* 6,52, von *B:* 6,64, von *C:* 5,24. Der Abend hat also die geringste Himmelsbedeckung, wohl desswegen, weil die bei Tage aufgestiegene warme Luft oben aufräumt und nicht so schnell erkaltet nach Sonnenaufgang als die untere.

6. Winde.

Ueber die Windstärke ist beim Luftdrucke das Nöthige gesagt. Nehmen wir die *O, NO und SO als* zum Polarstrom gehörig, die entgegen-

gesetzten als zum Aequatorialstrom, so nehmen beide Hauptströmungen über 92% sämmtlicher Winde ein, nämlich den Polarstrom 36,7, der entgegengesetzte 55,4. Die beiden letzten Jahre zeichneten sich aus durch die meisten N und W. Das Vorherrschen des Polarstroms zeigte sich besonders in der wärmeren Jahreszeit, wo er heitern Himmel und höhere Wärme verleiht, im Winter dagegen Kälte.

7. Hydrometeore.

Das Mittel der Regenhöhe beträgt hier nach den 6 ersten Jahren 241''',25, nach allen 8 Jahren 215''',16. Jm Jahre 7 betrug sie nur 122''',01, und im Jahre 8: 151''',76. Die Zahl der Regentage war in den beiden letzten Jahren nur 117 und 102; im Mittel der 6 vorhergenden aber 145.

Es hat sich aus den Beobachtungen in Mannheim, Frankfurt a. M. und Kreuznach herausgestellt, dass die Gegend zwischen dem Hundsrück, Taunus, Odenwald und der Haardt in Deutschland am wenigsten Regen hat. Als ich vor 21 Jahren in die Gegend zog, fand ich fast in jedem Garten einen Brunnen zum Begiessen vor. Der Grund davon ist mir erst durch meine Beobachtungen klar geworden.

8. Wolkenform.

Der *Cumulus* und *Stratus* bilden direkte Gegensätze nicht bloss in ihrer Erscheinungsform, sondern auch in der Zeit ihres Erscheinens, da ersterer dem Sommer und dem Tage, also der Zeit angehört, wo die Temperatur an der Erdoberfläche am schnellsten beim Uebergange von einer Strecke zur andern wechselt*), letzterer dem Winter und der Nacht. Zwischen beiden steht der *Cumulo-stratus*, hier unter allen die häufigste Wolkenform. Diese 3 bilden beinahe $\frac{6}{7}$ sämmtlicher Wolken und stehen am niedrigsten, wenn man den *Nimbus* ausnimmt, der am seltensten ist. Das Uebrige Siebentel theilt sich zwischen den 3 hohen Formen *Cirrus*, *Cirrostatus* und *Cirrocumulus*, welche auch mehr Abends und Morgens erscheinen. Die beiden letzten Jahre zeichneten sich aus durch viele Formen dieser Klasse.

9. Luft-Elektricität.

Beobachtungen dieser Art werden im Königl. Preuss. Beobachtungs. system nur hier gemacht mit neuen, sehr genauen und vom Verfasser selbst construirten Apparaten **).

---

*) Und nach Dove ist ja ein *Cumulus* nur das atmosphärische Bild einer kalten Endstrecke.

** Das Verfahren ist beschrieben in meiner Abhandlung über Luft-Elektricität in Poggendorff's Ann., Bd. 89, und beurtheilt von Hrn. Prof. Hankel in seiner Schrift über Bestimmung der Luft-Elektricität nach absolutem Maasse.

Der Verf.

Der Gang der Luft-Elektricität ist dem Gange der Wärme entgegen; sie geht also mit der Feuchtigkeit. Ihr Jahresmittel aus 6 bis 7 jährigen Beocachtungen ist 146,8. Von diesem Mittel weichen die der beiden letzten Jahre, welche in die ganze Reihe mit aufgenommen sind, bedeutend ab, da ihre beiden Mittel nur 126,4 und 126,2 betragen. Der Monat Mai hat das niedrigste Mittel, von wo aus nach den beiden Enden des Jahres hin ein ziemlich regelmässiges Steigen stattfindet, nach vorn aber stärker; da der Januar das höchste Mittel hat, welches beinahe das Doppelte des Mai beträgt. Am meisten bleiben sich gleich die Morgenmittel, am wenigsten die Nachmittagsmittel, da das kleinste vom Mai sich zum grössten vom Januar beinahe wie 1 zu 3 verhält, das kleinste *A* zum grössten *A* dagegen beinahe wie 2 zu 3. Näheres über das Zusammengehen der Feuchtigkeit und der Luft-Elektricität werde ich in einer besondern Arbeit später mittheilen.

Nachschrift.

Im vorstehenden Aufsatze ist gezeigt worden, dass das Dove'sche Princip vom Zusammenhange der Witterungserscheinungen nicht bloss im Grossen und Ganzen gilt, dass auch die Wärme-Erscheinungen es sind, welche die sämmtlichen meteorologischen Phänomene eines und desselben Ortes untereinander verbinden. Vor ein Paar Tagen fand ich zufällig, dass dies Princip noch viel weiter reicht.

Ich wollte wissen, wenn mein Barometer, welches eben von Berlin reparirt zurückgekommen war, angefangen hatte, falsch zu gehen. Deshalb berechnete ich die monatlichen Barometer-Differenzen der letzten 5 Jahre zwischen Kreuznach einerseits, und Trier, Boppard, Neunkirchen und Frankfurt andererseits. Die letzteren Oerter sind die Kreuznach nächstgelegenen 4 Stationen des Preuss. Beobachtungssystems. Der Berechnung wurden zu Grunde gelegt, die in den monatlichen Uebersichten des Königl. meteorologischen Instituts enthaltenen Monatsmittel. Es zeigten die Differenzen zwischen Kreuznach und Boppard eine Eigenthümlichkeit, welche mir schon beim Niederschreiben auffiel; sie sind im Sommer bedeutend grösser, als im Winter. Das Mittel der 5 Jahre ist vom Winter pro Monat: $0''',90$; das vom Sommer: $1''',35$. Ich suchte und fand den Grund davon bald in den Wärme-Differenzen beider Oerter; denn diese sind im Winter: — $4^0,43$; im Sommer $0^0,96$. Steigt also im Sommer in Kreuznach das Thermometer bis beinahe 1^0 über dem Stande, den es gleichzeitig in Boppard hat, so sinkt das Barometer so viel, dass es anderthalb Mal so viel tiefer steht, als in Boppard zur Zeit des Winters. Ein ähnliches Verhalten zeigen Kreuznach und Trier, nur nicht so auffallend. In Trier steht nach denselben 5 Jahren das Ther-

mometer im Winter 0°,29 höher, als in Kreuznach; hier aber im Sommer 0°,47 höher, als in Trier. Dagegen steht im Winter in Kreuznach das Barometer 1‴,25 höher, als in Trier; im Sommer aber nur 1‴. Der höhere Termometerstand hier im Sommer erniedrigt also ebenfalls den relativen Barometerstand.

Doch die Consequenz des Dove'schen Princips geht noch weiter; sie zeigt sich auch in kleinen Perioden noch, und im Gegensatze verschiedenartiger Perioden. Ich habe die 5jährige Periode in zwei kleinere, eine kühlere und eine wärmere getheilt; zur ersten sind die Jahre 1855 und 1856 gerechnet, zur zweiten die 3 folgenden. Ich will die Zahlen zur Erleichterung der Uebersicht in einer Tabelle zusammenstellen. A = Kreuznach, B = Trier, C = Boppard.

	Barometer-Diffenenzen.		Thermometer-Differenzen.	
	1. Periode.	2. Periode.	1. Periode.	2. Periode.
	$A-B$	$A-B$	$A-B$	$A-B$
Winter:	1‴,29	1‴,22	— 0°,32	— 0°,26
Sommer:	1‴,04	0‴,98	0°,25	0°,62.
	$C-A$	$C-A$	$A-C$	$A-C$
Winter:	0‴,97	0‴,86	— 0°,40	— 0°,48
Sommer:	1‴,16	1‴,48	0°,62	1°,18.

Beide kleinere Perioden zeigen also Dasselbe, was oben schon von der ganzen Periode erörtert worden; und in der Periode (der zweiten kleinern), in welcher im Sommer die Wärme höher steht, sinkt an dem betreffenden Orte (Kreuznach) auch das Barometer, und umgekehrt.

Boppard liegt, wie bekannt, etwa 6 Meilen von hier in der Richtung nach Coblenz, 1½ Meilen oberhalb Coblenz.

Kleinere Mittheilungen.

I. Neue Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Die Auflösung der reciproken biquadratischen Gleichung

1) $$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \alpha\xi + 1 = 0$$

ist bekanntlich sehr leicht und reducirt sich auf die Behandlung der beiden quadratischen Gleichungen

2) $$\eta^2 + \alpha\eta + \beta - 2 = 0, \quad \xi + \frac{1}{\xi} = \eta;$$

angesichts dieser Thatsache liegt gewiss der Gedanke nicht fern, die allgemeine biquadratische Gleichung

3) $$x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

dadurch aufzulösen, dass man sie in eine reciproke Gleichung umwandelt. Wie einfach sich diess ausführen lässt, wird man gleich sehen.

Zur Transformation von No. 3) benutze ich die lineare Substitution

4) $$x = q\xi + r,$$

wo ξ die neue Unbekannte, q und r noch zu bestimmende Grössen bedeuten; diess giebt folgende Gleichung

5) $$\xi^4 + \frac{4r + a}{q}\xi^3 + \frac{6r^2 + 3ar + b}{q^2}\xi^2 + \frac{4r^3 + 3ar^2 + 2br + c}{q^3}\xi + \frac{r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d}{q^4} = 0$$

oder kurz

6) $$\xi^4 + \alpha\xi^3 + \beta\xi^2 + \gamma\xi + \delta = 0.$$

Zur reciproken Form gehören die beiden Bedingungen $\delta = 1$ und $\gamma = \alpha$, d. i.:

7) $$q^4 = r^4 + ar^3 + br^2 + cr + d,$$

8) $$(4r + a)q^2 = 4r^3 + 3ar^2 + 2br + c,$$

mittelst deren q und r zu bestimmen sind. Durch Elimination von q erhält man für r die Gleichung

$$(4r+a)^2(r^4+ar^3+br^2+cr+d)=(4r^3+3ar^2+2br+c)^2,$$

welche vom sechsten Grade zu sein scheint; bei wirklicher Ausrechnung heben sich aber die mit r^6, r^5, r^4 versehenen Glieder, und es bleibt nur die cubische Gleichung

$$9)\qquad \left.\begin{array}{l}(a^3-4ab+8c)r^3+(a^2b+2ac-4b^2+16d)r^2\\ +(a^2c+8ad-4bc)r+a^2d-c^2\end{array}\right\}=0.$$

Hat man daraus einen reellen Werth für r gefunden, so bestimmt man q nach No. 7) nämlich

$$10)\qquad q=\sqrt[4]{r^4+ar^3+br^2+cr+d};$$

ferner berechnet man die Coefficienten

$$11)\qquad \alpha=\frac{4r+a}{q},\quad \beta=\frac{6r^2+3ar+b}{q^2}$$

und hat nun für ξ die reciproke Gleichung

$$\xi^4+\alpha\xi^3+\beta\xi^2+\alpha\xi+1=0,$$

nach deren Auflösung x mittelst der Formel 4) gefunden wird.

Als Beispiel diene die Gleichung

$$x^4-10x^3+33x^2-46x+20=0.$$

Die cubische Gleichung wird in diesem Falle

$$12r^3-46r^2+32r+29=0$$

und hat als einzige reelle Wurzel

$$r=-\tfrac{1}{2}.$$

Die Formeln 10) und 11) geben weiter

$$q=\frac{\sqrt{29}}{2},\quad \alpha=-\frac{24}{\sqrt{29}},\quad \beta=\frac{198}{29},$$

mithin lautet die entsprechende reciproke Gleichung

$$\xi^4-\frac{24}{\sqrt{29}}\xi^3+\frac{198}{29}\xi^2-\frac{24}{\sqrt{29}}\xi+1=0.$$

Ersetzt man sie wie in No. 2) durch die beiden quadratischen Gleichungen

$$\eta^2-\frac{24}{\sqrt{29}}\eta+\frac{140}{29}=0,\quad \xi+\frac{1}{\xi}=\eta,$$

so erhält man der Reihe nach

$$\eta=\frac{12\pm2}{\sqrt{29}},$$

$$\xi=\frac{7\pm2\sqrt{5}}{\sqrt{29}},\quad \xi=\frac{5\pm2\sqrt{-1}}{\sqrt{29}},\quad x=\frac{\sqrt{29}}{2}\xi-\tfrac{1}{2},$$

oder endlich

$$x=3\pm\sqrt{5},\quad x=2\pm\sqrt{-1}.$$

Weit einfacher gestalten sich die allgemeinen Formeln, wenn man von der gewöhnlichen Annahme $a = 0$ ausgeht. Man hat jetzt statt No. 9)

$$8cr^3 - 4(b^2 - 4d)r^2 - 4bcr - c^2 = 0;$$

für

$$r = \frac{c}{2s}$$

wird diese Gleichung zur folgenden

$$s^3 + 2bs^2 + (b^2 - 4d)s - c^2 = 0.$$

welche mit Euler's Resolvente identisch ist.

Die vorstehende Auflösung kommt der Eulerschen ($x = u + v + w$) an Eleganz freilich nicht gleich, dagegen beruht sie auf einem einfachen heuristischen Grundgedanken, und die nöthige Rechnung verläuft, so zu sagen, von selber, ohne den geringsten Kunstgriff. Vielleicht empfiehlt sich gerade dadurch mein Verfahren dem Unterrichte. In wissenschaftlicher Beziehung würden übrigens noch einige Ergänzungen nöthig sein. Da nämlich die cubische Gleichung drei Werthe für r liefert und jeder derselben schon zu den vier Wurzeln der biquadratischen Gleichung führt, so erhält man eigentlich zwölf Werthe für x; man weiss allerdings *a priori*, dass je drei derselben gleich sein müssen, kann aber verlangen, dass diese Gleichheit *a posteriori* nachgewiesen werde, wobei vielleicht auf die vier verschiedenen Werthe zu achten ist, welche die in No. 10) vorkommende vierte Wurzel besitzt. Ferner lässt sich erwarten, dass im Falle $a = 0$ die gegebene Auflösung in nahem Zusammenhange mit der Euler'schen steht, und es wäre daher zu untersuchen, ob nicht die eine aus der anderen hergeleitet werden könnte. Vielleicht darf ich mir erlauben, die Leser der Zeitschr. zu einer derartigen Untersuchung aufzufordern, da ich durch andere Arbeiten an der weiteren Verfolgung des Gegenstandes behindert bin.

SCHLÖMILCH.

II. Anwendung der oscillirenden Kettenbrüche zur gleichzeitigen Bestimmung zweier Wurzelwerthe einer Gleichung, von Dr. LUDWIG MATTHIESSEN in Jever.

Aus der Theorie der unendlichen Kettenbrüche ist bekannt, dass die Partialwerthe gerader und ungerader Ordnung jede für sich irgend einer Gränze sich nähern oder nicht, also

$$Lim \frac{p_{2n}}{q_{2n}} = k; \quad Lim \frac{p_{2n+1}}{q_{2n+1}} = k_1; \quad Lim \frac{p_n}{q_n} = \text{unbestimmt}.$$

Sind die beiden Gränzwerthe k und k_1 identisch und zugleich bestimmt, so ist der Kettenbruch convergent; oscillirend aber oder unbestimmt, wenn das Gegentheil stattfindet. Die oscillirenden Kettenbrüche mit zwei *bestimmten Gränzwerthen* sind nicht zu verwechseln mit

solchen, die überhaupt gar keinen angebbaren reellen Werth zur Gränze haben; Beispiele dieser drei Arten mögen hier folgen:

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{4}{5 + \cfrac{9}{7 + \dots \text{ in inf.}}}}}$$

Näherungswerthe:

$$1, \ \frac{3}{4}, \ \frac{19}{24} \ \dots\dots$$

$$\left.\begin{matrix} +1 \\ -3 \end{matrix}\right\} = \cfrac{6}{7 - \cfrac{14}{1 + \cfrac{650}{36 + \cfrac{1372}{1 + \cfrac{135218}{1296 + \dots \text{ in inf.}}}}}}$$

Näherungswerthe:

$$\frac{6}{7}, \ -\frac{6}{7}, \ \frac{294}{307}, \ -\frac{882}{379}, \ \frac{417318}{418579}, \ \dots\dots$$

$$1 - \cfrac{2}{1 - \cfrac{1}{1 - \cfrac{1}{1 - \dots \text{ in inf.}}}}$$

Näherungswerthe:

$$1, \ -1, \ -\infty, \ 1, \ -\infty, \ \dots\dots$$

Es kann sogar der Fall eintreten, dass nur der Gränzwerth der einen oder der anderen Ordnung unbestimmt ist. Die oscillirenden Kettenbrüche bieten oft eine sehr zweckmässige Methode zur Auflösung der Gleichungen dar, namentlich da wo es darauf ankommt, den Wurzelwerth auf möglichst viele Decimalstellen genau zu berechnen. Wie man sonst eine Wurzel der quadratischen Gleichungen durch Verwandlung in einen Kettenbruch findet, ist bekannt genug. Mit grösserem Vortheil kann man sich hier des aufsteigenden Kettenbruchs bedienen, indem man setzt

$$x = \frac{b - x^2}{a} = \cfrac{b - \cfrac{b_1 + \cfrac{b_2 + \dots\dots}{a_2}}{a_1}}{a}$$

wo a_1 und b_1 die Coefficienten der Glieder der transformirten Gleichung bedeuten, deren Wurzeln die Quadrate der Wurzeln der Stammgleichung sind, a_2 und b_2 die Coefficienten der Glieder derjenigen Gleichung, deren Wurzeln die Biquadrate der Stammgleichung sind u. s. w. also

Stammgleichung: $x^2 + ax - b = 0$

$x_,^2 - (a^2 + 2b)x_, + b^2 = 0, \ (x_, = x^2)$

$x_{,,}^2 - (a_1^2 + 2b_1)x_{,,} + b_1^2 = 0, \ (x_{,,} = x_,^2)$

u. s. w.

Der aufsteigende Kettenbruch entwickelt sich leicht in die unendliche Reihe:

$$x = \frac{b}{a} - \frac{b_1}{a a_1} - \frac{b_2}{a a_1 a_2} - \dots\dots$$

Erstes Beispiel: Sei die aufzulösende Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$, so suche man hierzu die transformirten Gleichungen wie folgt:

Stammgleichung: $x^2 + x - 1 = 0 \quad x_{,,,}^2 - 47x_{,,,} + 1 = 0$

$x_,^2 - 3x_, + 1 = 0 \quad x_{IV}^2 - 2207x_{IV} + 1 = 0$

$x_{,,}^2 - 7x_{,,} + 1 = 0$ u. s. w.

so ist eine Wurzel

$$x = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.3} - \frac{1}{1.3.7} - \frac{1}{1.3.7.47} - \frac{1}{1.3.7.47.2207} - \frac{1}{1.3.7.47.2207.4870847} - \dots$$

$$= 0{,}6190339887507 48 \dots \text{ (14 Stellen genauer).}$$

Bricht man diese Reihe erst hinter dem zwölften Gliede ab, so liefert sie schon den Werth der Wurzel auf ungefähr 1000 Decimalen genau. Mittelst derselben Methode wird man nun auch leicht im Stande sein, irrationale Quadratwurzeln in eine stark convergirende Reihe zu verwandeln.

Sei $\sqrt{29} = \sqrt{25 + 4} = 5 + x$, so ist die Stammgleichung $x^2 + 10x - 4 = 0$ aufzulösen; die transformirten sind

$$x_,^2 - 108x_, + 16 = 0,$$
$$x_{,,}^2 - 11632x_{,,} + 256 = 0,$$
$$x_{,,,}^2 - 135302912x_{,,,} + 65536 = 0,$$

und demgemäss wird $x = \frac{2}{5} - \frac{2}{5.27} - \frac{2}{5.27.727} - \dots = 0{,}38516480 \dots$

Diese Methode liefert stets den kleinsten Wurzelwerth. Man kann sich derselben nun auch zur Auffindung der Wurzeln einer cubischen Gleichung bedienen. Man wählt hier den absteigenden Kettenbruch, welcher zwei Werthe der Unbekannten, den kleinsten und grössten, zugleich liefert. Sei gegeben

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0,$$

so hat diese Gleichung bekanntlich entweder drei oder nur eine reelle Wurzel. Jenachdem haben auch die Partialwerthe beiderlei Ordnung entweder zwei bestimmte, oder nur einen bestimmten und einen unbestimmten Gränzwerth.

Erstes Verfahren: Setze

$$x = \alpha + \frac{\beta}{\gamma + x^2}, \text{ also } x^3 - \alpha x^2 + \gamma x - (\beta + \alpha\gamma) = 0.$$

Bedeuten wiederum $\alpha_,, \beta_,, \gamma_,$ in der transformirten Gleichung dasselbe, was α, β, γ in der Stammgleichung, so ist offenbar

$$x^2 = \alpha_, + \frac{\beta_,}{\gamma_, + x^4}, \quad x^4 = \alpha_{,,} + \frac{\beta_{,,}}{\gamma_{,,} + x^8} \text{ u. s. w.},$$

also
$$x = \alpha + \cfrac{\beta}{\gamma + \alpha_, + \cfrac{\beta_,}{\gamma_, + \alpha_{,,} + \cfrac{\beta_{,,}}{\gamma_{,,} + \alpha_{,,,} + \dots}}}$$

Betrachtet man α, $\alpha_,$, $\alpha_{,,}$ ... als besondere Glieder des Kettenbruches, so sind die Partialwerthe gerader Ordnung Näherungswerthe des kleinsten Wurzelwerthes der gegebenen Gleichung, in so fern man ansieht als

ersten Partialwerth: α

zweiten " $\alpha + \frac{\beta}{\gamma}$

dritten " $\alpha + \frac{\beta}{\gamma + \alpha_,}$

u. s. w.

Erstes Beispiel: $x^3 - 2100x - 24000 = 0$.

Setze $x = 10y$ und damit der Kettenbruch stark convergirt $y = 5 + z$, so ist

$$z^3 + 15z^2 + 54z - 4 = 0, \qquad \alpha = -15, \quad \alpha_, = 117, \quad \alpha_{,,} = 7617$$
$$z^6 - 117z^4 + 3036z - 16 = 0, \qquad \beta = 814, \quad \beta_, = -355196,$$
$$z^{12} - 7617z^8 + 9213552z^4 - 256 = 0, \qquad \gamma = 54, \quad \gamma_, = 3036,$$

Alsdann ist

$$z = -15 + \cfrac{814}{54 + 117 - \cfrac{355196}{3063 + 7617}} \, .$$

Näherungswerthe:

-15,	
$-10,2398$ ..	0,074074 ..
$-9,1868$ ..	0,072603 ..

Die beiden letzten Näherungswerthe geben

$y = 5,072602$ .. $x = 50,72603$ ..

$y_, = -4,1868$ .. $x_, = -41,868$ (wahrer Werth: $-38,40727$ ..).

Zweites Beispiel: $x^3 - 2x - 5 = 0$.

Setze $x = y + 2$, so resultirt

$$y^3 + 6y^2 + 10y - 1 = 0, \qquad \alpha = -6, \quad \alpha_, = 16, \quad \alpha_{,,} = 32,$$
$$y^6 - 16y^4 + 112y^2 - 1 = 0, \qquad \beta = 61, \quad \beta_, = -1791, \quad \beta_{,,} = -400383,$$
$$y^{12} - 32y^8 + 12512y^4 - 1 = 0, \qquad \gamma = 10, \quad \gamma_, = 112, \quad \gamma_{,,} = 12512$$
$$y^{24} + 24000y^{16} + \ldots.$$

Die Gleichung hat also nur einen reellen Werth, nämlich

$$y = -6 + \cfrac{61}{10 + 16 - \cfrac{1791}{112 + 32 - \cfrac{400383}{12512 + y^8}}} \qquad y < 1.$$

Näherungswerthe:

-6	0,1000 ..
$-3,6539$ ..	0,09455(8) ..
$-1,502$ ...	0,09455148154(3746959 ..)

(*w. W.* $-3,0473 \pm 1,1252\sqrt{-1}$).

Der letzte reelle Partialwerth ist bis auf 12 Decimalstellen genau, es lässt sich aber eine leichte Correction anbringen, indem man erwägt, dass der wahre Werth der Wurzel ist:

$$y = m + \cfrac{a}{b - \cfrac{c}{d - \cfrac{e}{f + y^8}}} = m + \frac{(f + y^8)\,ad - ae}{(f + y^8)(bd - c) - be}$$

der letzte Partialwerth nur die Grösse y^8 nicht enthält.

Mit Anwendung des Maclaurinschen Satzes

$$f(x) = f(0) + f'(0)\,x + f''(0)\,\frac{x^2}{1.2} + \ldots$$

erhält man leicht

$$y = \left\{m + \frac{fad - ae}{f(bd - c) - be}\right\} - \frac{ace\,.\,y^8}{\{f(bd - c) - be\}^2} + \frac{ace(bd - c)y^{16}}{\{f(bd - c) - be\}^3} - \ldots$$

Substituirt man in der rechten Seite dieser Gleichung den oben gefundenen Werth für y, so wird der Werth des zweiten Gliedes gleich 0,000000000001420303, welche Correction die Wurzel bis auf die 18te Decimale genau ergibt, nämlich

$$y = 0,094551481542326656\ldots$$

Zweites Verfahren: Man setze

$$x = \cfrac{\alpha}{1 + \cfrac{\beta}{\gamma + x^2}} \qquad \text{also } x^3 - \alpha x^2 + (\beta + \gamma)\,x - \alpha\gamma = 0.$$

Sei nun die gegebene Gleichung $x^3 - mx^2 + nx - p = 0$ und werde dieselbe transformirt, so ist nach den früher angenommenen Bezeichnungen

$$\begin{array}{ll} \alpha = m, & \alpha_1 = m^2 - 2n \\ \alpha\gamma = p, & \alpha_1\gamma_1 = p^2 \\ \alpha\beta = mn - p, & \alpha_1\beta_1 = (m^2 - 2n)(n^2 - 2mp) - p^2 \end{array}$$

und

$$x = \cfrac{\alpha}{1 + \cfrac{\alpha\beta}{\alpha\gamma + \cfrac{\alpha\alpha_1}{1 + \cfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\gamma_1 + \cfrac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \cdots}}}}}$$

Ist $\alpha = m = 0$, so ist diese Methode unbrauchbar, man kann aber dann beide Methoden mit einander verbinden, am bequemsten bleibt aber immer die erste, also etwa

$$x = \alpha + \cfrac{\beta}{\gamma + \cfrac{\alpha_1}{1 + \cfrac{\alpha_1\beta_1}{\alpha_1\gamma_1 + \cfrac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \cdots}}}}$$

Ein Beispiel möge dies Verfahren erläutern. Ist die gegebene Gleichung $x^3 - 2x - 5 = 0$, und $x = y + 2$, so hat man wiederum

$$y^3 + 6y^2 + 10y - 1 = 0, \qquad \alpha = -6, \qquad \alpha_{,} = 16$$
$$y^6 - 16y^4 + 112y - 1 = 0, \qquad \alpha\gamma = 1, \qquad \alpha_{,}\gamma_{,} = 1$$
u. s. w. $\qquad \alpha\beta = -61, \qquad \alpha_{,}\beta_{,} = 1791.$

Näherungswerthe sind:

− 6	0,10000
− 1,6764 . .	0,09455(8) . .
− 1,996 . .	

Die negativen Werthe nähern sich einer bestimmten Gränze nicht, und es gibt demnach nur einen reellen Wurzelwerth.

III. Beispiel einer Cubatur und Quadratur nach geometrischen Postulaten. Von Dr. R. Hoppe.

Ist in den Normalkreis einer Kugel ein beliebiges Viereck, in das Segment über jeder Seite ein Kreis, und über diesem Kreise als Basis ein gerader Cylinder beschrieben, der die Kugelfläche nach beiden Seiten hin schneidet, so ist das Stück, welches die sämmtlichen Cylinder von der Kugel übrig lassen, sowie dessen sphärische und cylindrische Oberfläche, in geradlinigen, ebenflächigen Figuren darstellbar.

Sei C_1 der Inhalt, A_1 die sphärische, B_1 die cylindrische Oberfläche eines der genannten, von der Kugelfläche begrenzten Cylinder, r sein Radius, a der Abstand seiner Axe vom Kugelcentrum, $a + r = 1$ der Kugelradius, φ das Azimut, ψ die Höhe eines Punktes der Kugelfläche, ersteres anfangend vom Berührungspunkt, letztere vom Normalkreis; ferner χ das Azimut von der Cylinderaxe aus: dann ist, wie eine Betrachtung der Figur ergiebt,

$$\tfrac{1}{4} A_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \cos\psi \, d\psi,$$

$$\tfrac{1}{4} B_1 = r \int_0^{\pi} \sin\psi \, d\chi,$$

$$\tfrac{1}{4} C_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi \sin^2\psi \cos\psi \, d\psi.$$

In dem Intervall von $\chi = \pi$ bis $\psi = \frac{\pi}{2}$ ist φ constant $= 0$ oder $= \pi$ zu denken, je nachdem das Kugelcentrum ausserhalb oder innerhalb

des Cylinders liegt. Im ersten Falle erhält man nach partieller Integration

$$\tfrac{1}{4}A_1 = -\int \sin\psi\, d\varphi,$$
$$\tfrac{1}{4}B_1 = r\int \sin\psi\, d\chi,$$
$$\tfrac{1}{4}C_1 = -\int \sin^2\psi\, d\varphi,$$

sämmtliche Integrale von $\chi = 0$ bis $\chi = \pi$ genommen. Im zweiten Falle ist zum ersten Integrale noch π, zum dritten noch $\frac{1}{2}\pi$ zu addiren.

Die Relationen zwischen φ, ψ, χ in der Durchschnittslinie der beiden Flächen sind

$$\cos\varphi\cos\psi = a + r\cos\chi,$$
$$\sin\varphi\cos\psi = r\sin\chi.$$

Setzt man gemäss der Relation $a + r = 1$

$$\sqrt{a} = \cos\tfrac{1}{2}\mu;\quad \sqrt{r} = \sin\tfrac{1}{2}\mu$$
$$tg\,\omega = tg\,\mu\,\cos\tfrac{1}{2}\chi \tag{1}$$

so wird man leicht folgende Formeln ableiten:

$$\sin^2\psi = \sin^2\mu\,\sin^2\tfrac{1}{2}\chi,$$
$$\sin\psi\, d\chi = -\frac{2\cos\mu}{\cos^2\omega}\, d\omega,$$
$$\sin\psi\, d\varphi = \left(1 - \frac{\cos\mu}{\cos^2\omega}\right) d\omega.$$

Aus Gleichung (1) ersieht man, dass ω für $\chi = \pi$ verschwindet, und für $\chi = \omega$ (bei stetiger Veränderung von $tg\,\omega$) in μ oder in $\mu - \pi$ übergeht, jenachdem $\mu <$ oder $> \frac{\pi}{2}$ ist, d. h. jenachdem das Kugelcentrum ausserhalb oder innerhalb des Cylinders liegt. Da indess im letztern Falle π als Subtrahend oder Addend zum Integrale hinzukommt, so hat man μ ohne Unterscheidung zur Grenze der ω zu nehmen, und erhält

$$\tfrac{1}{4}A_1 = \int_0^\mu \left(1 - \frac{\cos\mu}{\cos^2\omega}\right) d\omega = \mu - \sin\mu,$$

$$\tfrac{1}{4}B_1 = 2\sin^2\tfrac{1}{2}\mu\cos\mu \int_0^\mu \frac{d\omega}{\cos^2\omega} = (1 - \cos\mu)\sin\mu,$$

$$\tfrac{1}{4}C_1 = \tfrac{1}{2}\int_0^\mu \sin^2\mu\,\sin^2\tfrac{1}{2}\chi\left(1 - \frac{\cos\mu}{\cos^2\omega}\right) d\omega,$$

$$= \tfrac{1}{2}\int_0^\mu (\sin^2\mu - \cos^2\mu\, tg^2\omega)\left(1 - \frac{\cos\mu}{\cos^2\omega}\right) d\omega,$$

$$=\frac{1}{3}\int_0^{\mu}\left(1-\cos\mu\,\frac{\sin^2\mu+\cos\mu}{\cos^2\omega}+\cos^3\mu\,\frac{tg^2\omega}{\cos^2\omega}\right)d\omega,$$

$$=\frac{1}{3}(\mu-\sin\mu\cos\mu)-\frac{2}{3}\sin^3\mu.$$

Hier ist μ der halbe Bogen über einer Vielecksseite. Nach Addition aller Cylinder wird die Summe der μ gleich π.

Ferner ist $\sin\mu$ eine halbe Vielecksseite. Ist $\frac{1}{2}u$ der Umfang des Vielecks, l eine Seite, so ist $\sin\mu=\frac{1}{2}l$, und die Summe der $\sin\varphi=\frac{1}{4}u$.

Endlich ist $\cos\mu$ der Abstand einer Seite vom Mittelpunkte, $\sin\mu\,\cos\mu$ das Dreieck über der Seite, dessen Spitze der Mittelpunkt; daher die Summe der $\sin\mu\,\cos\mu$ der Inhalt des Vielecks $=\frac{1}{2}v$. Folglich

$$\Sigma A_1=4\pi-u;\quad \Sigma B_1=u-2v;\quad \Sigma C_1=\frac{4}{3}\pi-\frac{2}{3}v-\frac{1}{6}\Sigma l^3.$$

Ist nun C der Rest der Kugel nach Abzug sämmtlicher Cylinder, A die sphärische, B die cylindrische Oberfläche des Körpers C, so ist

$$A=u;\quad B=u-2v;\quad C=\frac{2}{3}v+\frac{1}{6}\Sigma l^3.$$

Beschreibt man über dem Vieleck als Basis ein Prisma, dessen Endflächen die Kugel berühren, so ist u dessen seitliche Oberfläche, v sein Inhalt sowie die Summe seiner Endflächen. Das Resultat lässt sich jetzt leicht in Worte fassen.

Degenerirt das Vieleck in 2 aufeinander fallende Sehnen, so verschwindet v, u wird das doppelte Rechteck aus Sehne und Durchmesser. C zerfällt in 2 symmetrische Stücke, die sich in einer Geraden und in 2 Punkten berühren. Jede dieser Hälften ist der neunte Theil des Cubus der Sehne, und sowohl ihre sphärische als cylindrische Oberfläche gleich dem Rechteck aus Sehne und Durchmesser. Aus der Gleichheit beider Flächen folgt beiläufig, dass die gesammte Oberfläche der beiden Cylinderstücke gleich der Kugelfläche ist.

IV. Formeln zur geodätischen Ortsberechnung. Von J. Rogg, Professor am obern Gymnasium zu Ehingen.

Das Problem der geodätischen Ortsberechnung lässt sich ganz elementar behandeln, vorausgesetzt, dass die Dreiecke nicht grösser sind, als die grössten, wie sie bei wirklichen geodätischen Vermessungen vorzukommen pflegen, und dass bei ungewöhnlich grossen Dreieckseiten, d. h. Distanzen von 40 bis 50 Tausend Toisen, auf eine Unsicherheit von wenigen Hunderttheilen einer Bogensecunde nichts ankommt. Das Bestreben, eine noch grössere Genauigkeit zu erreichen, scheint ein überflüssiges zu sein, wenn man bedenkt, dass der geodätische Längen- und Breitenunterschied vom entsprechenden astronomischen Längen- und Breitenunterschied erheblich, zuweilen sogar um einige Sekunden abweicht, und zwar bei Messungen von *ausgezeichneter* Güte und in Gegenden ausgeführt, wo die Schuld sich

nicht auf Ablenkung des Bleiloths durch benachbarte Bergmassen schieben lässt, wie z. B. bei der Preussischen Gradmessung durch Bessel und der Liefländischen durch Struve.

Um abzukürzen bezeichne ich im Folgenden:

mit a und c die beiden Halbachsen der Meridianellipse; die Toise als Einheit angenommen;

- e die Excentricität derselben;
- r den Krümmungshalbmesser im Azimuth $= 90^0$;
- ϱ den Krümmungshalbmesser im Azimuth $= 0$;
- M und N den Quotienten aus $\frac{1}{\varrho \sin 1''}$ und $\frac{1}{r \sin 1''}$, deren Werthe man für die Zone zwischen den Parallelen 45^0 und 55^0 in den dieser Abhandlung angehängten Tafeln findet;
- δ die gegebene lineare Länge einer Dreieckseite, welche A zum Anfangs- und B zum Endpunkt hat;
- x und y die Abscisse und Ordinate des Dreieckpunkts B, auf A als Anfangspunkt bezogen;
- φ und φ' die geographischen Breiten der Positionen A und B;
- β die Breite des Fusspunktes der Ordinate y;
- ω den Längenunterschied zwischen A und B;
- α das Azimuth der Distanz δ im Horizont des Punktes A, von Nord über Ost bis 360^0 gezählt;
- α' das Azimuth der Distanz δ im Horizont von B;
- $\triangle \alpha = (\alpha' - \alpha) - 180^0$ die Konvergenz der Meridiane durch A und B.

Die Rechnung wird geführt mit den von Bessel aus den Breitengradmessungen (Schumachers astronomische Nachrichten No. 438) abgeleiteten Erddimensionen, wonach:

$$a = 3272074{,}_{14} \text{ Toisen und}$$
$$e^2 = 0{,}0006674{,}_{372}$$

ist (ein Werth, welcher von der Ellipse des Herrn Oberst James wenig verschieden ist). Mit diesen Werthen von a und e ergibt sich, wenn man $\frac{1}{2} m e^2 = A$, $\frac{1}{4} m e^4 = B$, $\frac{1}{6} m e^6 = C$ (unter m den Modulus der gemeinen Logarithmen verstanden) und $A \sin^2\varphi + B \sin^4\varphi + C \sin^6\varphi = \Sigma$ setzt:

$$Lg\, r = \Sigma + 6{,}5148235_{\,337} \qquad Lg\, A = 7{,}1611647_{\,316} - 10$$
$$Lg\, \varrho = 3\Sigma + 6{,}5119157_{\,741} \qquad Lg\, B = 4{,}6845451 - 10$$
$$Lg\, M = Cp.Lg\, \varrho + 5{,}3144251_{\,332} \qquad Lg\, C = 2{,}23286 - 10.$$
$$Lg\, N = Cp.Lg\, r + 5{,}3144251_{\,332}$$

Sei z. B. $\varphi = 50^0\, 19'\, 50''$, so findet man: $Lg\, r = 6{,}5157088._2$ und $Lg\, \varrho = 6{,}5145710._1$; $Lg\, N = 8{,}7987163._1$ und $Lg\, M = 8{,}7998540._2$.

1.

Seien AN und BN die Meridiane durch A und B, folglich N der sichtbare Pol des Aequators, so ist Winkel $NAB = \alpha$, $ANB = \omega$, $\alpha' = 360^0 - ABN$, $\varphi = 90^0 - AN$ und $\varphi' = 90^0 - BN$. Das Problem der geodätischen Ortsberechnung kann daher so ausgesprochen werden:

Man soll die Breite und das Azimuth vom Punkt A auf den Punkt B übertragen, und die Längendifferenz zwischen A und B berechnen.

2.

Man ziehe Bb senkrecht auf die Richtung des Meridians durch A, so ist $Ab = x$ und $Bb = y$, folglich:

$$tg\, x = tg\, \delta \,.\, \cos \alpha$$

und

$$\sin y = \sin \delta \,.\, \sin \alpha$$

oder, da x, y und δ kleine Bogen sind:

$$x + \tfrac{1}{3} x^3 = (\delta + \tfrac{1}{3}\delta^3) \cos \alpha,$$
$$y - \tfrac{1}{6} y^3 = (\delta - \tfrac{1}{6}\delta^3) \sin \alpha.$$

Es ist aber sehr nahe $\frac{1}{3} x^3 = \frac{1}{3} \delta^3 \cos^3\alpha$ und $\frac{1}{6} y^3 = \frac{1}{6} \delta^3 \sin^3\alpha$; folglich

$$x = \delta \cos\alpha + \tfrac{1}{3}\delta^3 \cos\alpha \,.\, \sin^2\alpha,$$
$$y = \delta \sin\alpha - \tfrac{1}{6}\delta^3 \sin\alpha \,.\, \cos^2\alpha$$

für den Halbmesser $= 1$. Um x und y in den Sekunden ausgedrückt zu erhalten, muss man die Theilsätze rechts mit $arc\, 1'' = \sin 1''$ dividiren und in den ersten dieser Gleichungen δ mit $\frac{\delta}{\varrho}$, in der zweiten hingegen δ mit $\frac{\delta}{r}$ vertauschen. Man erhält alsdann:

$$x = M\delta \cos\alpha + M\delta \cos\alpha\, (M\delta \sin\alpha)^2 .\, \tfrac{1}{3} \sin^2 1'',$$
$$y = N\delta \sin\alpha - N\delta \sin\alpha\, (N\delta \cos\alpha)^2 .\, \tfrac{1}{6} \sin^2 1''$$

in Sekunden gelesen.

Nun ist offenbar $\beta = \varphi + x$, folglich:

$$\beta = \varphi + M\delta \cos\alpha + M\delta \cos\alpha\, (M\delta \sin\alpha)^2 .\, \tfrac{1}{3} \sin^2 1'',$$

wo $Lg\, M$ aus der Tafel des Anhangs entlehnt wird, und zwar mit dem Argument $\varphi + \frac{1}{2} M\delta \cos\alpha$. Hierbei kommt es auf ein paar Sekunden mehr oder weniger nicht an, wesswegen man vorläuffg $Lg\, M$ mit dem Argument φ aushebt, $M\delta \cos\alpha$ mit fünfzifrigen Logarithmen berechnet. — Für $\delta = 54374^{r}$, $\varphi = 51^0\, 48'\, 2''$ und $\alpha = 185^0\, 42'\, 22''$ findet man z. B. $M\delta \cos\alpha = -3412''$, und somit $\varphi + \frac{1}{2} M\delta \cos\alpha = 51^0\, 19'\, 36''$.

3.

Derjenige grösste Kreis, von welchem y ein Bogen ist, durchschneidet den Aequator im Ost- und Westpunkt; es liegt folglich B dem Aequator näher als b, d. h. es ist $\beta > \varphi'$. Bezeichnet man diesen kleinen Unterschied mit u, setzt also

$$\varphi' = \beta - u,$$

so wird

$$\sin\varphi' = \sin\beta - u \,.\, \cos\beta.$$

Aber andererseits

$$\sin\varphi' = \cos y \,.\, \sin\beta;$$

folglich

$$\sin\beta - u\cos\beta = \cos y \,.\, \sin\beta.$$

Diesen Ausdruck mit $\cos\beta$ dividirt, so kommt, wegen $\cos y = 1 - \frac{1}{2}y^2$:

$$u = \tfrac{1}{2}y^2 \,.\, tg\,\beta$$

für den Halbmesser $= 1$; oder

$$u = MN \,.\, y^2 \,.\, tg\,\beta \,.\, \tfrac{1}{2}\sin 1''$$

in Sekunden gelesen.

Da aber u stets ein Bogen ist, welcher selten eine Minute erreicht, so darf man, ohne von der Genauigkeit etwas merkliches aufzuopfern, y mit $\delta\sin\alpha$ vertauschen; also:

$$\varphi' = \beta - MN\delta^2\sin^2\alpha \,.\, tg\,\beta \,.\, \tfrac{1}{2}\sin 1''.$$

4.

Der Längenunterschied $\omega = ANB$ ergiebt sich aus der Gleichung:

$$tg\,\omega = tg\,y \,.\, \sec\beta$$

oder

$$\omega + \tfrac{1}{3}\omega^3 = y \,.\, \sec\beta + \tfrac{1}{3}y^3 \,.\, \sec\beta.$$

Es ist aber $y = N\delta\sin\alpha - N\delta\sin\alpha\,(N\delta\cos\alpha)^2 \,.\, \frac{1}{6}\sin 1''$, und sehr nahe $\frac{1}{3}y^3 = \frac{1}{3}\delta^3\sin^3\alpha$, folglich:

$$\omega = N\delta\sin\alpha\sec\beta - N\delta\sin\alpha\sec\beta\,(N\delta\cos\alpha)^2 \,.\, \tfrac{1}{6}\sin^2 1''$$
$$- N\delta\sin\alpha\sec\beta\,(N\delta\sin\alpha\,tg\,\beta)^2 \,.\, \tfrac{1}{3}\sin^2 1''.$$

Wegen $\alpha' = 360^0 - B$, $\alpha + 180^0 = A + 180^0$ und $\Delta\alpha = (\alpha' - \alpha) - 180^0$ ist offenbar

$$\Delta\alpha = 180^0 - (A + B);$$

folglich

$$ctg\,\tfrac{1}{2}\omega = \frac{\cos\frac{1}{2}(BN + AN)}{\cos\frac{1}{2}(BN - AN)} \,.\, ctg\,\tfrac{1}{2}\Delta\alpha$$

oder

$$tg\tfrac{1}{2}\Delta\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \,.\, tg\,\tfrac{1}{2}\omega,$$

welches die zuerst von Dalbot (im Jahre 1792) aufgestellte Gleichung ist.

Da aber $\Delta\alpha$ und ω, folglich nur um so mehr $\frac{1}{2}\Delta\alpha$ und $\frac{1}{2}\omega$, kleine Bogen sind, so darf man schreiben:

$$\Delta\alpha = \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \,.\, \omega.$$

5.

Die Endgleichungen der vier vorhergehenden Artikel enthalten die vollständige Auflösung der Aufgabe. Um abzukürzen will ich setzen:

$$\delta \cos\alpha = m \text{ und } \delta \sin\alpha = n$$

und dann gehen die vier Formeln in folgende Ausdrücke über:

$$\beta = \varphi + Mm + Mm \,.\, M^2n^2 \,.\, \tfrac{1}{6}\sin^2 1''$$

$$\varphi' = \beta - MN \,.\, n^2 \operatorname{tg}\beta \,.\, \tfrac{1}{2}\sin 1''$$

$$Nn \,.\, \sec\beta = \omega_0$$

$$\omega = \omega_0 - \omega_0 N^2m^2 \,.\, \tfrac{1}{6}\sin^2 1'' - \omega_0 N^2n^2 \operatorname{tg}^2\beta \,.\, \tfrac{1}{3}\sin^2 1''$$

$$\alpha' = 180^0 + \alpha + \frac{\sin\frac{1}{2}(\varphi + \varphi')}{\cos\frac{1}{2}(\varphi - \varphi')} \,.\, \omega,$$

wo M mit dem Argument $\varphi + \frac{1}{2}\delta\cos\alpha$, N aber mit dem Argument β aus den Tafeln zu entlehnen ist.

Um den Gebrauch dieser Formeln zu erläutern, will ich aus der Hannöverschen Gradmessung die ungewöhnlich grosse Distanz: Brocken-Inselberg ausheben. Nach den Bestimmungen des unsterblichen Gauss ist die Breite des Brockens $= 51^0\,48'\,1''\,9294 = \varphi$, Azimuth Brocken-Inselberg $= 185^0\,42'\,21''\,7699 = \alpha$ und $\delta = 54347^T{}_{,80}$.

Nach Artikel (2) ist das Argument für $M \ldots 51^0\,19'\,36''$. Man hat daher zunächst:

$Lg.\ \cos\alpha = 9{,}9978427_n$	$Lg.\ M \ldots\ldots 8{,}7998544$
$Lg.\ d \ldots = 4{,}7353929$	$Lg.\ m \ldots\ldots 4{,}7332356_n$
$Lg.\ \sin\alpha = 8{,}9974891_n$	$Lg.\ (Mm) \ldots 3{,}5330900_n$
$Lg.\ m \ldots = 4{,}7332356_n$	$Lg.\ n^2 \ldots\ldots 7{,}46576$
$Lg.\ n \ldots = 3{,}7328820_n$	$Lg.\ M^2 \ldots\ldots 7{,}59971$
	$Lg.\ (\frac{1}{6}\sin^2 1'')\ 8{,}89403-20$
	$Lg.\ (\ldots\ldots)\ 7{,}49259_n$

$\varphi \ldots\ldots\ldots\ldots = 51^0\ 48'\ 1''{,}929$
$Mm \ldots\ldots\ldots\ldots = -56\ 52{,}636$
$Mm\,.\,M^2n^2\,.\,\frac{1}{6}\sin^2 1'' = -0{,}003$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ \beta = 50^0\ 51'\ 9''{,}290$

$Lg.\ M \ldots = 8{,}79989$ } $(Arg.\ \beta)$
$Lg.\ N \ldots = 8{,}79873$ }
$Lg.\ n^2 \ldots = 7{,}46576$
$Lg.\ \operatorname{tg}\beta \ldots = 0{,}08935$
$Lg.(\frac{1}{2}\sin 1'') = 4{,}38454-10$
$Lg.\ (\ldots\ldots) = 9{,}53827$

$-MN.\,n^2\operatorname{tg}\beta\,.\,\frac{1}{2}\sin 1'' = -0^0\ 0'\ 0''{,}345$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \beta = 50\ 51\ 9{,}290$

Geodätische Breite des Inselbergs $\varphi' = 50^0\ 51'\ 8''{,}945 \ldots\ldots\ldots\ldots$

$Lg.\, sec\, \beta \ldots = 0{,}1997520$
$Lg.\, N \ldots\ldots = 8{,}7987282$
$Lg.\, n \ldots\ldots = 3{,}7328820_n$
$Lg.\, \omega_0 \ldots\ldots = 2{,}7313622_n$
$Lg.\, N^2 \ldots\ldots = 7{,}59746$
$Lg.\, m^2 \ldots\ldots = 9{,}46647$
$Lg.\, (\frac{1}{6}\, sin^2\, 1'') = 8{,}59300 - 20$
$Lg.\, (\ldots\ldots) = 8{,}38829_n$

$Lg.\, \omega_0 \ldots\ldots = 2{,}73136_n$
$Lg.\, N^2 \ldots\ldots = 7{,}59746$
$Lg.\, n^2 \ldots\ldots = 7{,}46576$
$Lg.\, tg^2\beta \ldots = 0{,}17870$
$Lg.\, (\frac{1}{3}\, sin^2 1'') = 8{,}89403 - 20$
$Lg.\, (\ldots\ldots) = 6{,}86731_n$

$\omega_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = -\, 8'\, 58''719$
$-\, \omega_0\, N^2 m^2 .\, \frac{1}{6} sin^2 1'' \ldots = \;+\; 0{,}024$
$-\, \omega_0\, N^2 n^2 .\, tg^2\beta\, .\, \frac{1}{3}\, sin^2 1'' = \;+\; 0{,}000.7$

Geod. Längenbogen Inselberg-Brocken $\omega = -\, 8'\, 58''695$

Für die Berechnung des zweiten Azimuths hat man zunächst: $\frac{1}{2}(\varphi + \varphi') = 51^0\, 19'\, 35'437$ und $\frac{1}{2}(\varphi - \varphi') = 28'\, 26''492$; folglich:

$Lg.\, sin\, \frac{1}{2}(\varphi + \varphi') \ldots = 9{,}8924951$
$Cp.\, Lg.\, cos\, \frac{1}{2}(\varphi - \varphi') = 0{,}0000149$
$Lg,\, \omega \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 2{,}7313429_n$
$\ldots\ldots\ldots\ldots\, Lg.\, \Delta\alpha = 2{,}6238529_n$
$\Delta\alpha = -\, 420''584$
$= -\, 0^0\;\, 7'\;\, 0''584$
$180^0 + \alpha = \;\; 5\;\; 42\;\; 21{,}770$

Geodätisches Azim. Inselb.-Brocken $\alpha' = \;\; 5^0\, 35'\, 21''185 \ldots\ldots\ldots$

Nach den äusserst scharfen Berechnungen von C. F. Gauss (Untersuchungen über Gegenstände der höhern Geodäsie, 2. Abtheilung, S. 35) ist

$\varphi' = 50^0\, 51'\, 8''944$; $\omega = -\, 8'\, 58''700$; $\alpha' = 5^0\, 35'\, 21''182$
Hiervon obige Resultat .... $50\;\, 51\;\, 8{,}945$; .... $-\, 8\;\, 58{,}695$; .... $5\;\, 35\;\, 21{,}186$
Differenzen .... $-\, 0{,}001$; ...... $+\, 0{,}005$; .... $-\, 0{,}004$

Die nachstehenden Tafeln können bei verschiedenen Rechnungen der geodätischen Geographie mit Vortheil angewendet werden. Folgende Aufgaben mögen diesen Satz rechtfertigen.

1. Die Entfernung zweier Parallelen zu berechnen.

Einen Meridianbogen, dessen Winkelweite nicht über 4 bis 5 Grade hinausgeht, darf man als Kreisbogen ansehen, welcher den Krümmungshalbmesser am Halbirungspunkt zum Halbmesser hat. Bezeichnet also φ_0 die geographische Breite des nördlichen, φ_1 die des südlichen Parallelkreises, und wird $\varphi_0 - \varphi_1$ in Sekunden gelesen, so giebt die Gleichung:

$$s = \varrho\, (\varphi_0 - \varphi_1)\, .\, sin\, 1'',$$

unter s die lineare *Länge des gesuchten* Meridianbogens verstanden.

Tafel I: Logarithmen von *M* enthaltend.

Breite	Lg. *M*.	Breite.	Lg. *M*.
45° 0′	8,8003323	50° 0′	8,7999536
,10	3196	10	9411
20	3070	20	9286
30	2943	30	9161
40	2816	40	9036
50	2689	50	8911
46° 0′	2562	51° 0′	8787
10	2435	10	8662
20	2309	20	8539
30	2182	30	8415
40	2055	40	8291
50	1929	50	8168
47° 0′	1802	52° 0′	8045
10	1675	10	7921
20	1549	20	7798
30	1422	30	7676
40	1296	40	7553
50	1169	50	7430
48° 0′	1043	53° 0′	7308
10	0917	10	7187
20	0791	20	7065
30	0665	30	6944
40	0539	40	6822
50	0414	50	6701
49° 0′	0287	54° 0′	6580
10	0162	10	6460
20	0036	20	6339
30	8,7999911	30	6219
40	9785	40	6099
50	9660	50	5979
50° 0′	9536	55° 0′	5859

Diff. et P. p.

	127		123
1	13	1	12
2	25	2	25
3	38	3	37
4	51	4	49
5	64	5	62
6	76	6	74
7	80	7	86
8	102	8	98
9	114	9	111

	126		122
1	13	1	12
2	25	2	24
3	38	3	37
4	50	4	49
5	63	5	61
6	76	6	73
7	88	7	85
8	101	8	98
9	113	9	110

	125		121
1	13	1	12
2	25	2	24
3	38	3	36
4	50	4	48
6	63	5	61
5	75	6	72
7	88	7	85
8	100	8	97
9	113	9	109

	124		120
1	12	1	12
2	25	2	24
3	37	3	36
4	50	4	48
5	62	5	60
6	74	6	72
7	87	7	84
8	99	8	96
9	112	9	108

10″	2″, 1	30″	6″, 2
20″	4, 1	40	8, 3
30″	6, 2	50	10, 4

Tafel II: Logarithmen von *N* enthaltend.

β	Lg. *N*.	β	Lg. *N*.
5° 0'	8,7988758	50° 0'	8,7987494
10	8715	10	7453
20	8673	20	7411
30	8631	30	7370
40	8588	40	7328
50	8546	50	7287
6° 0'	8504	51° 0'	7245
10	8461	10	7204
20	8419	20	7162
30	8377	30	7121
40	8335	40	7080
50	8292	50	7039
7° 0'	8250	52° 0'	6998
10	8208	10	6957
20	8166	20	6916
30	8124	30	6875
40	8081	40	6834
50	8039	50	6793
8° 0'	7997	53° 0'	6752
10	7955	10	6711
20	7913	20	6671
30	7871	30	6631
40	7829	40	6590
50	7787	50	6550
9° 0'	7745	54° 0'	6510
10	7703	10	6470
20	7661	20	6430
30	7620	30	6390
40	7578	40	6349
50	7536	50	6309
0° 0'	7494	55° 0'	6269

Diff. et P. p.

43		40	
1'	4	1'	4
2	9	2	8
3	13	3	12
4	17	4	16
5	22	5	20
6	26	6	24
7	30	7	28
8	34	8	32
9	39	9	36

42		39	
1'	4	1'	4
2	8	2	8
3	13	3	12
4	17	4	16
5	21	5	20
6	25	6	23
7	29	7	27
8	34	8	31
9	38	9	35

41			
1'	4		
2	8		
3	12	10''	0,7
4	16	20''	1,4
5	21	30	2,1
6	25	40	2,8
7	29	50	3,5
8	33		
9	37		

Nun ist $M = \frac{1}{\varrho \sin 1''}$, d. i. $\varrho = \frac{1}{M \sin 1''}$; folglich

$$s = \frac{1}{M} \cdot (\varphi_0 - \varphi_1),$$

wo M mit dem Argument $\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) = \varphi_1 + \frac{1}{2}(\varphi_0 - \varphi_1)$ aus Tafel I. zu zu entlehnen ist. Sei z. B. $\varphi_0 = 55^0$, $\varphi_1 = 50^0$, so ist $\frac{1}{2}(\varphi_0 + \varphi_1) = 52^0\ 30'$ und $\varphi_0 - \varphi_1 = 5^0 = 18000''$; folglich:

$$Lg.\ \frac{1}{M} = 1{,}2002324$$
$$Lg.\ (\varphi_0 - \varphi_1) = 4{,}2552725$$
$$Lg.\ s = 5{,}4555049;\ s = 285433 \text{ Toisen.}$$

2. **Die lineare Länge des Breitengrades g_ϱ für eine gegebene Polhöhe $= \varphi$ zu berechnen.**

Im vorliegenden Fall ist $\varphi_0 - \varphi_1 = 1^0 = 3600''$; folglich

$$g_\varrho = \frac{1}{M} \cdot 3600;\ \ldots\ldots \text{ oder } \ldots\ldots Lg.\,g_\varrho = 3{,}5553025 - Lg.\,M.$$

Sei z. B. $\varphi = 51^0\ 19'\ 50''$, so hat man:

$$Lg.\ const. = 3{,}5563025$$
$$Lg.\ M = 8{,}7998541 - 10$$
$$Lg.\,g_\varrho \ldots = 4{,}7564484;\ g_\varrho = 57075^T{}_{33}.$$

3. **Die lineare Länge des Gradbogens im Azimuth $= 90^0$ zu berechnen.**

Die Aenderung des Krümmungshalbmessers der Oberfläche des Erdphäroïds nimmt vom Azimuth 0^0 bis zum Azimuth $= 90^0$ fortwärend ab. Bezeichnen wir also die Länge des gesuchten Gradbogens mit g_r, so gilt (nur um so mehr) die Gleichung:

$$g_r = \frac{1}{N} \cdot 3600;\ \ldots\ldots\ldots \text{ oder } \ldots\ldots\ldots Lg.\,g_r = 3{,}5563025 - Lg\,N$$

Sei z. B. wiederum $\varphi = 51^0\ 19'\ 50''$, so findet man leicht $g_r = 57225^T{}_{65}$.

4. **Die lineare Länge des Längegrades unter der Polhöhe $= \varphi$ zu berechnen.**

Diese Länge ist bekanntlich ein Produkt, an welchem g_r den einen, und der Cosinus der Breite den andern Faktor bildet, d. h. es ist

$$g = g_r \cos\varphi = \frac{1}{N} \cdot 3600 \cdot \cos\varphi$$

unter g die Grösse des gesuchten Längengrades verstanden.

5. **Den Krümmungshalbmesser der geometrischen Erdoberfläche im Azimuth $= \alpha$, unter der Polhöhe $= \varphi$, zu berechnen.**

Es bezeichne R diesen Krümmungshalbmesser, so gilt*) die Gleichung:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{\varrho} \cdot \cos^2 \alpha + \frac{1}{r} \cdot \sin^2 \alpha,$$

also

$$\frac{1}{R \sin 1''} = \frac{1}{\varrho \sin 1''} \cos^2 \alpha + \frac{1}{r \sin 1''} \cdot \sin^2 \alpha.$$

Hieraus wegen $\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$, durch Einsetzung von M und N

$$\frac{1}{R \sin 1''} = (M - N) \cos^2 \alpha + N$$

Man vertausche nun $\cos^2 \alpha$ mit $\frac{1}{2} (\cos 2\alpha + 1)$, so ergiebt sich leicht:

$$\frac{1}{R \sin 1''} = \frac{1}{2} (M + N) - \frac{1}{2} (M - N) \cos 2\alpha.$$

V. Nachträge und Verbesserungen zu der Schrift: Neue Untersuchungen über frei rotirende Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts, von Dr. Ludwig Matthiessen, Docent an der Kieler Universität. Kiel, Akad. Buchh. (1860). Von dem Verfasser.

Nachdem im fünften Hefte dieses Jahrgangs bereits eine kurze Anzeige der obgenannten Schrift abgedruckt worden ist, fühlt Verfasser sich verpflichtet, eine kleine Anzahl von Unrichtigkeiten nachträglich zu verbessern, weswegen derselbe sich die Entschuldigung des Publikums höflichst erbitten muss. Diese Incorrectheiten haben aus mehrfachen Gründen leider nicht vermieden werden können, hauptsächlich sowol wegen eines aus officiellen Rücksichten beschleunigten Druckes, da die Abhandlung zu einer Einladungsschrift bestimmt war, als wegen einer unfreiwilligen Abwesenheit des Verfassers vom Druckorte. Zugleich fühlt sich derselbe zu Dank verpflichtet für die Willigkeit, mit welcher die geehrte Redaction die folgenden Nachträge und Verbesserungen in die Zeitschrift aufzunehmen bereit gewesen ist.

Der Standpunkt, auf welchen die Lösung des betreffenden Problemes bis jetzt gelangt ist, gewährt in der That noch immer sehr wenig Befriedigung. Die Schwierigkeit desselben ist längst anerkannt worden; man muss diesen Feind der höhern Analysis durch vereinzelte Angriffe zu schwächen suchen: das Problem von seinen speciellen Seiten zu betrachten, wird zunächst die Hauptaufgabe sein. Die geringe Befriedigung der Theorie ist aber doch insofern etwas erhöht, als eine wichtige Frage erledigt sein dürfte, welche zuerst von Laplace in seiner Mechanik des Himmels aufgeworfen zu sein scheint, von ihm aber nicht genügend beantwortet worden ist, da ihm die schöne Entdeckung Jacobi's noch verhüllt war, nämlich die Frage: ob mehrere Zustände oder Figuren des Gleichgewichts für

---

*) De computandis dimensionibus trigonometricis in superficie terrae sphaeroidica institutis commentatur *J. Th. F.* Bohnenberger, Tub. 1826, p. 8.

eine und dieselbe ursprüngliche Kraft oder Bewegungsquantität einer frei schwebenden homogenen Flüssigkeitsmasse möglich seien, wenn ihre Moleküle sich bloss nach dem allgemeinen Gesetze der Schwere anziehen. Das Resumé der hierauf bezüglichen Untersuchungen (Seite 72) erweisst nun, dass es wenigstens drei (nicht vier) solcher Zustände gäbe, bei denen sich die Summe der Bewegungsquantität von einem gewissen endlichen Werthe an dem Werthe ∞ immer mehr nähert, nämlich das Jacobi'sche, das sehr abgeplattete Rotationsellipsoid und ausserdem noch ein wenig abgeplatteter freier Ring. Die in der Abhandlung an derselben und andern Stellen wiederholt ausgesprochenen Vermuthung, dass ein zweiter sehr abgeplatteter Ring von elliptischen Querschnitt und ohne Centralkörper auch eine Gleichgewichtsfigur bilden könne, haben durch genauere Untersuchungen, welche Verfasser später zu veröffentlichen gedenkt, sich als falsch erwiesen, wenngleich bei der Annahme eines verhältnissmässig grossen Centralkörpers die Analysis einen solchen ergibt. Die Gleichung der Bewegung eines unmerklich abgeplatteten Ringes ist sehr nahe

$$V = \frac{a^2}{4r^2} \log nat \frac{64r^2}{ea^2}$$

worin $e = 2{,}718281\ldots$ und welche als die genauere für (130) zu setzen ist. Für den bekannten Werth $V = 0{,}00229971$ liefert sie die Wurzel $r/_a = 33{,}23$. Die Gleichung der Bewegung und des Gleichgewichts eines sehr abgeplatteten Ringes mit beträchtlicher Oeffnung müsste aber nahezu sein:

$$V = \frac{c^2}{4r^2\sqrt{1+\lambda^2}} \log nat \frac{64r^2}{c^2}$$

Allein da nach (121) Seite 67 für sehr abgeplattete Ringe näherungsweise $V = \frac{2}{3p}$ $\left(\text{nicht } \frac{2}{3}p\right)$ d. h. $V = \frac{2}{3\sqrt{1+\lambda^2}}$ gefunden wird, so würde man erhalten

$$\frac{2}{3} = \frac{c^2}{4r^2} \log nat. \frac{64r^2}{c^2}$$

Diese Gleichung liefert aber einen Werth für das Verhältniss von c zu r, der wenig von der Einheit abweicht, was gegen die Annahme ist, dass die Oeffnung beträchtlich sein soll. Deshalb gibt es nicht einen sehr abgeplatteten Ring ohne Centralkörper als Gleichgewichtsfigur. Die Gleichung gewinnt aber doch wieder ihre praktische Bedeutung, wenn man sie auf die Saturnringe anwendet. Setzt man, was nahezu richtig ist, für den Saturnring als Ganzes betrachtet $\frac{c}{r} = \frac{1}{5}$, $\sqrt{1+\lambda^2} = 200$, so ist in Verbindung mit Gleichung (120)

$$V = \frac{2\varrho' R^3}{3\varrho r^3} + 0{,}00052$$

und wenn ferner, was wol wenig von der Wahrheit abweicht, $2R = r$ und $3\varrho' = \varrho$ angenommen wird

$$V = 0{,}02778 + 0{,}00052.$$

Da also die Anziehung des Ringes auf sich ungefähr 0,01 der Umdrehungsgeschwindigkeit ausmacht, so müsste die Umlaufszeit dadurch um mindestens 6 Minuten verringert werden, eine Grösse, die sich leider der Beobachtung so lange entziehen wird, als überhaupt die Revolutionsdauer der Ringe noch nicht mit Sicherheit beobachtet ist. Hier ist natürlich nur von einer mittleren Umlaufszeit aller fünf Ringe die Rede, die gewiss für alle verschieden ist, da sie sich wol ziemlich nahe nach den Kepplerschen Gesetzen umdrehen.

Nachdem jene Frage beantwortet war, lag die folgende sehr nahe: ob es nicht auch eine ursprüngliche Kraft oder Momentensumme der Bewegungsquantität gäbe, durch welche eine homogene frei schwebende Flüssigkeitsmasse in zwei oder mehr verschiedene Zustände des Gleichgewichts von einer und derselben Rotationsgeschwindigkeit übergeführt werden könne. Die weiteren Untersuchungen des Verf. haben zu folgenden sehr merkwürdigen Resultaten geführt. Die Coexistenz der Gleichungen (58) und (71) erfordern die beiden Relationenen

$$V = 0{,}011, \quad E = 0{,}177.$$

Zu diesen Werthen von V und E gehören die Axenverhältnisse

$$a : b = 1 : 140 \text{ (Rotationsellipsoid)}$$

$$a : b : c = 1 : 1{,}0114 : 20{,}6 \text{ (Jacobi'sches Ell.)}.$$

Der Ring ohne Centralkörper vermehrt diesen Fall um einen zweiten. Die Coexistenz der Gleichungen (58) und (132) liefert die Wurzeln

$$V = 0{,}0038, \quad E = 0{,}252$$

die zugehörigen Axenverhältnisse sind:

$$a : r = 1 : 25{,}1 \text{ (freier Ring)}$$

$$a : r : c = 1 : 1{,}0019 : 38{,}7 \text{ (Jacobi'sches Ell.)}.$$

Die Gleichungen (71) und (132) ergaben nach einer genauen Rechnung keine Werthe für V und E, wiewol innerhalb der Gränzen $V = 0{,}02$ und $0{,}12$ die zugehörigen Werthe von E nur um hundertstel Theile von einander abweichen. Um die Vorstellung des gegenseitigen Verhältnisses von V und E in den Gleichungen (58), (71) und (132) bisher zu fixiren, kann man V und E als Coordinaten, jene Gleichungen als die dreier ebenen Curven betrachten, von denen Fig. 11, Taf. 11 ein Bild gibt. Für Werthe der Ordinaten $E > 0{,}252$ laufen die drei Curven neben einander her, ohne sich nochmals zu kreuzen. Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass für gleiche E

$$Lim\,(V_\beta : V_r : V_i) = 0 : 1 : \frac{(6\pi)^4}{5^6}$$

und für gleiche V

$$Lim\,(E_\beta : E_r : E_i) = 0 : 1 : \frac{5}{(6\pi)^{\frac{2}{3}}}$$

wo die Indices β, r, i, resp. dem Rotationsellipsoide, dem Ringe und dem Jacobi'schen Ellipoide angehören.

Die Druckfehler, die schon am Schlusse des Druckes bemerkt wurden, sind auf dem Umschlage der Abhandlung berichtigt worden. Hier hat Verf. noch folgende Verbesserungen anzuzeigen für nothwendig erachtet.

S. 34, Z. 4 v. u., in Formel (41) lies $3 + \lambda^2$ st. $3 + \lambda$. Im Folgenden muss es weiter heissen: „Differenzirt man diese Function von $V + \lambda$ und setzt den Differentialquotienten gleich Null, so erhält man

$$\frac{\lambda\,(7\lambda^2 + 9)}{(1 + \lambda^2)\,(9 + \lambda^2)} - arc\ tan\ \lambda = 0 \quad (42)$$

Diese Gleichung bestimmt die Gränze von V, ausserhalb derer das Gleichgewicht mit einer elliptischen Figur unvereinbar ist. Nach der sehr genauen Berechnung von Ramus erfordert die Coexistenz der Gleichungen (410 und (42) die Werthe" u. s. w.

Auf S. 40 betragen die Trägheitsmomente von 3) 4) 5) das Doppelte; dasselbe ist S. 43, 44, 45 überall zu berichtigen.

S. 40 ergänze in den Gleichungen (62), (63), (64) rechts den Faktor dt.

S. 55, Z. 7 v. o. u. fg., sowie in Bezug auf S. 56, Z. 3 v. u. gilt dasjenige, was schon oben über die Nichtexistenz eines sehr abgeplatteten freien Ringes mit grosser Oeffnung gesagt ist. Es genügen nicht zwei Figuren des Querschnitts, sondern nur eine dem Gleichgewichte.

S. 60, Formel (109) muss lauten:

$$\frac{u}{r - r_1} = \frac{2\sqrt[3]{\frac{2}{2 - 3V}} - 2}{\sqrt{1 + \frac{16}{2 - 3V}} - 3}$$

S. 64 ergänze in der zweiten Zeile der Formel (114) innerhalb der Klammern vor F beidemal den Coeffizienten $\sqrt{-1}$. Zur Erläuterung muss hier die Bemerkung hinzugefügt werden, dass wenn $F(x + yi, r + si, t)$ eine Funktion beliebig vieler reeller und complexer Grössen darstellt, die Summe $F(x + yi, r + si, t) + F(x - yi, r - si, t)$ stets reell und die Differenz derselben Ausdrücke stets imaginär sein muss. Die Gleichung (114) schliesst die allgemeinste Methode in sich, eine Function complexer Grössen in ihre Bestandtheile zu zerlegen.

Erstes Beispiel: Gegeben sei die Funktion $l\,(x + yi)$. Der reelle Theil ist $^1/_2\ l\ (x + yi) + {}^1/_2\ l\,(x - yi) = {}^1/_2\ l\ (x^2 + y^2)$; der imaginäre aber

$$-\frac{\sqrt{-1}}{2}\left\{\sqrt{-1}\,l\,(x + yi) - \sqrt{-1}\ l\,(x - yi)\right\} = \tfrac{1}{2}\,l\left(\frac{x + yi}{x - yi}\right)$$
$$= \sqrt{-1}\ arc\ tan\ y/x.$$

Zweites Beispiel: Die Funktion $(x + yi)^{vi}$ in die Form $P + Q\sqrt{-1}$ umzuwandeln. Der reelle Theil ist $\frac{1}{2}\left\{(x + yi)^{vi} + (x + yi)^{-vi}\right\}$.

Nun ist $(x \pm yi)^{\pm vi} = e^{\pm l(x \pm yi) vi}$

folglich mit Anwendung des Resultats der vorigen Aufgabe der reelle Theil der Funktion

$$\frac{1}{2} e^{-v \, arc \, tan \, y/x} \left\{ e^{\frac{v}{2} l(x^2+y^2) i} + e^{-\frac{v}{2} l(x^2+y^2) i} \right\}$$

$$= \frac{1}{2} e^{-v \, arc \, tan \, y/x} \cos \left\{ \tfrac{v}{2} l(x^2+y^2) \right\}$$

der imaginäre Theil ist

$$\frac{1}{2} \left\{ (x+yi)^{vi} - (x-yi)^{-vi} \right\} = \frac{1}{2} e^{-v \, art \, tan \, y/x} \sin \left\{ \tfrac{v}{2} l(x^2+y^2) \right\} \sqrt{-1}$$

Man sieht leicht ein, dass nicht allein die Summe irgend welcher zweier conjugirter Funktionen complexer Variabeln, sondern auch ihr Produkt einen reellen Werth hat.

S. 66, Z. 16 v. o. in der ersten Klammer der Gleichung (19 lies r^2 st. r_2.

S. 67, Z. 17 v. u. lies $\frac{2}{3p.}$ st. $^2/_3 p.$

S. 70, Formel (128) muss also lauten:

$$V = +4 - 4\sqrt{1+\frac{a^2}{4r^2}} \left\{ 1 - \frac{1+l\,4}{4} \cdot \frac{a^2}{4r^2} + .. \right\}$$
$$+ \frac{a^2}{2r^2} l \left\{ \frac{2r^2}{a} + \sqrt{1+\frac{4r^2}{a^2}} \right\} \left\{ 1 - \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{a^2}{4r^2} + .. \right\}$$

und mit Vernachlässigung der sehr kleinen Grösssen von der Ordnung $\frac{a^4}{r^4}$

$$V = \frac{a^2}{4r^2} \log nat \frac{64 r^2}{e a^2}$$

Berechnet man den zu $V = 0{,}00229971$ gehörigen Wurzelwerth der Gleichung, so erhält man statt 31,45 den genaueren 33,23.

S. 71, Z. 6 v. o. lies 0,13805 st. 0,16643. Die obige genaue Formel gibt den Werth 0,12732.

S. 71, Z. 1 v. u.. Das Trägheitsmoment eines Ringes mit elliptischem Querschnitte st. nicht das hier gegebene, sondern $Mr^2 + M\frac{3c^2}{4}$ (vergl. Zeitschrift pag. 201); hiernach verwandelt sich auch (132 in

$$E\,dt = \frac{M\omega}{8}(4r^2 + 3c^2)\,dt$$

Mit Bezug auf Z. 21 u. 3 v. u. gilt dasselbe, was schon oben über die falsche Annahme zweier Ringe statt eines einzigen gesagt ist.

S. 73, Z. 12 v. o. muss es heissen: $b = c = 1{,}00433441$.

S. 73, Z. 13 v. o. $b = 1{,}0023$, $c = 52{,}379$. Diese Abänderung ist die Verbesserung eines Rechenfehlers, welcher aus der öfters vom Verf. citirten Abhandlung von Meyer im Journ. von Crelle XXIV (1842) leider schon in die Schrift betitelt: Ueber *die Gleichgewichtsfiguren* (Kiel 185) pag. 62, 65

übergegangen ist. Es betrifft diese Bemerkung die von Meyer berechneten Axenverhältnisse des Jacobischen Ellipsoids mit Rücksicht auf den Werth $V = 0{,}00229971$ des Erdsphäroides. Meyer will gefunden haben.

$$a : b : c = 1 : 1{,}018 : 19{,}57$$

wogegen die richtige Proportion lautet:

$$a : b : c = 1 : 1{,}0023 : 52{,}279$$

und jenes Axenverhältniss gar nicht möglich ist, wol aber

$$a : b : c = 1 : 1{,}012 : 19{,}57 \text{ für } V = 0{,}0115$$

$$a : b : c = 1 : 1{,}018 : 15{,}6 \text{ für } V = 0{,}0163$$

Die Integration der Bewegungsgleichungen (40) ergibt nämlich für kleinere Werthe der Rotationsgeschwindigkeit nahezu

$$V = \frac{\lambda^2}{2} = \frac{2 \log nat\, 2\lambda_1 - 3}{\lambda_1^2}$$

sodass $1 + V$ ein Näherungswerth von $\sqrt{1 + \lambda^2}$ ist und für beträchtlich grosse Werthe von λ, die Gleichung des Gleichgewichts übergeht in

$$V = \frac{l\,(4\lambda_1^2)}{\lambda_1^2}$$

in wunderbarer Uebereinstimmung mit (130), wenn man $\frac{2r}{a}$ statt λ_1 setzt. In der That nähern sich beide Figuren, das ungleichaxige Ellipsoid und der Ring immer mehr dem Zustande eines unendlichen Cylinders mit kreisförmiger Basis. Bedeutet, um diese Ideen zu fixiren, M die Masse, a die halbe kleinste Axe, so resultiren für die genannten Gleichgewichtskörper die Relationen

$$V = \frac{a^6 \pi^2}{M^2} \log nat \frac{4 M^2}{a^6 \pi^2}; \quad V = \frac{a^6 \pi^4}{M^2} \log nat \frac{16 M^2}{e \,.\, a^6 \,.\, \pi^4}.$$

Ferner ist für gleiche M und a, das Verhältniss von c zu r gleich 2π und

$$Lim \left(\frac{V_1}{V}\right) = \pi^2, \text{ oder } Lim \frac{\omega_1}{\omega} = \pi.$$

Die angeführten Formeln gewähren zur Berechnung der vorliegenden Fälle hinreichende Genauigkeit; die genaueren Integrale von (40) geben wenig abweichende Resultate.

S. 73 ist unter der Z. 20 einzuschalten: $c = 1{,}0092$, $r = \infty$.

S. 74 in der zweiten Reihe der „secundären Körper" unter dem Artikel: Hohlkugel, für $V > 0$ zu lesen „von endlichen" statt „von unendlichen".

Jever, Dr. Matthiessen.

VI. Zur mechanischen Wärmelehre. (Berechnung derjenigen mechanischen Arbeit, welche zur Zerlegung einer chemischen Verbindung erforderlich ist.)

1) Es seien A und B die Atome zweier Grundstoffe. Das Gewicht von A sei gleich p_1, das von B gleich p_2, während m_1 und m_2 die entsprechenden

Massen sein mögen. Der Wärmezustand sei der Art, dass A mit einer Geschwindigkeit $= v_1$ und B mit einer solchen $= v_2$ schwingt. Soll nun die Schwingungsgeschwindigkeit von A auf v_3, die von B auf v_4 gebracht werden, so muss hiedurch die lebendige Kraft von A auf $m_1 v_3^2 - m_1 v_1^2$, die von B um $m_1 v_4^2 - m_2 v_2^2$ wachsen. Die mechanischen Arbeiten, die zu diesem Behufe verrichtet werden müssen, seien beziehungsweise P_1 und P_2: dann ist nach dem Gesetze der lebendigen Kräfte

$$P_1 = P_2,$$

wenn $m_1 v_3^2 - m_1 v_1^2 = m_2 v_4^2 - m_2 v_2^2$ vorausgesetzt wird.

Da nun die lebendige Kraft des schwingenden Atoms ein Maass für die Temperatur ist und die mechanische Arbeit, die zur Hervorrufung einer bestimmten lebendigen Kraft erforderlich, nach den Anschauungen der Undulations-Theorie „Wärmemenge“ heisst: so haben wir den Satz:

Um je ein Atom der verschiedensten Grundstoffe in der Temperatur um gleichviel zu erhöhen, ist eine und dieselbe Wärmemenge erforderlich.

Diese ganze Entwickelung beruht offenbar auf der Voraussetzung, dass bei Grundstoffen das einzelne Atom das Schwingende sei.

2) Bezeichnet w die Wärmemenge, die nöthig ist, um A in der Temperatur um einen Grad zu erhöhen, so ist dieses w auch zugleich die Quantität von Wärme, die bei B für den nämlichen Zweck ausreicht. Ist $p_1 =$ dem $\frac{1}{a_1}$ Theil der Gewichtseinheit, $p_2 = \frac{1}{a_2}$ derselben, und bezeichnen wir die spezifischen Wärmen derjenigen Stoffe, die beziehungsweise aus Atomen von der Beschaffenheit von A und B zusammengesetzt sind, durch s_1 und s_2, so haben wir:

$$s_1 = w \,.\, a_1 \text{ und } s_2 = w \,.\, a_2,$$

also

$$s_1 : s_2 = a_1 : a_2 \qquad (1)$$

Es ist aber auch:

$$a_1 \,.\, p_1 = 1 \text{ und } a_2 \,.\, p_2 = 1,$$

mithin

$$p_2 : p_1 = a_1 : a_2 \qquad (2)$$

Aus (1) und (2) ergibt sich aber:

$$s_1 : s_2 = p_2 : p_1 \text{ oder: } s_1 p_1 = s_2 p_2. \text{ D. h.}$$

Die Atomgewichte der Grundstoffe verhalten sich umgekehrt wie die spezifischen Wärmen derselben; oder

Das Produkt aus spezifischer Wärme und Atomgewicht hat für alle Grundstoffe den nämlichen Werth.

3) Das Resultat obiger Entwickelung wird durch die Erfahrung bestätigt, indem man bekanntlich nahezu 40 erhält, so oft man die chemische Aequivalentzahl eines Grundstoffes mit der spezifischen Wärme des nämlichen Grundstoffes multiplizirt. Auf empirischen Wege ist bekanntlich auch dargethan worden, *dass das Gesetz*: „die spezifischen Wärmen verhalten

sich umgekehrt wie die chemischen Aequivalentzahlen" auch für alle chemische Verbindungen von übereinstimmender chemischer Constitution gilt. Die Zahl, welche heraus kommt, wenn man bei chemischen Verbindungen die spezifische Wärme mit der Aequivalentzahl multiplizirt, ist jedoch durchgehends grösser als 40. (Dieses Produkt ist z. B. bei Metalloxyden, bei denen auf 1 Aequivalent Metall 1 Aequivalent Sauerstoff kommt, nahezu 79 u. s. w.) So ist z. B.

Aequivalentzahl des Sauerstoffs mal spez. Wärme des Sauerstoffs = 40; dagegen

Aequivalentzahl des Zinkoxyds mal spez. Wärme desselben = 70.

Hieraus ergibt sich, dass einer chemischen Verbindung eine grössere spezifische Wärme zukommt, als einem Grundstoff zukommen würde, dessen Atome einzeln eben so schwer wären wie diejenigen der chemischen Verbindung.

Worin hat dies seinen Grund?

Der Umstand, dass ein Zinkoxydatom schwerer ist als ein Zinkatom, kann die verschiedene Grösse des Wärmebedarfs nicht herbeiführen. Denn auch ein Quecksilberatom ist ja z. B. bedeutend schwerer als ein Zinkatom, und doch ist die Wärmemenge, die zur Erhöhung der Temperatur eines Atoms um einen Grad erforderlich ist, für Zink genau dieselbe wie für Quecksilber. Wäre jedes Zinkoxydatom eine starre Verbindung aus 1 Atom Zink und 1 Atom Sauerstoff, schwänge dieses Zinkoxyd als starres Ganze und hätte es bei diesem Schwingen des Gesammtatoms sein Bewenden, so müsste die gleiche Wärmemenge ausreichen, um 1 Atom Zinkoxyd in der Temperatur um 1 Grad zu erhöhen, wie um 1 Atom irgend eines Grundstoffes um 1 Grad zu erhöhen.

Da dem nun aber der Erfahrung gemäss nicht so ist, sondern ein Zinkoxydatom mehr Wärme braucht als ein Zinkatom, um in der Temperatur um gleichviel erhöht zu werden, so folgt daraus, dass die einfachen Atome innerhalb des Gesammtatoms gleichfalls Schwingungen ausführen, dass mithin jede Zufuhr an Wärme nur theilweise zur Erhöhung der Schwingungsenergie des Gesammtatoms verwendet wird, während der andere Theil dazu dient, die Schwingungsgeschwindigkeit (die Eigenbewegung) der einfachen Atome zu steigern. Bei fortgesetzter Wärmezufuhr werden letztere (die Schwingungen der einfachen Atome) zuletzt dermassen überwuchern, dass von einer Zusammengehörigkeit der einfachen Atome keine Rede mehr sein kann, das dynamische Band mithin, welches die verschiedenen Grundstoffatome zusammenhielt, als zerrissen betrachtet werden muss. Dann ist es der Wärme gelungen, die chemische Verbindung in ihre Bestandtheile zu zerlegen.

4) Es sei K die chemische Aequivalentzahl einer unmittelbaren chemischen Verbindung aus den Bestandtheilen A und B. Um k Gewichtseinheiten *dieser* Verbindung auf die (vom absoluten Nullpunkt an gezählte) Tem-

peratur t zu erheben, muss ihr eine gewisse Wärmemenge W beigebracht werden. Diese Wärmemenge besteht aber aus zwei Bestandtheilen, von denen der eine (w_1) die Schwingungsgeschwindigkeit des Gesammtatoms, der andere (w_2) diejenige der einfachen Atome unterhält und steigert. Es ist somit $w_2 = W - w_1$.

Bezeichnen wir die spezifische Wärme der chemischen Verbindung durch s, so ist

$$s \,.\, k = c,$$

wobei c ein von der chemischen Constitution abhängiger Coefficient ist*), also $s = \frac{c}{k}$, folglich $W = \frac{c}{k} \,.\, k \,.\, t = c \,.\, t$,

Ferner ist $w_1 = 40 \,.\, t$; denn wäre das Gesammtatom ein starres Ganze, so dass nur seine Schwingungen, nicht aber die der einfachen Atome in Betracht kämen, so müsste ja $s \,.\, k = 40$ sein. Wir haben somit:

$$w_2 = t \,.\, (c - 40).$$

Geben wir nun dem t die spezielle Bedeutung der Zersetzungstemperatur, d. h. derjenigen Temperatur, bei welcher in Folge der alleinigen Einwirkung der Wärme die chemische Verbindung sich in ihre Bestandtheile auflöst, so bedeutet w_2 diejenige Wärmemenge, die lediglich auf die Schwingungen der einfachen Atome verwendet werden muss, um eine Trennung herbeizuführen. Und multipliziren wir dann diese Wärmemenge w_2 mit dem mechanischen Aequivalent der Wärme (das durch q bezeichnet sein mag), so haben wir offenbar diejenige mechanische Arbeit, die rein zum Zwecke der Zerlegung verrichtet werden muss, wenn eine der chemischen Aequivalentzahl k gleiche Anzahl von Gewichtseinheiten der Verbindung vorliegt. Diese mechanische Arbeit, die jedenfalls ein genaues Maass für die Festigkeit der chemischen Verbindung ist, lässt sich somit durch den Ausdruck:

$$(c - 40) \,.\, t \,.\, q$$

darstellen.

5) Es sei C eine chemische Verbindung aus m Aequivalenten des Grundstoffes A und n Aequivalenten des Grundstoffes B. Ist C verbrennlich und besteht das Verbrennungsprodukt von C aus dem Verbrennungsprodukt von A und demjenigen von B, so lassen sich im Verbindungsprozess von C offenbar folgende Vorgänge unterscheiden:

a) Zerlegung von C in m Aequiv. von A und n Aequiv. von B;

b) Verbrennnng der m Aequiv. von A;

c) Verbrennung der n Aequiv. von B.

---

*) Dieser Coefficient ist für Verbindungen, bei denen auf 1 Aequivalent des metallischen Grundstoffes 1 Aequivalent Sauerstoff kommt = 70; bei Oxyden, bei denen auf 2 Aequiv. des metallischen Grundstoffs 3 Aequiv. Sauerstoff gehen = 160 u. s. w.

Bestimmt man nun die Wärmemengen m_1 und m_2, die beziehungsweise beim Verbrennen von m Aequiv. von A und n Aequiv. von B sich entwickeln, und vergleicht die Summe $m_1 + m_2$ mit derjenigen Wärmemenge m_3, welche durch das Verbrennen von C entsteht, so wird man finden, dass m_3 kleiner ist als $m_1 + m_2$*). Diese Thatsache berechtigt uns aber offenbar zu dem Schlusse, dass $m_1 + m_2 - m_3$ diejenige Quantität an Wärme sein müsse, welche zur Trennung der Verbindung von C in m Aequiv. von A und n Aequiv. von B in Anspruch genommen werden musste.

Nun können wir für die Verbindung C die zu ihrer Trennung erforderliche mechanische Arbeit zweimal ausdrücken und gelangen so zu der Gleichung:

$$(c - 40) \,.\, t \,.\, q = (m_1 + m_2 - m_3) \,.\, q,$$

woraus folgt:

$$t = \frac{m_1 + m_2 - m_3}{c - 40}.$$

Auf diese Weise lässt sich für C die Temperatur berechnen, bei welcher Trennung in A von B hätte erfolgen müssen, wenn die Affinität aus dem Spiele geblieben und die Wärme die allein wirkende Kraft gewesen wäre.

Bekanntlich sind z. B. Kohlenwasserstoff, Schwefelwasserstoff etc. chemische Verbindungen, welche die an C gestellten Bedingungen erfüllen.

Prof. Friedr. Mann.

VII. Ueber die Anwendung der Afinitätsaxen zur graphischen Bestimmung der Ebene.

Wenn man eine Ebene graphisch bestimmt nennt, sobald man im Stande ist, jeden Punkt derselben zu projiciren, so ist allgemein eine Ebene bestimmt, durch zwei sich schneidende (speciell parallele) gerade Linien auf ihr, deren Projectionen man kennt. Wenn irgend ein Punkt der Ebene darnach im Grundriss willkürlich angenommen wird, so bestimmt sich sein Aufriss ganz einfach mittels einer Transversale, die man so durch ihn hindurch legt, dass sie die gegebenen geraden Bestimmungslinien entweder beide schneidet, oder zu der einen von beiden parallel läuft; in der ersten Art ist aus dem Grundriss von a in der Figur 1, Tafel II, der Aufriss und in der zweiten Art aus dem Aufriss von b der Grundriss gefunden worden. (G und L sind die beiden bestimmenden geraden Linien.)

Wenn man die zulässigen speciellen Fälle dieser Bestimmungsweise aufsucht, d. h. die beiden bestimmenden geraden Linien alle möglichen Lagen annehmen lässt, die nicht über die Lage der zu bestimmenden Ebene selbst eine besondere Voraussetzung machen, so erhält man als einen einfachsten Fall dieser Bestimmung die Bestimmung der Ebene durch zwei Spuren, als durch zwei gerade Linien, von deren jeder zwei Projectionen in Projectionsaxen fallen; die Bestimmung der Punkte a'' aus a' und b'' aus b' nach den beiden vorher gedachten Arten zeigt dann die folgende Figur (Tafel II, Fig. 2).

---

*) Siehe die Arbeiten von Favre und Silbermann.

Allein man hat in Folge der principiellen Benutzung von nur zwei Projectionsebenen nicht vermocht zu erkennen, dass noch ein anderer gleich einfacher Fall sich aus dieser allgemeinen Bestimmungsweise ergibt, derjenige nämlich, bei welchem die bestimmenden geraden Linien G und L so gewählt sind, dass von jeder zwei Projectionen sich decken; diess aber liefert die Bestimmung durch Affinitätsaxen, die der Gegenstand dieser Mittheilungen sein soll.

Auf jeder Ebene gibt es zuerst eine gerade Linie, deren Grundriss und Aufriss sich decken, sie ist die Axe der Affinität zwischen Grund- und Aufriss beliebiger Systeme auf der Ebene, oder sie ist auch die Durchschnittslinie dieser Ebene mit der unter 45^0 gegen die Grundrissebene geneigten und durch die erste Projectionsaxe x von vorn unten nach hinten oben gehenden Ebene; auf jeder Ebene gibt es ferner eine gerade Linie, deren Auf- und Seitenriss sich decken, sie ist die Axe der Affinität zwischen Auf- und Seitenriss beliebiger Systeme auf der Ebene und die Durchschnittslinie derselben mit einer unter 45^0 gegen die Aufrissebene geneigten und durch die drei Projectionsaxen von vorn rechts nach hinten links gehenden Ebene. Man erkennt daraus, dass der Seitenriss jener ersten und der Grundriss dieser zweiten geraden Linie in der von rechts unten nach links oben gehenden Halbirungslinie des Axenwinkels zusammenfallen.

Man erkennt ferner leicht, dass diese beiden geraden Linien sich in der Durchschnittslinie jener beiden Winkelhalbirungsebenen schneiden müssen, sofern sie der nämlichen Ebene angehören sollen, und diese Durchschnittslinie ist die einzige gerade Linie, deren drei Projectionen zusammenfallen eben in die bezeichnete Halbirungslinie des Axenwinkels. Daher sind in der folgenden Figur A und $\mathfrak{A}$ (Taf. II, Fig. 3) die beiden besprochenen Affinitätsaxen einer Ebene und dieselben sind, wie leicht zu sehen ist zu ihrer Bestimmung vollkommen ausreichend und bequem. Zu einem Punkte a, hat man durch eine A und $\mathfrak{A}$ schneidende Transversale $\alpha\beta$ die Punkte $a_{,,}$ und $a_{,,,}$ bestimmt; $\alpha_{,}\beta_{,}$ ist die Transversale im Grundriss willkührlich durch $a_{,}$ gelegt; $\alpha_{,,}\beta_{,,}$ ist ihr Aufriss, $\alpha_{,,,}$ $\beta_{,,,}$ ihr Seitenriss und darin respective $a_{,,}$ und $a_{,,,}$. Zu b'' ist ferner durch eine zu A parallele Transversale b' und b''' bestimmt worden; $b''\gamma''$ ist ihr Aufriss, $b'\gamma'$ ihr Grundriss und $b'''\gamma'''$ ihr Seitenriss, darin respective b' und b'''; natürlich ist $b''\gamma'' \parallel b'\gamma' \parallel A,(A_{,,})$ und $b'''\gamma''' \parallel A''$. Offenbar ist die Construction weder zusammengesetzter noch beschwerlicher als die vermittelst der Spuren.

Wenn hier nur die Bestimmung von Punkten näher beleuchtet ist, so ist in dem Entwickelten schon die Bestimmung von Linien enthalten; auch braucht von der Bestimmung ebener Punkte und Liniensysteme nicht weiter gesprochen zu werden, da bei dieser keine neuen Schwierigkeiten sich zeigen, wohl aber als willkommner Vortheil die Eigenschaft der Affinitätsaxe als Durchschnittsort homologer gerader Linien zweier Projectionen eines solchen Systems erscheint. Es genügt deshalb das bisher Gezeigte, die Anwendbarkeit der Affinitätsaxen zur Bestimmung der Ebene zu zeigen.

Nur noch an zwei Aufgaben soll diese ihre der den Spuren analoge Bedeutung dargelegt werden; mit ihrer Hilfe soll die Durchschnittslinie zweier Ebenen und der Durchschnittspunkt einer Ebene mit einer geraden Linie bestimmt werden:

I. Bestimmung der Durchschnittslinie zweier Ebenen. Sind A und $\mathfrak{A}$, B und $\mathfrak{B}$ *die Affinitätsaxenpaare zweier* Ebenen, so stellt die folgende Figur die

Bestimmung ihrer Durchschnittslinie dar. Affinitätsaxen A und B schneiden sich in einem Punkte a, die Affinitätsaxen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ in einem Punkte b und die Verbindungslinie beider ab ist die Durchschnittslinie der Ebenen, die Figur liefert sie in allen drei Projectionen. An Einfachheit steht auch diese Construktion derjenigen mit Hilfe der Spuren durchaus nicht nach.

II. Bestimmung des Durchschnittspunktes einer geraden Linie mit einer Ebene; der Grundgedanke der Auflösung bleibt derselbe, wie gewöhnlich: durch die gerade Linie wird eine Ebene gelegt, ihre Durchschnittslinie mit der gegebenen bestimmt und der Punkt angemerkt, wo diese die gegebene gerade Linie schneidet, er ist der gesuchte.

Wenn bei Benutzung der Spuren die besagte Hilfsebene nach dem Satze bestimmt wird, dass die Spuren einer Ebene stets die gleichbenannten Durchgangspunkte einer geraden Linie enthalten müssen, durch die sie gelegt wird, so lässt sich hier derselbe Satz von den Affinitätsaxen einer Ebene aussprechen, sofern man nur unter Durchgangspunkten der geraden Linie nicht die Schnittpunkte derselben mit den Projectionsebenen, sondern mit jenen unter 45^0 geneigten Ebenen der Affinitätsaxen versteht; diese Durchgangspunkte sind aber offenbar der dem Aufriss und Grundriss und der dem Aufriss und Seitenriss der geraden Linie gemeinschaftliche Punkt, ihre Bestimmung ist also vollkommen mühelos. In der Figur sind es die Punkte δ, Δ, da $L, L_{,,} L_{,,,}$ die drei Projectionen der geraden Linie sind. A, $\mathfrak{A}$ sind die Affinitätsaxen der gegeben Ebene, B, $\mathfrak{B}$ die einer durch L gelegten Hilfsebene; bei ihrer Wahl ist nur dass maassgebend, dass sie die der gegebenen Ebene möglichst scharf schneiden. Dann ist ab die Durchschnittslinie beider Ebenen und s der Punkt, wo sie L durchschneidet. Man erhält ihn in allen drei Projectionen selbständig und hat daher scharfe Proben.

Die Construktion vereinfacht sich noch mehr durch eine besondere Wahl der Affinitätsaxen B, $\mathfrak{B}$; wenn man sie z. B. zusammenfallen lässt, sodass beide durch die Verbindungslinie des δ mit Δ dargestellt werden, so hat man folgende einfache Construction. A, $\mathfrak{A}$ sind die Axen der Ebene, $L, L_{,,} L_{,,,}$ die Projectionen der Linie, δ, Δ ihre Durchgangspunkte, B, $\mathfrak{B}$ daher die Axen der Hilfsebene. die sich mit $L_{,,}$ decken; ab ist die Schnittlinie beider Ebenen und man erhält nun $s_{,,}$ nicht direkt, jedoch mit voller Genauigkeit, da $s_,$ und $s_{,,,}$ direkt bestimmt werden und $s_{,,}$ in $L_{,,}$ fallen muss. Die Construction ist vollkommen so einfach als die Benutzung der projicirenden Ebene der geraden Linie in der gewöhnlichen Weise. Wenn ich nun nach der Behandlung dieser beiden Aufgaben noch die offenbar wahren Sätze hinzufüge: parallelle Ebenen haben parallele Affinitätsaxen; ist eine gerade Linie einer Ebene parallel, so schneiden sich die durch ihre Durchgangspunkte mit den 45^0 Ebenen gezogenen Parallelen zu den Affinitätsaxen der Ebene in der Winkelhalbirungslinie $A_{,,,}$ $\mathfrak{B}_,$, denen sich leicht andere beigesellen liessen, so sieht man wohl, dass auch andere Aufgaben sich mit diesen Axen bequem behandeln lassen. Dieselben erweisen sich als neue Bestimmungsstücke von vielem Nutzen.

Und wenn man fragte, wozu eine neue Bestimmungsweise, da die alte allen Anforderungen entspricht, so ist zu antworten, dass die Vielheit der Hilfsmittel ihre Brauchbarkeit stets erhöht und besonders vom Standpunkte des Lehrers, dass in einer Wissenschaft, die so ganz auf die Durchbildung der geistigen Anschauung räumlicher Verhältnisse sich stützen muss, wie die darstellende Geometrie, kein Mittel überflüssig ist, durch das von einer neuen Seite her dieselbe befördert wird. Fiedler.

VIII. Chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen von G. Kirchhoff und Bunsen (Pogg. Ann. Bd. 110. 161). Diese Methode der Untersuchung gründet sich darauf, dass gewisse Körper in eine Flamme gebracht, in dem Spectrum derselben helle Linien hervorbringen, durch deren Lage und Färbung die in die Flamme gebrachten Körper völlig charakterisirt sind. Diese Körper sind Kalium, Natrium, Lithium, Strontium, Calcium, Barium, so wie sehr viele Salze derselben. Die Verfasser des genannten Aufsatzes haben nicht nur gezeigt, dass von rein dargestellten Chlorverbindungen obiger Metalle, jede für sich, ein charakteristisches Spectrum hervorbringt, sondern auch, dass dieses Spectrum innerhalb sehr weiter Grenzen unabhängig von der Natur der Flamme ist. Sie wandten zu letzterem Zwecke folgende Flammen an, denen die von den Verfassern berechneten Temperaturen beigesetzt sind:

eine Schwefelflamme	1820° C
eine Schwefelkohlenstoffflamme .	2195° C
eine Leuchtgasflamme	2350° C
eine Kohlenoxydgasflamme . .	3042° C
eine Wasserstoffflamme in der Luft	3259° C
eine Knallgasflamme	8061° C

Die Verbindungen wurden an einem Platindraht in die Flamme gebracht; dadurch und indem man den elektrischen Funken eines Ruhmkorf'schen Apparates zwischen dem aus den Metallen gebildeten Elektroden überschlagen liess, fand sich, dass folgende Metalle und ihre Verbindungen durch die Beschaffenheit der Flammenspectren charakterisirt sind:

Natrium durch eine einzige helle gelbe Linie;

Kalium durch zwei Linien, eine im äussersten Roth, die andere im Violett;

Lithium durch eine helle Linie im Roth und eine sehr schwache im Orange;

Strontium durch die Abwesenheit der grünen Streifen, durch sechs rothe und eine blaue Linie;

Calcium durch zwei sehr intensive Linien, die eine im Grün, die andere im Orange;

Barium durch sehr charakteristische Linien im Grün.

Diese Beschaffenheit der Spectren, hinsichtlich deren Abbildung wir auf die Originalabhandlung verweisen müssen, ist um so deutlicher zu erkennen, je höher die Temperatur der Flamme und je geringer ihre eigene Leuchtkraft ist. Uebrigens sind diese Reactionen so ausserordentlich empfindlich, dass z. B. angenähert

von Natriumsalz	noch	$\frac{1}{3000000}$	Milligramm
- Lithiumsalz	-	$\frac{9}{1000000}$	- -
- Kalisalz	-	$\frac{1}{1000}$	- -
- Strontiumsalz	-	$\frac{6}{1000000}$	- -
- Calciumsalz	-	$\frac{6}{1000000}$	- -
- Bariumsalz	-	$\frac{1}{1000}$	- -

mit Sicherheit erkannt werden kann.

Die Verfasser des genannten Aufsatzes fanden ferner, dass auch in einem Gemische obiger Alkali- und alkalischer Erdsalze das Charakteristische der einzelnen Spectra mithin der sie bildenden Körper, erkannt werden könne. Sonach empfehlen Kirchhoff und Bunsen die Beobachtung der Spectren von Flammen, in die man z. B. Mineralien oder die aus ihnen im Platintiegel mittels Fluorwasserstoffsäure dargestellten schwefelsauren Salze bringt, zur Untersuchung derselben auf Alkalien und alkalische Erden. Die Spectra der einzelnen Körper treten hierbei wegen der verschiedenen Flüchtigkeit derselben oft nach einander auf. Diese neue Methode empfiehlt sich deswegen sehr zum Gebrauche, weil die Menge der zu untersuchenden Substanz sehr klein zu sein braucht, weil die farbigen Streifen unberührt von fremden Einflüssen erscheinen und weil sie ein genaueres Mittel darbietet, sehr kleine Mengen von gewissen Substanzen aufzufinden, als man bisher hatte. So führten bis jetzt die Versuche zu dem Resultate, dass nicht nur Kalium und Natrium, sondern auch Lithium und Strontium zu den in geringer Menge vorkommenden, aber am häufigsten verbreiteten Stoffen gehören.

Was den schon früher in dieser Zeitschrift erwähnten merkwürdigen Satz anbelangt, dass die hellen Streifen Licht von derselben Farbe absorbiren, so ist derselbe aufs Neue bestätigt worden, indem das Licht von einem weissglühenden Platindraht durch eine mit Kochsalz imprägnirte Alkoholflamme geleitet wurde; die gelbe Natriumlinie verwandelte sich augenblicklich in die dunkle Frauenhofersche Linie *D*. Desgleichen ist es den Verfassern gelungen, die hellen Linien von Kalium, Strontium, Calcium, Barium durch Sonnenlicht in dunkle Linien umzukehren. Dr. Kahl.

IV.

Zur Geometrie der Lage.

Von M. SATTELBERGER,

Lehramtscandidat zu Erlangen.

---

§. 1.

Sind $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ die Gleichungen zweier Curven der n^{ten} Ordnung, und verbinden wir dieselben nach dem Vorgange **Plückers** zur Gleichung $A_1 + \mu A_2 = 0$, wo μ eine beliebige Constante bedeutet, so ist $A_1 + \mu A_2 = 0$ die Gleichung wieder einer Curve der n^{ten} Ordnung, und zwar geht diese durch die sämmtlichen (n^2) Schnittpunkte der beiden ersten Curven der n^{ten} Ordnung. Durch die n^2 Schnittpunkte zweier Curven der n^{ten} Ordnung gehen also stets unendlich viele Curven derselben Ordnung.

Eine Curve der n^{ten} Ordnung ist bestimmt im Allgemeinen durch $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte; es ist aber

$$\frac{n(n+3)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n \cdot 3}{2}, \text{ und}$$

$$n^2 = \frac{n^2}{2} + \frac{n^2}{2};$$

somit ist $\frac{n(n+3)}{2} >, =$ oder $< n^2$ je nachdem $n <, =$ oder > 3 ist. Es wird sich daher aus der oben gemachten Bemerkung, dass die n^2 Schnittpunkte zweier Curven der n^{ten} Ordnung niemals im Stande sind eine Curve dieser Ordnung zu bestimmen, sondern stets unendlich viele zulassen, — für diejenigen Curven, deren Ordnung höher ist als die zweite, ein Satz ableiten lassen; durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der Schnittpunkte zweier Curven der n^{ten} Ordnung lassen sich stets unendlich viele Curven dieser Ordnung legen; obiger Bemerkung zufolge sind nun die noch übrigen der n^2 Schnittpunkte so beschaffen, dass sie zu jenen $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ hinzugezogen, gegen die Regel

immer noch unendlich viele Curven der n^{ten} Ordnung zulassen; man kommt hiedurch auf die Vermuthung, es möge folgender Satz gelten:

> Legt man durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der n^2 Schnittpunkte zweier Curven der n^{ten} Ordnung eine neue Curve der n^{ten} Ordnung, so geht diese stets durch alle jene n^2 Schnittpunkte.

Es ist z. B. für $n=3$ $n^2=9$ und $\frac{n(n+3)}{2} - 1 = 8$,

„ $n=4$ $n^2=16$ „ $\frac{n(n+3)}{2} - 1 = 13$,

„ $n=5$ $n^2=25$ „ $\frac{n(n+3)}{2} - 1 = 19$,

u. s. f.

Ueberhaupt ist

$$n^2 - \left(\frac{n(n+3)}{2} - 1\right) = \frac{n^2 - 3n + 2}{2} = \frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Der letzte Ausdruck ist aber für $n = 1$ und $= 2$ $= 0$, für $n =$ oder > 3 ist er positiv.

Der obige Satz lässt sich nun wie folgt beweisen:

Die Coordinaten jener $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ ersten Schnittpunkte seien x', y', $x'', y'', x''', y''', \ldots\ldots x^{(p)} y^{(p)}$; soll eine Curve der n^{ten} Ordnung durch diese Punkte gehen, und bezeichnet man die Gleichung der Curven n^{ter} Ordnung mit

$$f(x, y) = 0,$$

so können wir von den $\frac{n(n+3)}{2}$ in dieser Gleichung vorkommenden Coefficienten einen einzigen beliebig annehmen, und zur Bestimmung der $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ übrigen haben wir die $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Gleichungen

$$f(x'y') = 0,\ f(x''y'') = 0,\ f(x'''y''') = 0, \ldots.\ f(x^{(p)}y^{(p)}) = 0.$$

Geben wir jenem ersten beliebig anzunehmenden Coefficienten jeden möglichen Werth, so erhalten wir alle durch jene $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Punkte legbaren Curven der n^{ten} Ordnung. Verbinden wir aber die Gleichungen $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ der beiden gegebenen Curven n^{ter} Ordnung zur Gleichung $A_1 + \mu A_2 = 0$, so erfüllen die Coefficienten dieser Gleichung ebenfalls jene $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ Bedingungsgleichungen

$$f(x'y') = 0,\ f(x''y'') = 0,\ f(x'''y''' = 0, \ldots\ldots f(x^{(p)}y^{(p)}) = 0,$$

und indem wir dem μ alle möglichen Werthe beilegen, kann jenem einen *Coefficienten* ebenfalls jeder verlangte Werth ertheilt werden; die Glei-

chungen sind bezüglich der Coefficienten linear; wir kommen also auf beide Weisen ganz auf die nämlichen Curven der n^{ten} Ordnung, d. h. die in der Gleichung

$$A_1 + \mu A_2 = 0$$

enthaltenen Curven n^{ter} Ordnung sind alle möglichen Curven dieser Ordnung, welche überhaupt durch jene $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der n^2 Schnittpunkte legbar sind. Der obige Satz hat also in der That Gültigkeit.

Auch ohne Zuhülfenahme der Grösse μ kann man auf diesen Satz kommen. Nimmt man auf einer Curve der n^{ten} Ordnung $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte an, und setzt ihre Coordinatenwerthe in die allgemeine Gleichung der Curven n^{ter} Ordnung ein, so werden die erhaltenen $\frac{n(n+3)}{2}$ Bedingungsgleichungen im Allgemeinen zur Bestimmung der $\frac{n(n+3)}{2}$ Coefficienten jener Gleichung hinreichen, und zwar auf die der gegebenen Curve entsprechenden Coefficienten hinführen; geht aber durch diese $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte noch eine Curve der n^{ten} Ordnung, so müssen, da jene allgemeine Gleichung bezüglich der Coefficienten linear ist, also zwei Werthe eines Coefficienten sich nicht ergeben können — nothwendig die $\frac{n(n+3)}{2}$ Gleichungen unendlich viele Lösungen zulassen bezüglich der Coefficienten, indem sie sich auf wenigstens $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ reduciren, so dass also eine Curve der n^{ten} Ordnung, welche durch $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der n^2 Schnittpunkte zweier anderer Curven der n^{ten} Ordnung geht, jeden dieser n^2 Schnittpunkte enthält.

Es werden nun verschiedene Anwendungen dieses Satzes folgen.

I. Von den den Curven höherer Ordnung einbeschriebenen Vielseiten.

§. 2.

Die einfachste Curve der n^{ten} Ordnung ist das System von n Geraden.

Zwei solche Systeme von n Geraden wollen wir ein $2n$ Seit nennen, und im Nachfolgenden unter $2n$ Seit nichts weiter als das verstehen. Die Seiten des $2n$ Seits sind natürlich jene $2n$ Gerade selbst; unter den Ecken des $2n$ Seits aber wollen wir jene n^2 Punkte verstehen, wo immer eine Gerade des einen Systems eine Gerade des andern trifft. Sollten die Ausdrücke Seite der einen Art, Seite der andern Art vorkommen, so sind hiemit nur Gerade des einen, Gerade des andern Systems gemeint. In einigen Figuren sind die Seiten der einen Art mit ('), die der andern mit ('') bezeichnet.

Es wird nun gelten der

Satz. Legt man durch $\frac{n(n+3)}{2}-1$ der n^2 Ecken eines $2n$ Seits eine Curve der n^{ten} Ordnung, so geht sie auch durch die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Ecken des $2n$ Seits.

Es entsteht nun aber die umgekehrte Frage, ob man einer Curve n^{ter} Ordnung ein solches $2n$ Seit einbeschreiben könne dergestalt, dass $\frac{n(n+3)}{2}-1$ seiner Ecken auf ihr liegen; es müssten dann die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Ecken von selbst auf sie fallen. (Die Curven I. und II. Ordnung sind natürlich von dieser Betrachtung auszuschliessen.)

§. 3.

Einbeschreibung des 6 Seits in die Curve III. Ordnung.

Um einer Curve III ein 6 Seit so einzubeschreiben, dass 8 seiner 9 Ecken auf sie fallen, verfahre man wie folgt:

Durch den Punkt A (Fig. 1, Taf. III) der Curve III ziehe man AM und AN; diese mögen die Curve III noch in B und C, und D und E schneiden; F sei ein weiterer beliebiger Curvenpunkt, und man ziehe BF und DF, welche die Curve noch in G und H schneiden; zieht man jetzt noch EG und CH, so hat man ein 6 Seit, von welchem 8 Ecken (A, B, C, D, E, F, G, H) auf der Curve III liegen; es liegt also auch die 9te Ecke auf ihr, d. h. die Geraden EG und CH schneiden sich auch auf der Curve III.

Es gilt also der

Satz. Ist eine Curve III gegeben, so kann man zweimal 3 Gerade so ziehen, dass sich 8 von den 9 Schnittpunkten je einer Geraden der einen Art mit einer Geraden der andern auf der Curve III befinden, der 9te fällt dann von selbst auf sie.

Von diesem Satze wollen wir nun einige besondere Fälle betrachten.

1) Besteht die Curve III aus einer Curve II und einer Geraden, so geht unser Satz in den bekannten Satz von dem dem Kegelschnitte einbeschriebenen gemeinen Sechsecke über. (Dass sich nämlich die Gegenseiten des dem Kegelschnitte einbeschriebenen gemeinen Sechseckes auf Einer Geraden schneiden.)

2) Lassen wir die beiden Punkte A und D zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Zieht man durch den Punkt P (Fig. 2, Taf. III) einer Curve III zwei Gerade PM und PS, welche die Curve noch in B und C, und F und H treffen, zieht man ferner BF und CH, welche die Curve noch in G und in

I treffen, zieht man endlich GI und trifft diese die Curve noch in E, so ist PE die Tangente der gegebenen Curve III im Punkte P.

Lassen wir die Geraden ABC und DFH (Fig. 1, Taf. III) allmälig zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Zieht man an eine Curve III 3 Tangenten, deren 3 Berührungspunkte in Einer Geraden liegen, so liegen auch diejenigen 3 Punkte, wo jede der 3 Tangenten die Curve nochmals schneidet in Einer Geraden.

Rückt die Gerade, in der die 3 Berührungspunkte liegen, ins Unendliche, so werden jene 3 Tangenten die 3 Asymptoten, und es gilt also der

Zusatz. Die 3 Schnittpunkte einer Curve III mit ihren 3 Asymptoten liegen in Einer Geraden.

Ebenso gilt der umgekehrte

Satz. Zieht man durch zwei von drei, in Einer Geraden liegenden, Punkten einer Curve III je eine Tangente an dieselbe, so geht die Gerade, welche die zwei Berührungspunkte verbindet, durch den Berührungspunkt einer durch den dritten Punkt gehenden Tangente.

Lassen wir die 3 Punkte A, D, E in einen einzigen zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Zieht man durch einen Inflexionspunkt einer Curve III 3 Gerade, welche die Curve III noch in B und C, F und H und G und I schneiden, und liegen B, F und G in Einer Geraden, so ist dies auch mit C, H und I der Fall.

Ferner

Satz. Zieht man durch einen Inflexionspunkt einer Curve III eine Gerade, welche die Curve noch in B und C schneidet, zieht man dann in B und C die Tangenten an die Curve und schneiden diese noch in G und in I, so geht die Gerade GI durch jenen Inflexionspunkt.

Lassen wir endlich die 3 Geraden ABC, DFH und EG zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Die 3 Inflexionspunkte einer Curve III liegen in Einer Geraden.

§. 4.

Einbeschreibung des 8 Seits in die Curve IV. Ordnung.

Es soll der Curve IV das 8 Seit so einbeschrieben werden, dass 13 seiner 16 Ecken auf sie fallen.

1) Man ziehe (Fig. 3, Taf. III) AM und AN, welche die Curve noch in B, C und einem dritten Punkte und D und E und einem dritten Punkte schneiden mögen; F liege auf der Curve, man ziehe nun ferner BF, welche noch in H und V, und DF, welche noch in G und I schneide; dann CG, welche noch in W und EH, welche noch in K schneiden möge; zieht man nun noch IK und VW, so hat man ein 8 Seit, allein auf der Curve IV liegen blos 12 seiner Eckpunkte.

Oder man ziehe (Fig. 4, Taf. III) *MN* und *PQ* als Seiten der einen Art beliebig, treffen diese die Curve IV in *A*, *B*, *C* und *L*, und in *D*, *F*, *G* und *I*, so ziehe man *AD*, *BF*, *CG* und *LI*; treffen die letztern Geraden noch in *H* und *V* und *S* und *W*, und zieht man noch *HS* und *VW*, so hat man wieder ein 8 Seit, von dem aber ebenfalls blos 12 Ecken auf der Curve IV liegen.

2) Wir nehmen nun eine Curve IV an, welche aus einer Curve III und einer Curve I besteht, geben jedoch blos die Curve III; man kann nun das 8 Seit so verzeichnen, dass 11 seiner Ecken auf die Curve III fallen; dies geschieht wie folgt:

Man ziehe durch den Punkt *A* (Fig. 5, Taf. III) der Curve III *AM* und *AN*, welche die Curve III noch in *B* und *C*, und *D* und *E* schneiden mögen, ziehe *BF*, *DF*, *CG* und *EG*, so dass *F* und *G* auf der Curve III liegen; diese Geraden mögen die Curve III noch in *K*, *H*, *L* und *I* treffen; zieht man jetzt noch *KL* und *HI*, so hat man ein 8 Seit, von dessen 16 Ecken 11 auf der Curve III liegen; zieht man nun durch 2 der noch übrigen Ecken, z. B. durch *X* und *Y*, eine Gerade, so bildet diese mit der gegebenen Curve III eine Curve IV, und es liegen 13 Ecken unseres 8 Seits auf dieser Curve IV; es liegen also auch die übrigen 3 auf ihr, nämlich noch 2 Ecken fallen auf die Gerade *XY* und die letzte Ecke fällt noch auf die gegebene Curve III.

Wir haben also den

Satz. Einer Curve III lässt sich stets ein 8 Seit so einbeschreiben, dass 11 seiner Eckpunkte auf sie fallen, ein 12ter fällt dann von selbst auf sie, und die übrigen 4 liegen in Einer Geraden.

3) Nehmen wir eine Curve IV, welche aus 2 Curven II besteht, und geben wir blos die eine Curve II, so können wir dieser offenbar ein 8 Seit so einbeschreiben, dass 8 Ecken desselben auf sie fallen; durch 5 weitere Ecken geht eine andere Curve II, also liegen auf der von beiden Curven II gebildeten Curve IV 13 Ecken des 8 Seits.

Es gilt also der

Satz. Beschreibt man einer Curve II ein 8 Seit so ein, dass 8 seiner Ecken auf ihr liegen, so liegen die übrigen 8 Ecken wieder auf einer Curve II.

4) Nehmen wir endlich eine Curve IV, welche aus einer Geraden und einer Curve III besteht, und geben blos die Gerade, so können wir jederzeit ein 8 Seit so zeichnen, dass 4 seiner Ecken auf der Geraden liegen; da durch 9 der übrigen eine Curve III gelegt werden kann, so liegen auf der von der Geraden und der Curve III gebildeten Curve IV 13 Ecken des 8 Seits; wir haben also den

Satz. Construirt man ein 8 Seit, so dass 4 seiner Ecken auf Einer Geraden liegen, so liegen die übrigen 12 Ecken auf einer Curve III. Ordnung.

5) Besteht die in 2 dieses § vorkommende Curve III aus einer Curve II und einer Geraden, so erhalten wir zum dortigen Satze den folgenden

Zusatz. Construirt man ein 8 Seit derart, dass 8 von seinen Ecken

auf einer Curve II und 3 davon auf Einer Geraden liegen, so fällt auf diese Gerade noch ein 4[ter] Eckpunkt, und die 4 letzten Eckpunkte liegen wieder auf Einer Geraden.

Diese Construction kann nur auf zweierlei Weise gemacht werden: Entweder man zeichnet in einen Kegelschnitt ein gewöhnliches Viereck und lässt 3 von seinen 4 Seiten um 3 in Einer Geraden liegende Punkte sich drehen; dies führt auf den bekannten Satz, dass sich dann auch die 4[te] Seite um einen Punkt dieser Geraden drehe; es liegen aber auch diejenigen 4 Punkte, wo immer eine Seite des alten Viereckes die Gegenseite der ihr im neuen Vierecke entsprechenden Seite trifft, stets in gerader Linie. —

Die andere Art der Construction des in Rede stehenden 8 Seits ist folgende: Man nehme auf einer Curve II die 7 Punkte A, B, C, D, E, F und G (Fig. 6, Taf. III) an; AB und FG, sowie BC und EF mögen sich auf der Geraden m scheiden; schneiden CD und DE die m in V und W, so ziehe man AV und GW, so werden sich diese 2 Geraden wieder auf der Curve II schneiden. Was die 4 andern Punkte betrifft, welche in Einer Geraden liegen sollen, so sind diese, wenn man den Schnitt von AV und GW mit H bezeichnet, der Schnittpunkt von AB und DE, der von BC und GH, der von CD und FG, und der von AH und EF.

§. 5.

Gebrauch eines Doppelpunktes bei Einbeschreibung des $2n$ Seits in die Curve n^{ter} Ordnung.

Einer gegebenen Curve IV kann man im Allgemeinen nach 1 des vorigen § das 8 Seit nicht einbeschreiben, so dass 13 seiner Ecken auf sie fallen. Geht man aber hiebei von einem Doppelpunkte (welchen die Curve IV freilich nur dann hat, wenn sie aus Curven niederer Ordnungen, z. B. aus einer Curve III und einer Geraden besteht) aus, so gelingt diese Einbeschreibung.

1) Im Doppelpunkte K fallen 4 Ecken des einzubeschreibenden $2n$ Seits zusammen. Nachdem wir die Seiten der einen Art AB und CD (Fig. 7, Taf. III) gezogen haben, sind die 2 andern Seiten AD und BC im Allgemeinen bestimmt; liegen aber die 4 Punkte A, B, C und D unendlich nahe beisammen, so kann man schon durch unendlich kleine Verschiebung oder Drehung der Seite AB oder CD der 3[ten] Seite AD jede beliebige Richtung geben; ist dieser letzten Seite aber einmal eine bestimmte Richtung gegeben, so kann man die Richtung der 4[ten] Seite BC nur durch endliche Drehungen der Seiten AB, CD oder AD um Endliches ändern. Wir haben also den

Satz. Gehen wir bei Einbeschreibung des $2n$ Seits von einem Doppelpunkte der Curve aus, so dürfen wir durch ihn nicht nur 2 Seiten der einen Art, sondern auch noch eine Seite der andern Art beliebig annehmen, und

dürfen dennoch voraussetzen, dass die beiden dadurch (im Doppelpunkte) entstehenden Eckpunkte des $2n$ Seits auf der Curve liegen.

2) Gehen wir jetzt auf die zweite Figur des vorigen § zurück; wir können jetzt auch den Punkt, wo sich BF und HS schneiden, auf die Curve fallen lassen, sobald sie einen Doppelpunkt hat. Es sollen dann A, D, B und F in diesem Doppelpunkte P (Fig. 8, Taf. III) zusammenfallen; wir werden ziehen PM und PQ; diese mögen noch in C und L und in G und I schneiden; wir ziehen nun CG und LI; diese mögen die Curve IV noch in H und V und in S und W treffen; jetzt ziehen wir HS, diese treffen noch in T und K; zieht man nun noch PT und PK, sowie VW, so hat man ein 8 Seit, von welchem 13 Ecken auf der Curve IV liegen. Es liegen nämlich 3 Ecken im Doppelpunkte P auf der Curve IV, indem wir annehmen dürfen, dass die 2 Ecken A und D, welche PM und PQ mit PT bilden, auf der Curve liegen; ferner können wir uns PK durch den einen der beiden andern in P noch liegenden Punkte B und F gehend denken. Es liegen ferner noch die 10 Ecken C, L, G, I, H, S, V, W, T und K auf der Curve IV. — Es müssen sich jetzt auch noch PT und VW, sowie PK und VW auf der Curve IV schneiden.

Im folgenden § sollen einige besondere Anwendungen des in diesem § Vorgekommenen, besonders der in 2 gemachten Construction gegeben werden.

§. 6.

1) Es seien von einer Curve III die Punkte P, C, L, G, I, S und V (Fig. 9, Taf. III) gegeben, und zwar sollen P, C und L, ferner P, G und I, ferner C, G und V und endlich L, I und S immer in Einer Geraden liegen; die durch P gehende Gerade PN schneide die Curve III noch in T, so ist, wenn S, V und T in Einer Geraden liegen, PN die Curventangente in P. (S. §. 3, Nr. 2.) Ist dies aber nicht der Fall, so ist es leicht den dritten Schnittpunkt von PN mit der Curve III zu finden. Man ziehe nämlich TS, sie möge die CV noch in H schneiden; zieht man nun PH, welche die LI in W trifft, so schneidet die VW die PN im gesuchten dritten Schnittpunkte von PN mit der Curve III. (Die Curve III und die Gerade PH sind nämlich als eine Curve IV zu betrachten, welche in P einen Doppelpunkt hat.) Und so kann man von jeder durch P gehenden Geraden, wenn man nur den einen ihrer beiden andern Schnittpunkte mit der Curve III kennt, sogleich durch blos lineare Construction auch den zweiten derselben finden. — (Auch müssen HS und VW die Curve III noch in 2 Punkten schneiden, welche mit P in gerader Linie liegen.)

2) Um eine zweite Anwendung der Construction des vorigen § zu machen, wollen wir als Curve IV zwei sich schneidende Kreise annehmen. Ihr einer Schnittpunkt sei P (Fig. 10, Taf. III); so ziehe man beliebig die Geraden PM und PQ, welche die Kreise noch in C und L und G und I treffen

mögen; sodann ziehe man CG und LI, diese sollen in H und V und S und W treffen; man ziehe nun HS und VW, treffen diese die Kreise noch in T und K und T' und K', so liegen sowohl T und K' als auch T' und K mit P in gerader Linie.

3) Als drittes Beispiel wollen wir uns eine aus 4 Geraden bestehende Curve IV denken; zwei dieser Geraden seien MN und RQ (Fig 11, Taf. III). Wir ziehen durch den beliebigen Punkt P die Geraden PV, PW, PX und PY, welche die MN und RQ in B und C, D und E, F und G, H und I schneiden; zieht man noch BE, CD, FI und GH, so bilden die letztgezogenen 8 Geraden ein 8 Seit; schneiden sich CD und FI in K, CD und GH in L, so ziehe man PK und PL, so bilden MN, RQ, PK und PL eine Curve IV, welche in P einen Doppelpunkt hat. Von den Ecken des erwähnten 8 Seits liegen aber 13 auf dieser Curve IV, nämlich drei im Doppelpunkte, und dann noch die weitern 10 Ecken B, C, D, E, F, G, H, I, K und L; es müssen also alle 16 Ecken auf der Curve liegen, d. h. schneiden sich GH und FI mit BE in K' und L', so muss K' auf PK und L' auf PL liegen.

Wir haben also folgenden

Satz. Hat man 2 gewöhnliche Vierecke, welche 2 Gegenseiten MN und QR und in P den Schnittpunkt der beiden andern Gegenseiten gemeinschaftlich haben, so liegen die 4 Punkte K, L, K' und L', wo immer eine Diagonale des einen Vierecks eine Diagonale des andern schneidet — mit jenem Punkte P in zwei Geraden.

§. 7.

Es sollte jetzt der Curve V. Ordnung das 10 Seit einbeschrieben werden, so dass 19 seiner 25 Ecken auf dieselbe fielen. Wir wollen aber, ehe wir an diese Aufgabe gehen, in diesem und den zwei folgenden §§ noch einige andere Untersuchungen machen.

Es soll nämlich erstens untersucht werden, wie viel Ecken des $2n$ Seits man auf die Curve der m^{ten} Ordnung, wo $m =$ oder > 4 und $n =$ oder $> m$ ist, verlegen kann.

Man ziehe die Geraden $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ (Fig. 12, Taf. III) als Seiten der einen Art beliebig; sie mögen die Curve m^{ter} Ordnung in B und C, und D und E treffen; man ziehe BD und CE; treffen diese in F und G, und H und I, so ziehe man FH und GI; treffen diese die Curve in B_1 und C_1, und D_1 und E_1, so ziehe man B_1D_1 und C_1E_1; treffen diese in F_1 und G_1, und H_1 und I_1, so ziehe F_1H_1 und G_1I_1; u. s. f.

Auf diese Weise erhält man ein $2n$ Seit, wo n gerade ist; soll n ungerade sein, so ziehe man, wenn $\alpha\beta$ und $\gamma\delta$ die gegebene Curve noch in M und N treffen, MN, und wenn B_2D_2 und C_2E_2 noch in Q und R treffen, QR.

Man sieht, dass jederzeit $4n-4$ Ecken des $2n$ Seits auf die Curve der m^{ten} Ordnung verlegt werden können.

Fallen M und N in einem Doppelpunkte zusammen, und ist n gerade, so kann man die Seite MN so ziehen, dass sie durch B_2 geht und kann ausserdem noch den Doppelpunkt MN mit C_2 verbinden. Auf der ersten der beiden letztgezogenen Seiten liegen dann 3 Ecken.

Wir haben also jetzt den

Satz. Von den n^2 Ecken eines $2n$ Seits kann man auf die Curve der m^{ten} Ordnung, wo $m =$ oder > 4 und $\gtrless n$ ist, stets $4(n-1)$ Ecken fallen lassen. Und geht man bei der Einbeschreibung von einem Doppelpunkte der gegebenen Curve aus, so kann man noch eine Ecke mehr, nämlich $4n-3$ auf sie verlegen. Soll z. B. der Curve IV das 8 Seit einbeschrieben werden, so können wir hienach $4(4-1) = 12$ Ecken auf die Curve IV fallen lassen. Mit Hülfe des Doppelpunktes $4 . 4 - 3 = 13$.

Soll der Curve V das 10 Seit einbeschrieben werden, so können wir $4(5-1) = 16$ Ecken auf die Curve V fallen lassen; es müssten aber 19 sein, wenn die übrigen von selbst auf sie fallen sollten.

§. 8.

Es soll untersucht werden, wie viele Ecken eines $2n$ Seits, wo $n =$ oder > 3 ist, man auf die Curve der III. Ordnung verlegen kann.

Satz. Man kann auf verschiedene Weise von den n^2 Ecken eines $2n$ Seits, wo $n =$ oder > 3 ist, $3n-1$ auf die Curve III fallen lassen.

Beweis. 1) Man zeichne n Seiten beliebig, jedoch so, dass immer die folgende mit der vorhergehenden sich auf der Curve III schneide; zugleich bezeichne man diese Seiten abwechselnd mit (′) und (″); ebenso fahre man fort mit der $n+1^{\text{ten}}$ Seite bis zur $2n^{\text{ten}}$, lasse aber von dieser 2ten Folge von Seiten jede zugleich durch einen zweiten auf der Curve liegenden Punkt einer der Seiten der ersten Folge gehen, und zwar derart, dass hiebei immer zwei verschiedenartig bezeichnete Seiten sich treffen.

Man kann z. B., wenn n eine ungerade Zahl ist, da dann die n^{te} Seite dieselbe Bezeichnung erhält wie die erste, die $n+1^{\text{te}}$ mit der ersten, die $n+2^{\text{te}}$ mit der zweiten u. s. f., die $2n^{\text{te}}$ mit der n^{ten} sich wieder auf der Curve III schneiden lassen.

Ist n gerade, so können wir die $n+1^{\text{te}}$ mit der zweiten, die $n+2^{\text{te}}$ mit der ersten, die $n+3^{\text{te}}$ mit der vierten, die $n+4^{\text{te}}$ mit der dritten, endlich die $2n-1^{\text{te}}$ mit der n^{ten}, die $2n^{\text{te}}$ mit der $n-1^{\text{ten}}$ sich noch auf der Curve III schneiden lassen.

Und man sieht, dass immer $3n-1$ Eckpunkte des $2n$ Seits auf die Curve III fallen.

2) Eine zweite Art der Einbeschreibung, welche aber nur stattfinden kann, wenn n gerade ist, besteht darin, dass man die Figur in 1) wenn man n Seiten gezogen hat, sich schliessen lässt; und alsdann noch ein zweites gemeines, sich jedoch nicht schliessendes n Seit zeichnet, dessen Seiten sich

zu den Seiten des ersten, geschlossenen, ebenso verhalten, wie in 1) die Seiten der zweiten Folge zu denen der ersten, d. h. wenn man in beiden gemeinen n Seiten die Seiten abwechselnd mit (′) und (″) bezeichnet, so lassen wir jede Seite des zweiten n Seits mit einer entgegengesetzt bezeichneten des ersten auf der Curve III sich schneiden. Auf diese Weise fallen offenbar wieder $3n-1$ Eckpunkte des $2n$ Seits auf die Curve III.

3) Eine dritte Art der Einbeschreibung endlich ist die folgende: Man ziehe die Seiten MN und PQ (Fig. 13, Taf. III), welche die Curve III in A, B, C und D, E, F schneiden mögen; jetzt ziehe man AD, BE und CF; diese mögen noch in G, H und I schneiden; jetzt ziehe man RS, welche in A_1, B_1, C_1 schneide, und ziehe nun GA_1, HB_1, IC_1; diese mögen in G_1, H_1, I_1 schneiden; man ziehe nun beliebig TU, welche in A_2, B_2, C_2 schneide, und jetzt G_1A_2, H_1B_2, I_1C_2, diese mögen noch in G_2, H_2, I_2 schneiden; man ziehe nun VW, welche in A_3, B_3, C_3 schneide, und dann ziehe man G_2A_3, H_2B_3, I_2C_3, u. s. f. Will man mit G_p, H_p, I_p schliessen, so ziehe man G_pH_p als Schlussseite.

Ist p gerade, so denke man sich die Schlussseite für den Augenblick von G_p, H_p nach G, H versetzt, und man sieht sogleich, dass man eben so viel mit (′), als mit (″) bezeichnete Gerade hat, und zwar von jeder Art

$$3+4.\frac{p}{2} \quad \text{oder} \quad 2p+3.$$

Ist aber p ungerade, so ist die Zeichnung symmetrisch bezüglich der mit (′) und der mit (″) bezeichneten Geraden, und zwar hat man von jeder Art

$$1+4.\frac{p+1}{2} \quad \text{oder wieder} \quad 2p+3.$$

Man erhält also immer ein $2(2p+3)$ Seit.

Es liegen endlich sämmtliche mit Buchstaben bezeichnete Ecken weniger der einzigen I_p auf der Curve III. Auf jeder mit (′) oder auf jeder mit (″) bezeichneten Seite liegen 3 Eckpunkte auf der Curve III, mit Ausnahme der letzten Seite, von welcher nur 2 Ecken auf die Curve fallen. Im Ganzen liegen also wieder $3n-1$ Ecken auf der Curve III.

Anm. Die Punkte $G, H, I, G_1, H_1, I_1, G_2, H_2, I_2, \ldots$ werden je in Einer Geraden liegen.

§. 9.

Ist endlich gefragt, wie viel Ecken des $2n$ Seits man auf eine gegebene Curve II. Ordnung, oder wie viel man auf eine Gerade fallen lassen kann, so sieht man sogleich, dass man auf die Curve II stets $2n$ und auf die Gerade stets n Ecken verlegen kann.

Bezüglich der Einbeschreibung des $2n$ Seits in die Curve der m^{ten} Ordnung, wo $n =$ oder $> m$ ist, so dass möglichst viele der n^2 Eckpunkte auf die Curve fallen, gilt also Folgendes:

Auf die Curve I oder die Gerade können wir fallen lassen n Ecken,
„ „ „ II können wir verlegen $2n$ Ecken,
„ „ „ III „ „ „ $3n-1$ Ecken,
„ „ „ IV. und höherer Ordnung können wir verlegen $4n-4$ Ecken; mit Hülfe des Doppelpunktes, bei geradem n, $4n-3$ Ecken.

§. 10.

Gehen wir nun dazu über der Curve V. Ordnung das 10 Seit einzubeschreiben, so dass 19 seiner 25 Ecken auf sie fallen.

1) Schon am Schlusse des §. 7 sahen wir, dass man bei Einbeschreibung des 10 Seits in die Curve V von den 25 Ecken desselben blos 16 auf die Curve V fallen lassen kann.

2) Nimmt man eine Curve V, welche aus einer Curve IV und einer Geraden besteht, und ist blos die Curve IV gegeben, so können wir auf die letztere 16 Ecken verlegen; durch zwei der noch übrigen Ecken könnten wir die Gerade ziehen, allein es fielen dann doch blos 18 Ecken auf die Curve V, während wir 19 brauchen.

Besteht aber die Curve IV aus einer Geraden und einer Curve III, welche einen Doppelpunkt hat, so gelingt die Einbeschreibung derart, dass 17 Ecken des 10 Seits auf die Curve IV fallen.

Man verfahre folgendermassen: Ist V (Fig. 14, Taf. III) der Doppelpunkt, so ziehe man VM und VN als Seiten der einen Art beliebig, sie mögen die Curve III noch in A und B, die noch gegebene Gerade in R und S schneiden; nun ziehe man die Hülfslinie AB, welche die Curve III noch in μ treffe; ferner μS und BR, diese mögen die Curve III noch in G, H und E, F treffen; jetzt ziehe man FH und EG; treffen diese die Curve III noch in C und D, so werden C und D mit A in gerader Linie liegen *); man ziehe also ACD. Schneidet die DG die Gerade RS noch in P, die CH diese Gerade noch in Q, so ziehe man VP und VQ; schneiden diese die Curve III noch in I und K, so ziehe man endlich noch IK, so hat man jetzt ein 10 Seit, von dessen 25 Ecken 3 im Doppelpunkte V auf der Curve IV liegen, während die übrigen auf der Curve IV liegenden sind: A, B, C, D, E, F, G, H, R, S, P, Q, I und K; im Ganzen liegen also 17 Ecken auf der Curve IV; ziehen wir nun noch durch zwei andere Ecken, z. B. durch die zwei andern Punkte, wo DG und CH mit VP und VQ sich schneiden, eine Gerade, so liegen auf der von dieser Geraden und der gegebenen Curve IV gebildeten Curve V 19, folglich alle 25 Ecken unseres 10 Seits.

3) In der vorigen Nummer wurde eigentlich die Aufgabe gelöst:

Aufgabe. Einer gegebenen Curve III, welche einen Doppelpunkt hat, ein 10 Seit so einzubeschreiben, dass auf sie und eine gegebene nicht

*) Die Punkte A, B, μ, G, E, H, F, C und D liegen nämlich sämmtlich auf der gegebenen Curve III.

durch den Doppelpunkt gehende Gerade 17 Ecken des 10 Seits fallen; wir können auf die Curve III selbst 13 Ecken (3 davon im Doppelpunkte) fallen lassen, auf jene gegebene Gerade aber 4; es fallen dann auf die gegebene Curve III noch zwei weitere Ecken (davon eine im Doppelpunkte), auf jene Gerade noch eine Ecke, und die 5 letzten Ecken endlich fallen wieder in Eine Gerade.

Da aber eine Curve III nur dann einen Doppelpunkt hat, wenn sie aus einer Curve II und einer Geraden besteht, so muss die vorige Aufgabe eigentlich so ausgesprochen werden:

Aufgabe. Einer Curve II ein 10 Seit so einzubeschreiben, dass die 15 nicht auf ihr liegenden Ecken desselben sich auf 3 Gerade vertheilen, von welchen 2 gegeben sind. Eine der gegebenen Gerade muss die Curve II schneiden, und wir müssen gestatten, dass in diesem Schnittpunkte 4 Ecken des einzubeschreibenden 10 Seits zusammenfallen.

4) Nehmen wir eine Curve V, welche aus einer Curve III und einer Curve II besteht und ist blos die Curve III gegeben, so kann man nach §. 9 auf die Curve III 14 Ecken des 10 Seits fallen lassen, durch 5 der übrigen Eckpunkte geht ein Kegelschnitt, es liegen also dann 19 Ecken auf der Curve V, welche dieser Kegelschnitt mit der Curve III bildet; woraus folgt, dass alle 25 Ecken auf der Curve III und dem Kegelschnitte liegen.

Wir haben also den

Satz. Einer Curve III lässt sich stets ein 10 Seit so einbeschreiben, dass 14 seiner Ecken auf sie fallen; es fällt dann noch ein Eckpunkt auf sie und die übrigen 10 bilden einen Kegelschnitt.

5) Hat man eine Curve V, welche aus einer Curve III und einem Kegelschnitte besteht, und ist blos der Kegelschnitt gegeben, so kann man diesem stets ein 10 Seit so einbeschreiben, dass 10 Ecken desselben auf ihn fallen; da durch die 9 der übrigen Ecken eine Curve III gelegt werden kann, so liegen alle übrigen auf einer Curve III.

Es gilt also der

Satz. Beschreibt man einer Curve II ein 10 Seit derart ein, dass 10 seiner Ecken auf sie fallen, so liegen die 15 andern auf einer Curve III.

Ebenso ergiebt sich endlich der

Satz. Beschreibt man ein 10 Seit so, dass 5 seiner Ecken in gerader Linie liegen, so bilden die übrigen 20 eine Curve IV. Ordnung.

§. 11.

Eine dem Satze in Nr. 4 des vorigen § entsprechende Construction, wozu man noch 1 des §. 8 vergleiche, wäre z. B. die folgende:

Construction. 1) Man nehme als Curve III einen Kegelschnitt und eine Gerade MN (Fig. 15, Taf. III). Auf dem Kegelschnitte nehme man die 6 Punkte A, B, C, D, E, F beliebig an und verbinde sie durch die 5 Geraden

AB, *BC*, *CD*, *DE*, *EF*; diese mögen die Gerade *MN* in den Punkten B_1, C_1, D_1, E_1, F_1 schneiden; man ziehe nun FB_1, trifft diese den Kegelschnitt noch in *G*, so ziehe man GC_1, trifft diese noch in *H*, so ziehe man HD_1, trifft diese noch in *I*, so ziehe man IE_1, und trifft diese noch in *K*, so ziehe man KF_1, so wird diese Gerade den Kegelschnitt wieder in *A* treffen.

Ferner bezeichne man die Geraden *AB*, *CD*, ... *FG*, *GH*, ... der Reihe nach, wie man sie gezogen hat, abwechselnd mit (′) und (″), so werden die 10 Punkte, wo immer eine mit (′) und eine mit (″) bezeichnete Seite sich noch (ausser auf dem Kegelschnitte und auf *MN*) schneiden — auf Einem Kegelschnitte liegen. —

2) Die vorhin angenommene Curve III hat, wenn die Gerade *MN* den gegebenen Kegelschnitt in *V* und *W* schneidet, in *V* und *W* einen Doppelpunkt; wir wollen beide benützen. In den einen *V* wollen wir den Punkt C_1, in den andern *W* den Punkt E_1 verlegen; so fallen in den ersten noch die Punkte *B*, *G* und B_1, in den andern noch *E*, *K* und F_1. Die erste Seite *AB* und die letzte *KA* wollen wir anfangs ganz aus der Construction hinweglassen. Die vorige Construction geht dann in die folgende über:

Construction. 2) Man ziehe *VC*, *CD*, *DW* und *VH*, *HI*, *IW* (Fig. 16, Taf. III), so dass sich *CD* und *HI* auf *MN* schneiden; hierauf nehme man *F* beliebig an und ziehe *VF* und *WF*. (*BA* und *KA* sind jetzt bestimmt, vgl. 1 des §. 5.) Es müssen jetzt folgende 6 Punkte auf Einem Kegelschnitte liegen:

VC, *WI*	*FV*, *CD*	*FV*, *WI*
VH, *WD*	*FW*, *HI*	*FW*, *VC*.

Und nimmt man den Punkt *A* auf dem gegebenen Kegelschnitte so an, dass *VA* durch den Punkt geht, wo *HI* oder *WD* den zweiten Kegelschnitt zum zweiten Mal trifft, so liegen noch auf dem letztern die 3 Punkte:

VA, *WD* *WA*, *CD*
oder
VA, *HI* *WA*, *VH*.

§. 12.

Eine dem Satze in Nr. 4 des §. 10 entsprechende Construction, wozu man Nr. 3 des §. 8 vergleiche, wäre ferner die folgende:

Construction. Man beschreibe einer Curve II ein gemeines Sechseck ein, so werden sich die Gegenseiten desselben wie bekannt auf Einer Geraden schneiden; alsdann beschreibe man ihr noch ein solches Sechseck ein, welches mit dem ersten eine Seite gemeinschaftlich hat, und dessen Gegenseiten sich auf der nämlichen Geraden wie die des ersten schneiden; ferner bezeichne man die Seiten beider Sechsecke abwechselnd mit (′) und (″), und zwar derart, dass man der gemeinschaftlichen Seite in beiden Sechsecken entgegengesetzte Bezeichnung giebt; diese Seite endlich betrachte

man von nun an als gar nicht mehr vorhanden; so müssen jetzt die 10 Punkte, welche sich als Schnittpunkte je einer Seite des einen Sechsecks mit einer entgegengesetzt bezeichneten des andern ergeben, auf Einem Kegelschnitte liegen.

§. 13.

Besondere Art einer Curve III. Ordnung das 6 Seit einzubeschreiben.

Fallen in der ersten Zeichnung des §. 3 die 4 Punkte A, B, D, F in einem Doppelpunkte zusammen, so darf man nicht nur AM und DH, sondern auch noch AN beliebig ziehen. Ist also V (Fig. 17, Taf. III) der Doppelpunkt, so ziehe man VM, VP und VN; treffen diese die Curve III noch in C, H und E, so ziehe man CH, trifft diese die Curve III noch in I, so ziehe man EI, und trifft diese die Curve III noch in G, so ziehe man VG, und man hat jetzt wieder ein 6 Seit, von dessen 9 Ecken 8 auf der Curve III liegen. Drei davon liegen im Doppelpunkte auf der Curve III, der neunte, von selbst auf die Curve III fallende Eckpunkt ist der vierte im Doppelpunkt liegende.

Haben wir z. B. einen Kegelschnitt. welcher von einer Geraden MN in V (Fig. 18, Taf. III) geschnitten wird, so ziehe man VC und VH, dann CH, trifft diese die MN in I, so ziehe man durch I die EG beliebig, und dann noch VE und VG, so hat man der gegebenen Curve II das gemeine Sechseck $VCHEG$ so einbeschrieben, dass die 3 Schnittpunkte seiner Gegenseiten auf MN liegen. Im Punkte V fallen 2 Ecken und 2 Gegenseitenschnittpunkte zusammen.

§. 14.

Setzen wir in §. 12 statt des einen Sechsecks ein solches besonderes, so erhalten wir folgende

Construction. 1) Man beschreibe einem Kegelschnitte das gemeine Sechseck $ABCDEF$ (Fig. 19ᵃ, Taf. III) ein, dessen Gegenseiten sich auf der Geraden MN schneiden mögen. Trifft die MN den Kegelschnitt in V und W, so ziehe man VB und VC und die beliebige Gerade VH, so müssen stets die Punkte α und β, wo VH die DE und AF trifft, mit den 4 Punkten $\gamma, \delta, \varepsilon, \varkappa$, wo VB die CD und EF, und VC die AB und EF trifft — auf Einem Kegelschnitte liegen.

2) Lässt man den Punkt α oder β mit $\left|\begin{matrix}\gamma \text{ und } \varkappa\\ \delta \;\;,, \;\; \varepsilon\end{matrix}\right|$ in Einer Geraden liegen, so liegt auch β resp. α mit $\left|\begin{matrix}\delta \text{ und } \varepsilon\\ \gamma \;\;,, \;\; \varkappa\end{matrix}\right|$ in Einer Geraden. (Vgl. hiemit auch die Construction in Nr. 2 des §. 10; der Geraden $\left|\begin{matrix}\gamma\varkappa\\ \delta\varepsilon\end{matrix}\right|$ entspricht die Gerade RS, und dem Punkte α oder β der Punkt P oder Q.)

3) Schneidet VH den Kegelschnitt noch in S (Fig. 19ᵇ, Taf. III), so

ziehe man SO, trifft diese denselben noch in T, so ziehe man VT, und suche nun noch folgende Schnittpunkte: die von VT mit DE und AF (α', β'), und die von ST mit AB und CD (μ, ν), so müssen diese 4 Schnittpunkte mit den 6 vorigen auf Einem Kegelschnitte liegen; und liegen die 6 ersten auf 2 Geraden, so fällt α' mit β und β' mit α in dieselbe jener beiden Geraden; μ endlich fällt in die Gerade, in welcher γ und $\varkappa$, ν in die, in welcher δ und ε liegen.

§. 15.

Setzt man statt der beiden gemeinen Secksecke des §. 12 zwei solche besondere Sechsecke, so erhält man folgende

Construction. Man beschreibe einem Kegelschnitte das gemeine Viereck $VBWC$ (Fig. 20, Taf. III) ein, ziehe dessen beide Diagonalen VW und BC, welche sich in O schneiden mögen; durch O ziehe man die Geraden XY und UZ beliebig; sie mögen den Kegelschnitt noch in E und F, und S und T treffen, so ziehe man VS, VT, WE und WF. Man hat jetzt dem gegebenen Kegelschnitte die beiden gemeinen Sechsecke $VBCST$ und $WBCEF$, deren Gegenseiten sich auf der nämlichen Geraden VW schneiden, einbeschrieben; man suche daher folgende Schnittpunkte:

VB, WC	VS, WE	ST, WB
VC, WB	VS, WF	ST, WC
	VT, WE	EF, VB
	VT, WF	EF, VC;

sie müssen alle 10 auf Einem Kegelschnitte liegen.

Wurde XY und UZ so gezogen, dass der erste, siebente und zehnte in Einer Geraden liegen, so liegen auch der zweite, achte und neunte in Einer Geraden; auf die eine dieser Geraden fallen noch der dritte und der sechste, auf die andere der vierte und fünfte Schnittpunkt.

§. 16.

Lässt man in §. 15 XY und UZ in RK (Fig. 21, Taf. III) zusammenfallen, so fällt der dritte Schnittpunkt mit E und S in P, und der sechste mit F und T in Q zusammen; der siebente, achte, neunte und zehnte fallen ebenfalls in die Gerade RK; da also von dem Kegelschnitte, auf welchem die 10 Schnittpunkte liegen, mehr als 3 Punkte in Einer Geraden liegen, so muss er in 2 Gerade zerfallen; d. h. es müssen der erste, zweite, vierte und fünfte Schnittpunkt in gerader Linie liegen. Dies giebt den

Satz. Beschreibt man einem Kegelschnitte zwei gemeine Vierecke [$VBWC$ und $VPWQ$] so ein, dass sie den Schnittpunkt [O] der Diagonalen und die eine Diagonale [VW] gemeinschaftlich haben, so liegen die 4 Schnittpunkte der Gegenseiten [(VB, WC), (VC, WB), (VP, WQ) und (VQ, WP)] auf Einer Geraden.

Zeichnet man ferner noch ein drittes gemeines Viereck $V'BW'C$, wel-

ches mit dem ersten die Diagonale BC gemein hat, und dessen andere Diagonale $V'W'$ ebenfalls durch den Punkt O geht, so müssen also dessen Gegenseiten sich ebenfalls auf jener Geraden schneiden, auf welcher die 4 ersten Gegenseitenschnittpunkte liegen; dieses dritte Viereck hat aber mit dem zweiten $VPWQ$ nichts gemein, als den Schnittpunkt der Diagonalen. Wir haben also den

Satz. Beschreibt man einem Kegelschnitte beliebig viele gemeine Vierecke ein, welche sämmtlich den Schnittpunkt der beiden Diagonalen gemeinsam haben, so haben sie auch die Verbindungslinie der Gegenseitenschnittpunkte gemein.

Dieser Satz ist bekanntlich in der Theorie der Polaren wichtig.

§. 17.

Einbeschreibung des $2n$ Seits in die Curven, deren Ordnung die fünfte übersteigt.

In die Curve III konnten wir das 6 Seit stets einbeschreiben. (§. 3.)

In die Curve IV konnten wir das 8 Seit nur mit Hülfe des Doppelpunktes einbeschreiben. (§. 5.) — Oder wir nahmen solche Curven IV, welche aus Curven niederer Ordnungen bestanden und gaben von diesen nur eine oder einige. (§. 4. 2), 3), 4) und 5).)

In die gegebene Curve V konnten wir das 10 Seit nicht mehr einbeschreiben, sie musste aus einer Curve IV und einer Geraden bestehen, und es durfte nur die erstere gegeben sein; diese musste ferner aus einer Curve II und zwei Geraden bestehen, von welchen die eine die Curve II schneiden musste. (§. 10. 1) und 2).) — Oder die Curve V musste aus einer Curve III und einer Curve II bestehen, und es durfte blos die erste gegeben sein, u. s. w. (§. 10. 3) und 4).)

Wir wenden uns nun zu den Curven von einer höhern als der fünften Ordnung. Wir benützen hiebei besonders den §. 9.

1) Vom $2n$ Seite können wir im Allgemeinen auf die Curve n^{ter} Ordnung, wo $n =$ oder > 4 ist, $4n-4$ Eckpunkte verlegen; es müssten aber, damit alle Eckpunkte auf sie fallen, $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ derselben auf sie verlegt werden; nun ist

$$\frac{n(n+3)}{2} - 1 - (4n-4) = \frac{n(n-5)+6}{2};$$

der Ausdruck rechts ist positiv für $n =$ und > 4; d. h. Einer Curve, deren Ordnung die vierte oder eine höhere ist, lässt sich das $2n$ Seit im Allgemeinen nicht derart einbeschreiben, dass $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ seiner Ecken (und in Folge dessen alle) auf sie fallen.

2) Mit Hülfe des Doppelpunktes können wir vom $2n$ Seit $4n-3$ Ecken auf die Curve n^{ter} *Ordnung fallen lassen*; und es ist

$$\frac{n(n+3)}{2} - 1 - (4n-3) = \frac{n(n-5)+4}{2};$$

der Ausdruck rechts ist für $n = 4$ Null, für $n > 4$ aber positiv. D. h.

Einer Curve IV können wir mit Hilfe des Doppelpunktes ein $2n$ (d. h. Acht-) Seit so einbeschreiben, dass $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ (d. h. 13) seiner Ecken (und in Folge dessen auch die übrigen) auf sie fallen; bei einer Curve höherer Ordnung geht dies aber nicht mehr.

3. Wir wollen nun solche Curven n^{ter} Ordnung betrachten, welche aus einer Curve m^{ter} und einer $n-m^{ter}$ Ordnung bestehen, von welchen beiden aber blos die Curve m^{ter} Ordnung gegeben sei.

a) Es sei $m =$ oder > 4. Wir können jetzt auf die Curve m^{ter} Ordnung $4n-4$ Eckpunkte fallen lassen, dann ist aber das $2n$ Seit verzeichnet; durch $\frac{(n-m)(n-m+3)}{2}$ der übrigen können wir die Curve der $n-m^{ten}$ Ordnung legen; es fallen also dann auf die von beiden Curven gebildete Curve n^{ter} Ordnung

$$4n - 4 + \frac{(n-m)(n-m+3)}{2} \text{ Ecken.}$$

Dieser Ausdruck wird um so grösser, je kleiner m ist; setzen wir also $m = 4$, so wird er

$$= 4n - 4 + \frac{(n-4)(n-1)}{2} = \frac{n^2+3n-4}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 2.$$

Man sieht, dass bei der Curve IV nur noch ein einziger Eckpunkt fehlt. Gehen wir also bei der Einbeschreibung von einem Doppelpunkte der Curve IV aus, so können wir $4n-3$ Ecken auf sie verlegen, und die Anzahl der auf die Curve IV und die Curve $n-4^{ter}$ Ordnung fallenden Ecken des $2n$ Seits wird

$$= 4n - 3 + \frac{(n-4)(n-1)}{2} = \frac{n(n+3)}{2} - 1;$$

es fallen also sämmtliche n^2 Ecken auf diese beiden Curven, und wir haben den

Satz. Beschreibt man einer Curve IV ein $2n$ Seit ein, wo $n =$ oder > 4 ist, und geht man bei der Einbeschreibung von einem Doppelpunkte der Curve IV aus, so kann man $4n-3$ Ecken auf die Curve IV verlegen; dies sind so viele, dass noch 3 auf die Curve IV fallen (wovon eine im Doppelpunkte liegt), und die übrigen $n(n-4)$ fallen auf eine Curve $n-4^{ter}$ Ordnung.

Dies giebt folgende Erweiterung der in Nummer 2) des §. 6 gemachten Construction:

Haben zwei Kegelschnitte den Punkt P gemeinschaftlich, so ziehe man durch ihn zwei beliebige Gerade, von denen jede die 2 Kegelschnitte in *noch 2 Punkten treffen* wird; zweimal verbinde man 2 dieser 4 Punkte

aufs Neue, die beiden Verbindungslinien mögen wieder jede die beiden Curven in noch 2 Punkten treffen, und man verbinde wiederum 2 mal 2 dieser 4 Schnittpunkte; es werden sich wieder 4 Schnittpunkte ergeben, diese verbinde man nochmals 2 mal; je nachdem man nun diesmal je 2 solche Schnittpunkte verbunden hat, welche nicht auf dem nämlichen Kegelschnitte liegen, oder je zwei solche, bei denen dies der Fall ist, gehen die beiden Verbindungslinien wieder durch den Punkt P oder nicht. Im letztern Falle kann man die gemachte Operation wiederholen; die beiden Verbindungslinien werden nämlich vier weitere Schnittpunkte liefern, diese verbinde man nochmals durch 2 Gerade, und nun verbinde man von den 4 aufs Neue entstehenden Schnittpunkten 2 mal entweder je 2 solche, welche nicht auf der nämlichen der gegebenen Curven II liegen, oder je 2 solche, bei denen dies der Fall ist. Im ersten Falle werden die zwei Verbindungslinien wieder durch P gehen, im andern nicht, u. s. f. Man bezeichne die Seitenpaare bei der Ziehung abwechselnd mit (') und ("); hat man n Seitenpaare gezogen, so hat man auf der gegebenen Curve IV ein sich im Doppelpunkte wieder schliessendes $2n$ Seit gezeichnet; jedes Seitenpaar hat mit dem ihm vorhergehenden sowohl, als mit dem ihm folgenden 4 Punkte auf der gegebenen Curve IV gemein (das erste und letzte Seitenpaar haben diese 4 Punkte im Doppelpunkte gemein). Die übrigen $n(n-4)$ Schnittpunkte verschiedenartig bezeichneter Seitenpaare liegen auf Einer Curve $n-4^{\text{ter}}$ Ordnung.

b. Es sei $m=3$, so können wir auf die Curve m^{ter} Ordnung $3n-1$ Ecken des $2n$ Seits fallen lassen; die nicht gegebene Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung können wir durch

$$\frac{(n-3)(n-3+3)}{2} \text{ oder } \frac{(n-3)n}{2}$$

der übrigen Ecken gehen lassen; es fallen dann von den n^2 Ecken des $2n$ Seits auf die von beiden Curven gebildete Curve n^{ter} Ordnung

$$3n-1+\frac{(n-3)n}{2}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\frac{n(n+3)}{2}-1$$

Ecken; dies ist aber die erforderliche Anzahl.

Es sei ferner $m=2$; auf die Curve II können wir $2n$ Ecken verlegen, die nicht gegebene Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung kann man durch $\frac{(n-2)(n-2+3)}{2}$ Ecken gehen lassen; und es ist

$$2n+\frac{(n-2)(n+1)}{2}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\frac{n(n+3)}{2}-1.$$

Es sei endlich $m=1$, so können wir auf die Curve I n Eckpunkte fallen lassen, und die Curve $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung durch $\frac{(n-1)(n-1+3)}{2}$ der übrigen Ecken *gehen lassen, und es ist*

$$n+\frac{(n-1)(n+2)}{2}=\frac{n^2+3n-2}{2}=\frac{n(n+3)}{2}-1.$$

Es gilt also folgender

Satz. Man kann bewirken, dass von den n^2 Ecken eines $2n$ Seits auf die Curve I., II., III. Ordnung bezüglich n, $2n$, $3n-1$ Ecken fallen, und dies sind so viele, dass die übrigen Ecken sämmtlich bezüglich auf Einer Curve $n-1^{\text{ter}}$, $n-2^{\text{ter}}$, $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.

Oder

Satz 1. Zeichnet man ein $2n$ Seit so, dass n Ecken desselben in gerader Linie liegen, so liegen die $n(n-1)$ übrigen Ecken auf Einer Curve $n-1^{\text{ter}}$ Ordnung.

Satz 2. Beschreibt man einer Curve II ein gemeines $2n$ Eck ein, bezeichnet dessen Seiten abwechselnd mit (′) und (″), und sucht alsdann die nicht auf der gegebenen Curve II liegenden $n(n-2)$ Punkte, wo immer eine mit (′) und eine mit (″) bezeichnete Seite sich schneiden, so liegen dieselben sämmtlich auf Einer Curve $n-2^{\text{ter}}$ Ordnung.

Satz 3. Beschreibt man einer Curve III auf eine der in §. 8 angegebenen Arten ein $2n$ Seit ein, so dass $3n-1$ von dessen Ecken auf ihr liegen, so fällt auch die $3n^{\text{te}}$ Ecke auf sie, und die $n(n-3)$ übrigen Ecken liegen auf Einer Curve $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung.

Besteht die Curve III dieses 3. Satzes aus einer Curve II und einer Geraden, so erhält man als den ersten Theil dieses Satzes Folgendes:

Satz α. Man beschreibe einer Curve II ein gemeines $2n$ Eck ein und zwar wie folgt:

Ist n ungerade, so zeichne man zuerst n Seiten, die $n+1^{\text{te}}$, $n+2^{\text{te}}$, ... $2n-1^{\text{te}}$ nehme man nach einander so an, dass ihre Schnittpunkte mit bezüglich der 1ten, 2ten, ... $n-1^{\text{ten}}$ sämmtlich auf Einer Geraden liegen; es wird dann auch der Schnittpunkt der $2n^{\text{ten}}$ mit der n^{ten} auf diese Gerade fallen.

(Der einfachste Fall dieses Satzes ist der Satz von dem der Curve II einbeschriebenen Sechsecke.)

Ist n gerade, so nehme man wieder die ersten n Seiten beliebig an, die $n+1^{\text{te}}$, $n+2^{\text{te}}$, $n+3^{\text{te}}$, ... $2n-1^{\text{te}}$ aber der Art, dass ihre Schnittpunkte mit bezüglich der 2ten, 1ten, 4ten, 3ten, ... n^{ten} auf Einer Geraden liegen; so wird auch der Schnittpunkt der $2n^{\text{ten}}$ und der $n-1^{\text{ten}}$ auf dieser Geraden liegen.

Satz β. Man beschreibe einer Curve II ein gemeines $2p$ Eck ein, lasse $2p-1$ Seiten desselben sich um $2p-1$ in Einer Geraden liegende Punkte drehen, so wird auch die $2p^{\text{te}}$ Seite sich um einen Punkt dieser Geraden drehen.

(Der einfachste Fall dieses Satzes ist der Satz von dem dem Kegelschnitte einbeschriebenen Vierecke, von dessen 4 Seiten 3 um 3 in Einer *Geraden liegende* Punkte sich drehen.)

II. Reciproke Sätze zu den wichtigsten Sätzen der ersten Abtheilung.

(Sätze über die den Curven höhern Grades umschriebenen Vielecke.)

§. 18.

Der reciproke Satz zu dem in §. 1 aufgestellten Hauptsatze heisst:

Zieht man eine Curve n^{ten} Grades, welche $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der n^2 gemeinschaftlichen Tangenten zweier anderer Curven des n^{ten} Grades berührt, so berührt sie diese sämmtlichen gemeinschaftlichen Tangenten.

§. 19.

Die einfachste Curve des n^{ten} Grades ist das System von n Punkten. Zwei solche Systeme von n Punkten wollen wir ein $2n$ Eck nennen und im Folgenden unter $2n$ Eck nichts weiter als das verstehen. Die Ecken des $2n$ Ecks sind jene $2n$ Punkte; sie theilen sich in Ecken der einen (′) und Ecken der andern Art (″). Ein solches $2n$ Eck hat n^2 Seiten, d. h. Verbindungslinien verschiedenartiger Ecken.

Satz. Zieht man eine Curve des n^{ten} Grades, welche $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ der n^2 Seiten eines $2n$ Ecks berührt, so berührt sie auch die $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ übrigen Seiten desselben.

Dieser Satz enthält natürlich nur dann eine Behauptung in sich, wenn $n =$ oder > 3 ist.

Es entsteht nun wieder die umgekehrte Frage, ob und wie man einer Curve n^{ten} Grades ein $2n$ Eck umbeschreiben könne, so dass $\frac{n(n+3)}{2} - 1$ seiner Seiten die Curve berühren; dann müssten die übrigen $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Seiten die Curve von selbst berühren.

§. 20.

Sowie eine Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen sich nicht selbst schneidet, so wird man auch in keinem Punkte einer Curve n^{ten} Grades, welche nicht aus Curven niedereren Grades besteht, eine Tangente an die Curve legen können, welche dieselbe in noch einem Punkte berührt; wohl aber wird dies der Fall sein, wenn die Curve aus zwei oder mehreren Curven niedereren Grades besteht; in diesem Falle werden mehrfache Tangenten verhanden sein.

Zieht man an eine Curve n^{ten} Grades von 2 nicht auf ihr liegenden Punkten A und B (Fig. 22 Taf. III) 4 Tangenten, so sind, wenn man jene 2 Punkte als Ecken der einen Art eines umzuschreibenden $2n$ Ecks betrachtet, durch diese 4 Tangenten im Allgemeinen sogleich noch 2 Ecken der andern Art C und D jenes $2n$ Ecks bestimmt; fallen aber jene 4 Tan-

genten in Eine zusammen, so kann man schon durch unendlich kleine Verschiebung eines jener ersten Eckpunkte — normal zur Doppeltangente — bewirken, dass die beiden Eckpunkte der andern Art auf der Doppeltangente um endliche Strecken fortrücken. Hat man aber einmal 2 Eckpunkte der einen und einen Eckpunkt der andern Art auf der Doppeltangente angenommen und verschiebt man diese 3 Punkte normal zur Doppeltangente, so verschiebt sich auch der zweite Eckpunkt der andern Art nur normal zur Doppeltangente. Es gilt also der

Satz. Wenn wir bei Umbeschreibung des $2n$ Ecks von einer Doppeltangente der Curve n^{ten} Grades ausgehen, indem wir 4 Seiten in derselben annehmen, so dürfen wir auf ihr 2 Ecken der einen und eine Ecke der andern Art beliebig annehmen; der zweite Eckpunkt der andern Art ist nun aber bestimmt und muss sich im Verlaufe der Construction von selbst ergeben.

§. 21.

(Zu 2 und 3 des §. 6.)

1. Construction. Es seien 2 Curven II gegeben, welche 2 gemeinschaftliche Tangenten haben, die eine sei p (Fig. 23 Taf. III); man nehme auf ihr die Punkte M und Q an, und ziehe von ihnen die 4 noch möglichen Tangenten c, l, g und i; alsdann suche man den Schnitt von c und g und den von l und i; die beiden vom ersten Schnittpunkte noch ziehbaren Tangenten seien h und v, die vom andern noch möglichen w und s; nun suche man wieder zweimal den Schnittpunkt je zweier, z. B. den von h und s und den von v und w; es sei die Tangente vom ersten Punkte an den ersten Kreis t_1, die an den zweiten k_1, ebenso seien die vom 2ten Punkte t_2 und k_2, so müssen sich sowohl t_1 und k_2, als auch t_2 und k_1 auf p schneiden.

2. Satz. Hat man zwei gemeine Vierecke, welche zwei Gegenecken und die Diagonale p zwischen den beiden andern Gegenecken gemeinsam haben, so schneiden sich die vier Geraden, welche die Schnittpunkte der Gegenseiten des einen Vierecks mit diesen 2 Punkten im andern Vierecke verbinden, in 2 Punkten von p.

§. 22.

(Zu 2 des §. 11.)

Man ziehe durch einen Punkt P (Fig. 24 Taf. III) zwei Tangenten v und w an einen Kegelschnitt und nehme auf jeder 3 Punkte an; zwei davon, welche nicht auf der nämlichen dieser beiden Tangenten liegen, sollen auf einer beliebigen dritten b liegen; durch die 4 noch übrigen Punkte ziehe man immer die zweite noch mögliche Tangente, dies gebe die Geraden c, h, d und i. Sind nun die vier letzten Punkte so angenommen worden, dass sich c und d, sowie h und i auf Einer durch P gehenden Geraden schneiden, so berühren folgende 6 Gerade Einen Kegelschnitt

$$G(vc, wi), \quad (fv, cd), \quad (fw, hi),$$
$$G(vh, wd), \quad (fv, wi), \quad (fw, cv).$$

Zieht man an den gegebenen Kegelschnitt noch eine weitere Tangente $a\,w$, dass der Punkt av auf der zweiten durch den Punkt hi oder den Punkt wd an den gefundenen Kegelschnitt möglichen Tangente liegt, so berühren den letzteren Kegelschnitt noch folgende 3 Gerade:

$$G\,(av, wd), \qquad (aw, cd),$$

oder

$$G\,(av, hi), \qquad (aw, vh).$$

§. 23.

(Zu §. 12.)

Man beschreibe einer Curve II ein beliebiges gemeines Sechseck um, so werden die 3 Verbindungslinien der Gegenecken durch Einen Punkt gehen; man beschreibe ihr noch ein gemeines Sechseck um, dessen Verbindungslinien der Gegenecken durch den nämlichen Punkt gehen, und welches mit dem ersten eine Ecke gemein hat; man bezeichne die Ecken beider Sechsecke abwechselnd mit (′) und (″), und zwar derart, dass man der gemeinschaftlichen Ecke in beiden entgegengesetzte Bezeichnung giebt; diese Ecke betrachte man von nun an als gar nicht mehr vorhanden; so müssen jetzt die 10 Geraden, welche sich als Verbindungslinien je einer Ecke des einen Sechsecks mit einer entgegengesetzt bezeichneten des andern ergeben — Einen Kegelschnitt berühren.

§. 24.

Dem in §. 13, 14 und 15 Enthaltenen entspricht Folgendes reciprok:

Man ziehe an eine Curve II die 2 Tangentenpaare c, f und e, g (Fig. 25, Taf. III), so bilden diese mit jeder fünften Tangente v ein der Curve II umbeschriebenes gemeines Sechseck $ABCDEF$; die Verbindungslinien der Gegenecken sind als in dem Punkte Z sich schneidend zu betrachten, wo die Gerade CF die Tangente v trifft. 2 Seiten sowohl, als 2 Gegeneckenverbindungslinien fallen in v zusammen.

Setzen wir dieses besondere Sechseck an die Stelle eines der beiden Sechsecke des vorhergehenden §, so erhalten wir folgende

Construction. 1) Man beschreibe einem Kegelschnitte das gewöhnliche Sechseck $abcdef$ (Fig. 26, Taf. III) um, dessen Gegeneckenverbindungslinien sich in Einem Punkte Z schneiden werden; von Z seien 2 Tangenten an den Kegelschnitt möglich, die eine davon sei v; man suche nun, wo v die a und die b schneidet und verbinde diese 2 Punkte mit $P\,(d, e)$ und $P\,(b, c)$, bezüglich $P\,(d, e)$ und $P\,(a, f)$; nimmt man alsdann auf v noch einen beliebigen Punkt H an und verbindet ihn mit $P\,(c, d)$ und $P\,(e, f)$, so berühren diese beiden Geraden mit den 4 vorigen Einen Kegelschnitt.

2) Geht die fünfte dieser Geraden mit der ersten und vierten oder mit der zweiten und dritten durch Einen Punkt, so geht auch die sechste mit der zweiten und dritten, bezüglich ersten und vierten durch Einen Punkt.

3) Man ziehe ferner von H die andere Tangente s an den gegebenen Kegelschnitt, suche den Punkt U, wo dieselbe die Gerade c trifft, ziehe von diesem Punkte die andere Tangente t an den Kegelschnitt und suche den Punkt K, wo sie die Tangente v trifft. Verbindet man nun den Punkt U mit den Punkten (a, f) und (b, c), und den Punkt K mit den Punkten (c, d) und (e, f), so berühren diese 4 weitern Geraden noch den in 1) gefundenen Kegelschnitt, oder sie gehen zu je zweien durch die beiden in 2) erwähnten Punkte. — Setzt man statt der beiden Sechsecke des vorigen § solche besondere Sechsecke, so erhält man folgende

Construction. Auf einer Geraden o (Fig. 27, Taf. III) nehme man 4 Punkte an und ziehe von ihnen die 4 Tangentenpaare v, w, b, c, e, f und s, t, so sind $v\,b\,c\,s\,t$ und $w\,b\,c\,e\,f$ 2 solche besondere gemeine Sechsecke; man suche nun folgende Verbindungslinien:

$G\,(vb, wc)$,	(vs, we),	(vt, we),	(st, wb),
$G\,(vc, wb)$,	(vs, wf),	(vt, wf),	(st, wc),
			(ef, vb),
			(ef, vc);

sie müssen alle 10 Einen Kegelschnitt berühren.

Nehmen wir ferner die Punkte (e, f) und (s, t) so an, dass die siebente und die zehnte Gerade mit der ersten durch Einen Punkt gehen, so gehen auch die achte und die neunte mit der zweiten durch Einen Punkt; und durch den einen dieser Punkte gehen noch die dritte und die sechste, durch den andern die vierte und die fünfte.

§. 25.

(Zu §. 16.)

Satz. Beschreibt man einem Kegelschnitte 2 gewöhnliche Vierecke um, welche die Verbindungslinie der Gegenseitenschnittpunkte, sowie den einen Gegenseitenschnittpunkt gemeinschaftlich haben, so gehen die 4 Diagonalen der beiden Vierecke durch Einen Punkt.

Und hieraus leitet sich einfach ab der

Satz. Beschreibt man einem Kegelschnitte mehrere gewöhnliche Vierecke um, welche sämmtlich die Verbindungslinie der Gegenseitenschnittpunkte gemeinsam haben, so haben dieselben auch den Schnittpunkt der Diagonalen gemeinschaftlich.

§. 26.

Reciproke Sätze zu den Sätzen α und β in §. 17.

Satz α. Man beschreibe einer Curve II ein gemeines $2n$ Eck um, und zwar wie folgt:

Ist n ungerade, so zeichne man zuerst n Ecken, die $n+1^{\text{te}}$, $n+2^{\text{te}}$, $n+3^{\text{te}}$, ... $2n-1^{\text{te}}$ nehme man nach einander so an, dass ihre Verbind-

ungslinien mit bezüglich der 1ten, 2ten, 3ten, ... $n-1^{ten}$ sämmtlich durch Einen Punkt gehen; es wird dann auch die Verbindungslinie der $2n^{ten}$ und n^{ten} Ecke durch diesen Punkt gehen.

Ist n gerade, so nehme man wieder die ersten n Ecken beliebig an, und nehme dann die $n+1^{te}$, $n+2^{te}$, $n+3^{te}$, $n+4^{te}$, ... $2n-1^{te}$ so an, dass ihre Verbindungslinien mit bezüglich der 2ten, 1ten, 4ten, 3ten, ... n^{ten} sich in Einem Punkte schneiden; es wird dann auch die Verbindungslinie der $2n^{ten}$ mit der $n-1^{ten}$ Ecke durch diesen Punkt gehen.

(Der einfachste Fall dieses Satzes ist der Satz von dem dem Kegelschnitte umbeschriebenen Sechsecke.)

Satz β. Man beschreibe einer Curve II ein gemeines $2p$ Eck um, und lasse $2p-1$ Ecken desselben auf $2p-1$ festen Geraden, die sich in Einem Punkte schneiden, fortrücken, so rückt auch die $2p^{te}$ Ecke auf einer durch diesen Punkt gehenden Geraden fort.

(Der einfachste Fall dieses Satzes ist der Satz von dem dem Kegelschnitte umbeschriebenen Vierecke, von dessen 4 Ecken 3 auf 3 durch Einen Punkt gehenden Geraden fortrücken.)

III. Anwendungen des in §. 1 aufgestellten Satzes in der Lehre von der Berührung.

§. 27.

Die eine der beiden sich schneidenden Curven n^{ter} Ordnung sei eine Curve n^{ter} Ordnung im Allgemeinen, die andere ein System von n Geraden. Lassen wir die letzteren zusammenfallen, so erhalten wir folgenden

Satz. Man ziehe eine Gerade, welche eine Curve n^{ter} Ordnung in n Punkten scheidet; ist $n+3$ gerade, so ziehe man nun eine Curve n^{ter} Ordnung, welche die gegebene Curve n^{ter} Ordnung in $\frac{n+3}{2}-1$ jener n Punkte nach der n^{ten} und im $\frac{n+3}{2}^{ten}$ nach der $n-1^{ten}$ Ordnung berührt, so berühren sich die beiden Curven in allen n Punkten nach der n^{ten} Ordnung. (Berühren nach der n^{ten} Ordnung wird in diesem § so verstanden, dass das Schneiden als ein Berühren nach der ersten Ordnung erscheint.)

Für die Curve der III. Ordnung heisst dieser Satz:

Satz. Berühren sich 2 Curven III in den Punkten P und Q nach der III. Ordnung, und findet auf der Geraden PQ noch eine gewöhnliche Berührung zwischen beiden statt, so wird diese auch zur Berührung III. Ordnung.

§. 28.

1) Lehrsatz. Zwei Curven II mögen sich in den Punkten P_1, P_2, P_3 und P_4 (Fig. 28, Taf. III) schneiden; man ziehe P_1M und P_2N beliebig und verbinde P_3 und P_4; schneiden P_1M und P_2N noch in E, H und F und I, so

ziehe man EF und HI; wir haben jetzt folgende zwei Curven III: die erste Curve II und die Gerade HI, die zweite Curve II und die Gerade EF, eine dritte Curve III ist das System der 3 Geraden P_1M, P_2N und P_3P_4; diese 3 Curven III haben die 8 Schnittpunkte P_1, P_2, E, F, H, I, P_3 und P_4 gemeinschaftlich, sie müssen also auch den neunten Schnittpunkt gemeinschaftlich haben, d. h. EF, HI und P_3P_4 müssen sich in Einem Punkte schneiden.

2) Lassen wir P_1 und P_2 zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Zwei Kegelschnitte sollen sich im Punkte P (Fig. 29, Taf. III) berühren und noch in den Punkten P_3 und P_4 schneiden; zieht man PM und PN beliebig, und schneidet die erste Gerade die Kegelschnitte noch in E und H, die andere in F und I, so schneiden sich die 3 Geraden EF, HI und P_3P_4 in Einem Punkte.

3) Lassen wir P_3 und P_4 zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Zwei Curven II sollen sich im Punkte P (Fig. 30, Taf. III) berühren und in den Punkten P_1 und P_2 schneiden; zieht man P_1M und P_2N beliebig, und schneiden diese Geraden die Kegelschnitte noch in E und H, bezüglich F und I, so schneiden sich die Geraden EF und HI auf der beiden Kegelschnitten in P gemeinschaftlichen Tangente.

4) Lässt man P_2 mit P_1 und P_4 mit P_3 zusammenfallen, so erhält man den

Satz. Berühren sich 2 Curven II in P_1 und in P_3, und zieht man die Geraden P_1M, P_1N, welche die erste Curve noch in E, H, die zweite noch in F und I schneiden, so schneiden sich EH und FI auf der Tangente des Punktes P_3.

5) Lässt man P_3 mit P_1 und P_4 mit P_2 zusammenfallen, so ergiebt sich der

Satz. Berühren sich 2 Kegelschnitte in P_1 und in P_2, und zieht man die Geraden P_1M, P_2N, welche die eine Curve noch in E und H, die andere noch in F und I treffen, so schneiden sich EH und FI auf P_1P_2.

6) Lassen wir P_1, P_2 und P_3 zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Osculiren sich 2 Kegelschnitte in P (Fig. 31, Taf. III) und schneiden sie sich noch in P_4, so ziehe man PM und PN beliebig; schneiden PM und PN die Kegelschnitte noch in E und H, bezüglich F und I, so schneiden sich EF und HI auf PP_4.

7) Lassen wir P_3, P_4 und P_2 zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Osculiren sich 2 Kegelschnitte in P (Fig. 32, Taf. III) und schneiden sie sich noch in P_1, so ziehe man P_1M und PN; schneiden diese Geraden die Kegelschnitte noch in E und H, bezüglich F und I, so schneiden sich EF und HI auf der im Osculationspunkte gemeinschaftlichen Tangente.

8) Fallen endlich P_1, P_2, P_3 und P_4 zusammen, so ergiebt sich der

Satz. Berühren sich 2 Kegelschnitte in P (Fig. 33, Taf. III) nach der gewöhnlich dritten Ordnung genannten Ordnung, und zieht man die beliebigen Geraden PM und PN, welche die Kegelschnitte noch in E, H, be-

züglich F und I schneiden, so schneiden sich EF und HI auf der im Punkte P gemeinschaftlichen Tangente.

§. 29.

Satz. Durch zwei Punkte P und Q (Fig. 34, Taf. III) lege man 3 Kegelschnitte, der erste und zweite mögen sich noch in P_3 und Q_3, der erste und dritte noch in P_2 und Q_2, der zweite und dritte noch in P_1 und Q_1 schneiden; zieht man die 3 Geraden P_1Q_1, P_2Q_2 und P_3Q_3, so hat man 3 Curven III, die eine besteht aus dem ersten Kegelschnitte und P_1Q_1, die andere aus dem zweiten Kegelschnitte und P_2Q_2, die dritte aus dem dritten Kegelschnitte und P_3Q_3; sie gehen alle drei durch die 8 Punkte P, Q, P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3, es müssen also auch ihre 3 neunten Schnittpunkte zusammenfallen, d. h. die 3 Geraden P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 gehen durch Einen Punkt.

§. 30.

Ebenso folgt

Satz. Schneidet eine Curve II eine Curve III in den Punkten A, B, C, D, E und F (Fig. 35, Taf. III) und man zieht die Geraden AD, BE und CF, welche die Curve III noch in G, H und I schneiden, so liegen G, H und I in Einer Geraden.

Lassen wir die 3 Punkte A, B und C zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Osculirt eine Curve II eine Curve III in P (Fig. 36, Taf. III) und schneidet sie dieselbe noch in D, E und F, und man zieht die 3 Geraden PD, PE, PF, welche die Curve III noch in G, H und I schneiden, so liegen G, H und I in Einer Geraden.

§. 31.

Reciproke Sätze zu den Sätzen von §. 28 und 29.

Satz. Haben 2 Kegelschnitte die 4 gemeinschaftlichen Tangenten p_1, p_2, p_3, p_4; zieht man von dem beliebigen Punkte M der ersten Tangente **die beiden andern Tangenten e und h**, eben so von einem beliebigen Punkte **N der zweiten die beiden andern** Tangenten f und i, so liegen der Schnittpunkt von e und f und der von h und i mit dem von p_3 und p_4 auf Einer Geraden.

Satz. (Wir lassen p_3 und p_4 zusammenfallen.) Zwei Kegelschnitte **mögen sich im Punkte P** berühren, und ausserdem noch die Tangenten p_1 **und p_2** gemeinschaftlich haben; man ziehe von einem beliebigen Punkte **von p_1** die beiden noch möglichen Tangenten e und h, und ebenso von **einem beliebigen Punkte von p_2 die Tangenten f und i, so liegen der Schnittpunkt von e und f** und der von h und i mit dem Berührungspunkte P auf Einer Geraden.

Satz. (Wir lassen p_1 und p_2 zusammenfallen.) Berühren sich 2 Kegelschnitte, ist die im Berührungspunkte gemeinschaftliche Tangente p, und haben sie ausserdem noch die Tangenten p_3 und p_4 gemeinschaftlich, so

ziehe man von einem beliebigen Punkte von p die beiden noch möglichen Tangenten e und h, von einem andern Punkte von p die Tangenten f und i, so liegt der Schnittpunkt von p_3 und p_4 mit dem von e und f und dem von h und i in Einer Geraden.

Satz. (Wir lassen p_1, p_2 und p_3 zusammenfallen.) Osculiren sich 2 Kegelschnitte, ist die im Osculationspunkte gemeinschaftliche Tangente p, und die andere noch gemeinschaftliche Tangente p_4, so ziehe man von 2 beliebigen Punkten von p die Tangentenpaare e, h und f, i, so liegen der Schnittpunkt von e und f, der von h und i und der von p und p_4 in Einer Geraden.

Satz. (Wir lassen p_2, p_3 und p_4 zusammenfallen.) Osculiren sich 2 Kegelschnitte, ist die im Osculationspunkte gemeinschaftliche Tangente p, und die andere noch gemeinschaftliche Tangente p_1, so ziehe man von einem beliebigen Punkte der ersten die beiden noch möglichen Tangenten e und h, von einem beliebigen Punkte der andern die Tangenten f und i, so liegen der Schnittpunkt von e und f und der von h und i mit dem Osculationspunkte in Einer Geraden.

Satz. (Wir lassen p_1, p_2, p_3 und p_4 zusammenfallen.) Es sollen sich 2 Kegelschnitte nach der gewöhnlich dritten Ordnung genannten Ordnung berühren, p sei die im Berührungspunkte gemeinschaftliche Tangente; man ziehe von 2 beliebigen Punkten von p die Tangentenpaare e, h und f, i, so liegen der Schnittpunkt von e und f und der von h und i mit dem Berührungspunkte der beiden Kegelschnitte in Einer Geraden.

Der reciproke Satz zu dem Satze des §. 29 lautet:

Satz. Man beschreibe dem Winkel pq (Fig. 37, Taf. III) drei Kegelschnitte ein, der erste und zweite sollen noch die gemeinschaftlichen Tangenten p_3 und q_3, der erste und dritte p_2 und q_2, und der zweite und dritte p_1 und q_1 haben, so liegen der Schnittpunkt von p_1 und q_1, der von p_2 und q_2 und der von p_3 und q_3 in Einer Geraden.

Lassen wir in diesem Satze die beiden Tangenten p und q, und im Satze des §. 29 die beiden Punkte P und Q zusammenfallen, so erhalten wir den

Satz. Berühren sich 3 Kegelschnitte in Einem Punkte, und hat der erste mit dem zweiten noch die Punkte P_3, Q_3 und die Tangenten p_3 und q_3, der erste mit dem dritten noch die Punkte P_2, Q_2 und die Tangenten p_2, q_2 und der zweite mit dem dritten noch die Punkte P_1, Q_1 und die Tangenten p_1, q_1 gemein, so schneiden sich die 3 Geraden P_1Q_1, P_2Q_2, P_3Q_3 in Einem Punkte, und die 3 Punkte p_1q_1, p_2q_2, p_3q_3 liegen auf Einer Geraden.

V.

Ueber den mittlern Fehler der Kettenmessungen.

Von Prof. Dr. A. Winckler in Gratz.

Die vielfachen Anwendungen, welche die Messkette, mancher unverkennbaren Vortheile wegen, täglich findet, obgleich nicht wenige Praktiker sich unbedingt gegen dieselben ausgesprochen haben, waren wohl die Veranlassung, dass die Frage nach der Genauigkeit, welche jenes Messwerkzeug gewährt, auf sehr verschiedenen und auch in den Resultaten nicht mit einander übereinstimmenden Wegen zu beantworten gesucht wurde. So wurde aus den in alle Lehrbücher der praktischen Geometrie übergegangenen Formeln, welche meines Wissens zuerst im ersten Bande (S. 154) des Werkes von Tob. Mayer mitgetheilt worden sind, der Satz abgeleitet, dass der Fehler einer Kettenmessung der Länge der gemessenen Linie direct, der Länge der Kette aber indirect proportional sei; manche Erfahrungen schienen diesen Satz zu bestätigen, manche aber widersprachen ihm offenbar. Aus anderen Betrachtungen erhielt man zwar keinen Aufschluss über die Einwirkung der Kettenlänge auf den Messungsfehler, dagegen stellte sich heraus, dass derselbe proportional mit der Quadratwurzel aus der Länge der gemessenen Linie wächst; aus der Combination wirklicher und sorgfältig angestellter Beobachtungen schien dagegen das überraschende Resultat zu folgen, dass der Fehler überhaupt nicht mit der Länge der Linie wachse, sondern in einer längern Linie geringer sei, als in einer kürzern. U. s. w.

Gegen die bis jetzt bekannten theoretischen Erörterungen dieser Frage, welche keineswegs ohne Interesse ist, lässt sich mancherlei einwenden. Setzt man nämlich, wie dies nothwendig geschehen muss, voraus, dass die Messung unter normalen Umständen stattfinde, welche keine der gewöhnlichen Fehlerquellen unwirksam machen oder grobe Fehler begünstigen, und berechnet man den möglichen Einfluss, welchen jede einzelne Fehlerquelle, soweit sich dieselbe überhaupt verfolgen lässt, auf einen Kettenzug ausüben kann, so ist hierdurch die Frage durchaus noch nicht beantwortet, denn hiezu ist erforderlich, dass die Grösse des Fehlers be-

stimmt werde, welcher aus der Concurrenz aller jener Fehlerquellen hervorgehend, sowohl in dem einzelnen Kettenzug als in der ganzen Linie zu befürchten ist. Diese Bestimmung aber macht die allgemeine Formulirung des Ausdrucks für den mittlern Fehler in ähnlicher Weise nöthig, wie ich dieselbe in dem Aufsatze „Ueber die Genauigkeit einer besondern Art von Nivellirinstrumenten" im 4. Bande dieser Zeitschrift entwickelt habe. — Ich wende mich zur Sache.

1.

Um in der angegebenen Art die mittlere Gesammtwirkung der möglicherweise influirenden Fehlerquellen bestimmen zu können, müssen dieselben zunächst einzeln betrachtet werden, wobei, wie sich von selbst versteht, die Voraussetzung gemacht wird, dass die Messung von geübten Gehilfen und nicht unter aussergewöhnlichen Umständen ausgeführt werde.

1. Wenn der hintere Kettenzieher seinen Kettenstab nicht genau im richtigen Punkte einsteckt, oder es nicht verhindert, dass derselbe durch den Zug der Kette aus seiner Stelle, wenn auch nur um ein Geringes, gerückt werde, oder wenn er den Kettenstab, um diese Verrückung abzuhalten, zu fest an sich heranzieht und nach rückwärts neigt, so entsteht aus diesen Ursachen ein Fehler in der Lage des Anfangspunktes der Kette, welcher seiner Natur nach ebenso leicht eine Vergrösserung, als eine Verkleinerung des Messungsresultats zur Folge haben kann und daher unter die unregelmässigen Beobachtungsfehler gehört. Da er sowohl positiv als negativ gedacht werden kann, so möge er durch $\sqrt{x}$ bezeichnet werden.

2. Die Justirung der Kette kann immer nur auf eine bestimmte Spannung derselben bezogen werden, und zwar liefert sie nur dann die richtige Kettenlänge, wenn der Kette genau diejenige Spannung ertheilt wurde, welche bei der Messung einer Linie ebenso leicht überschritten als nicht erreicht wird. Dieser Forderung wird wohl nie ganz scharf entsprochen werden können und daher der Werth von l, welcher durch das Verfahren der Justirung sich für die Kettenlänge ergiebt, mit einem constanten Fehler, welcher durch c vorgestellt werden mag, behaftet sein, so dass also $l+c$ die richtige Länge der Kette ist.

3. Bei der Messung einer Linie wird die Länge der Kette grösser oder kleiner als $l+c$ sein, je nachdem die soeben bezeichnete normale Spannung überschritten oder nicht erreicht wird.

Um den Betrag dieser Aenderung zu bestimmen, muss man erwägen, dass, obgleich die Kette nicht aus einem einzigen Stücke besteht, sondern aus einzelnen Stäben und den sie verbindenden Ringen zusammengesetzt ist, dieselbe dennoch, wenigstens näherungsweise, als ein elastischer Draht gedacht werden darf, welcher, wie diess aus der Theorie der elastischen *Körper* bekannt ist, bei gleicher ausdehnender Kraft, eine seiner Länge

direct proportionale Ausdehnung annimmt. Da nun diese Längenänderung ebensowohl positiv als negativ sein kann, so werde ich sie durch $l.\sqrt{y}$ bezeichnen, so dass nunmehr die Länge l' eines Kettenzuges unter der Form:

$$l' = l + c + \sqrt{x} + l.\sqrt{y}$$

erscheint.

4. Liegen die Endpunkte der Kette nicht genau in der Richtung der zu messenden Linie, wie diess im Allgemeinen angenommen werden muss, so kann die Abweichung des einen Endpunktes, unabhängig von jener des andern, ebensowohl auf die rechte als auf die linke Seite der Linie fallen, und es mögen daher diese Abweichungen durch $\sqrt{z}$ und $\sqrt{t}$ bezeichnet werden. In Folge derselben ist aber für den Kettenzug nicht l', sondern nur deren Projection, nämlich:

$$\sqrt{l'^2 - (\sqrt{z} + \sqrt{t})^2}$$

zu setzen, und ist daher der Messungsfehler v eines Kettenzuges bestimmt durch die Gleichung:

$$v = \sqrt{[l + c + \sqrt{x} + l\sqrt{y}]^2 - [\sqrt{z} + \sqrt{t}]^2} - l$$

um deren Aufstellung es sich vor Allem gehandelt hat.

2.

Man erhält sofort das mittlere Quadrat dieses Beobachtungsfehlers, wenn man, nachdem derselbe in die zweite Potenz erhoben und die Entwickelung der einzelnen Glieder ausgeführt worden ist, alle diejenigen Glieder weglässt, welche wegen des Wurzelzeichens ebensowohl positiv als negativ sein können. Bezeichnet man dieses mittlere Fehlerquadrat mit μ^2, so ergiebt sich zunächst:

$$\mu^2 = [l + c + \sqrt{x} + l\sqrt{y}]^2 - [\sqrt{z} + \sqrt{t}]^2 + l^2$$
$$- 2l.\sqrt{[l + c + \sqrt{x} + l\sqrt{y}]^2 - [\sqrt{z} + \sqrt{t}]^2}$$

Man kann diesen Ausdruck, wenigstens näherungsweise, in rationeller Form darstellen. Die Wurzelgrösse lässt sich nämlich in eine Reihe entwickeln und es reicht hin, wenn man blos die drei ersten Glieder derselben beibehält, welche zusammen den Ausdruck:

$$2l(l+c)\left\{1 - \frac{(\sqrt{z} + \sqrt{t})^2}{2(l + c + \sqrt{x} + l\sqrt{y})^2} - \frac{(\sqrt{z} + \sqrt{t})^4}{8(l + c + \sqrt{x} + l\sqrt{y})^4}\right\}$$

bilden, wovon man, weil c, x, y gegen l sehr klein sind, wieder nur die Glieder zweiter Ordnung beizubehalten braucht, so dass man im Ganzen erhält:

$$\mu^2 = (l + c)^2 + x + l^2 y - (z + t) + l^2$$
$$- 2l(l+c)\left[1 - \frac{z+t}{2l^2} - \frac{z^2 + 6zt + t^2}{8l^4}\right]$$

oder, da dieser Ausdruck einer Vereinfachung fähig ist:

$$\mu^2 = c^2 + x + l^2 y + \frac{c(z+t)}{l} + \frac{z^2 + 6zt + t^2}{4l^2}$$

Es ist kein Grund vorhanden, anzunehmen, dass der mittlere Fehler, welcher beim Einrichten des einen Kettenstabes in die Linie zu befürchten ist, grösser oder kleiner sei, als er beim andern war; man muss daher $t=z$ setzen, und erhält schliesslich:

$$\mu^2 = c^2 + x + l^2 y + \frac{2cz}{l} + \frac{2z^2}{l^2}$$

Um nun den mittlern Fehler M einer unter gleichen Umständen mit der Kette gemessenen Linie L zu bestimmen, muss man bemerken, dass die Messungen der n Kettenzüge, aus welchen die Linie besteht, insgesammt von einander unabhängig sind, dass aber gleichwohl der mittlere Fehler für jeden derselben μ ist, und also *)

$$M = \sqrt{n\left[c^2 + x + l^2 y + \frac{2cz}{l^2} + \frac{2z^2}{l^2}\right]}$$

oder, da hinreichend genau:

$$L = nl\text{, oder also } n = \frac{L}{l}$$

gesetzt werden kann:

$$M = \sqrt{L\left[\frac{c^2 + x}{l} + ly + \frac{2z(cl+z)}{l^3}\right]}$$

welches nun die verlangte Form für den mittlern Fehler der Kettenmessung mit Rücksicht auf alle wesentlichen Fehlerquellen ist.

3.

Es ist nicht ohne Interesse, diesen Ausdruck etwas näher zu betrachten, weil sich dadurch ergeben wird, von welchen Umständen das Wachsen oder Abnehmen des mittlern Fehlers der Kettenmessung vorzugsweise abhängt. Man findet:

1. Der mittlere Fehler der Kettenmessungen ist nicht geradezu der Länge L der gemessenen Linie, sondern nur deren Quadratwurzel proportional.

2. Der aus der ungleichmässigen Spannung der Kette entspringende Theil des mittlern Fehlers ist um so grösser, je länger die Kette ist, und zwar wächst derselbe, wenn man von allen übrigen Fehlereinflüssen absieht, im Verhältnisse der Quadratwurzel der Kettenlänge.

3. Der Einfluss des Fehlers in der Justirung, und in der Lage des Anfangspunktes der Kette, sowie wegen der Abweichung vom Alignement ist um so geringer, je länger die Kette ist. Obgleich sich diess voraussehen liess, so muss doch bemerkt werden, dass diese Abnahme keineswegs im einfachen Verhältnisse der Kettenlänge, sondern in geringerm Maasse stattfindet.

---

*) Gauss, Theoria combin. observ. errorib. min. obnoxiae. Art. 18.

4. Der mittlere Fehler M erreicht für eine den übrigen Umständen entsprechende Kettenlänge ein Minimum. Setzt man nämlich $\frac{dM}{dl}=0$, so ergiebt sich zur Bestimmung von l die folgende Gleichung vierten Grades:

$$1)\qquad l^4-\frac{c^2+x}{y}.l^2-\frac{4cz}{y}.l-\frac{6z^2}{y}=0,$$

welche immer wenigstens eine positive Wurzel hat, für welche $\frac{d^2M}{dl^2}$ einen positiven Werth erhält.

Durch die nähere Bestimmung dieses Werthes von l, welcher, wie man sieht, von den durch die Umstände bedingten Messungsfehlern abhängt, erhält die vielfach aufgeworfene, aber nicht gelöste Frage nach der vortheilhaftesten Länge der Kette vorläufig wenigstens ihre theoretische Beantwortung.

Allerdings sind in der vorstehenden Erörterung nicht alle beim Gebrauche der Kette vorkommenden Unregelmässigkeiten berücksichtigt worden. So z. B. hat ohne Zweifel jeder Geometer die Bemerkung gemacht, dass sich unter sonst gleich bleibenden Umständen, nach anhaltendem Gebrauche der Kette, ja selbst beim Messen einer längern Linie mit derselben, sei es, weil sich nach und nach eine grössere Gleichmässigkeit im Spannen der Kette durch die Gehilfen einstellt, oder sei es, dass sie nur bis zu einer gewissen Grenze eine bleibende Ausdehnung annimmt, — ein geringeres Schwanken der Messungsresultate als im Anfange der Messung oder bei kleineren Linien zeigt. Ist diese Bemerkung allgemein richtig, so liegt der Schluss nahe, dass der mittlere Fehler M nicht einmal im Verhältnisse der Quadratwurzel aus der Länge der Linie, sondern noch langsamer wächst. Es braucht indessen nicht bemerkt zu werden, dass sich der eben berührte Umstand ebensowenig als mancher andere von geringerer Bedeutung in die Rechnung ziehen lässt.

4.

Da die mittleren Werthe x, y, z, sowie der constante Fehler c nicht getrennt von einander, sondern nur aus directen Kettenmessungen, — deren es mindestens vier sein müssen, — gefunden werden können, so muss man, insbesondere für den Fall einer überschüssigen Anzahl von Beobachtungen, jede irgend erlaubte Abkürzung der am Schlusse des Art. 2 für M erhaltenen Formel eintreten lassen. Die beiden letzten Glieder derselben

$$2.\frac{cz}{l^2}+2\frac{z^2}{l^3}$$

sind aber gegen die ersten aus doppeltem Grunde sehr klein; einmal, weil die Abweichung z bei einiger Aufmerksamkeit der Gehilfen immer nur gering ausfällt, und dann, weil zwei Glieder die zweite und dritte Potenz von l im Nenner enthalten, also höherer Ordnung als die ersten Glieder

sind. Dieselben können daher weggelassen werden, oder, was auf dasselbe hinauskommt, man darf $z = 0$ setzen, und findet unter dieser Annahme:

$$M = \sqrt{L\left[\frac{c^2+x}{l} + l.y\right]}$$

oder, wenn man diese Gleichung nach den Unbekannten x und y ordnet:

$$x + l^2.y + \left(c^2 - \frac{l}{L}M^2\right) = 0.$$

Um dieser Bedingung möglichst entsprechend, die x und y zu bestimmen, nehme ich an, es sei eine längere Linie mit einer zuvor justirten Kette und dann auch mit Stäben wiederholt gemessen worden. Ist die eine Messungsart eben so oft wiederholt worden als die andere, so kann das arithmetische Mittel der mittelst der Stäbe gefundenen Resultate im Vergleich zu jenem der Kettenmessung als die wahre Länge der Linie darstellend betrachtet werden. Diese Annahme muss wohl, obgleich sie nicht in voller Strenge stattfindet, aus praktischen Rücksichten und um die Rechnung nicht unnöthig zu compliciren, gemacht werden. Vermöge derselben ergiebt sich der genäherte Werth des constanten Fehlers c der Kette unmittelbar dadurch, dass man jene wahre Länge von dem arithmetischen Mittel der durch die Messung mit der Kette erhaltenen Resultate abzieht*) und die Differenz mit $\frac{l}{L}$ multiplicirt.

Wenn man ferner jene Länge von dem Ergebnisse jeder einzelnen Kettenmessung abzieht und die Differenzen in das Quadrat erhebt, so liefert uns die Quadratwurzel aus dem arithmetischen Mittel aller dieser Quadrate den dieser Beobachtungsreihe entsprechenden genäherten Werth von M. Was endlich l betrifft, so ist dafür jedesmal die bei der Justirung der Kette gefundene Länge zu setzen.

Sind mehrere Beobachtungsreihen gegeben, welche sich unter sonst gleichen Umständen auf andere Linien und Kettenlängen beziehen, so gelten diese Bemerkungen hierfür in gleicher Weise. —

Obgleich in der für M abgeleiteten Formel die wesentlichsten Fehlerquellen berücksichtigt sind, so wird sie doch, wie man auch x und y wählen möge, schon darum nicht vollkommen genau allen Beobachtungen genügen können, weil die Werthe von M und c nur angenähert bekannt und manche Unregelmässigkeiten nicht in die Rechnung gezogen worden sind. Indessen erhält man nach bekannten Principien**) die plausibelsten Werthe von x und y, wenn man sie so bestimmt, dass die Summe der Quadrate der Ausdrücke:

$$u = L\left[\frac{c^2+x}{l} + ly\right] - M^2$$

*) Gauss. Theoria combin. observ. Art. 5.
**) *Gauss. Theoria* combin. observ. Art. 21.

ein Minimum wird. Wendet man die Gauss'sche Bezeichnung:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n = [a],$$
$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = [ab]$$

an, so ergeben sich für x und y die folgenden Gleichungen:

$$1) \qquad \left[\frac{L^2}{l^2}\right] x + [L^2] y = \left[\frac{L}{l}\left(M^2 - \frac{L}{l}c^2\right)\right],$$

$$2) \qquad [L^2] x + [L^2 l^2] y = \left[Ll\left(M^2 - \frac{L}{l}c^2\right)\right],$$

womit nun der theoretische Theil der Frage erledigt ist.

5.

Die vorhergehenden Betrachtungen können erst Geltung erlangen, wenn sie sich an wirklich angestellte Beobachtungen enge genug anschliessen lassen. Es braucht nicht näher ausgeführt zu werden, dass hier diejenigen Beobachtungen vorzuziehen sind, welche ausschliesslich zum Zwecke der Lösung der vorliegenden Frage angestellt, von allen nicht unmittelbar zur Sache gehörenden Einflüssen frei sind, und so vorliegen, wie sie gemacht wurden. Hierzu sind, wie ich glaube, die Messungsresultate, welche Herr Prof. Gerling im 6. Bande des Archivs von Grunert S. 375 veröffentlicht hat, die geeignetsten. Indem ich dieselben wähle und der Vollständigkeit wegen hier zusammenstelle, versteht es sich von selbst, dass deren Combination auf die vorangehenden Erörterungen sich gründen und daher von jener des Herrn Prof. Gerling verschieden sein wird, sowie auch zu anderen Schlussfolgerungen führt. —

Jene Beobachtungen beziehen sich auf fünf verschiedene Linien, wovon jede mit Ketten von 5, 3, 2 Ruthen Länge je zehn Mal, und dann auch zehn Mal mit Stäben gemessen wurde, so dass im Ganzen 200 directe Messungen vorliegen, aus welchen sich alle diejenigen Grössen ableiten lassen, die zur Ermittelung der, in der Formel für M vorkommenden Zahlenwerthe nöthig sind und den Umständen entsprechen, unter welchen jene Beobachtungen gemacht worden sind.

Wenn man, wie bereits bemerkt wurde, die aus der zehnmaligen Messung mit Stäben hervorgegangenen Mittelwerthe für die wahren Längen der Linien setzt, so genügt hier die blose Angabe jener Mittelwerthe.

Nur in Hinsicht der Abweichungen, welche sich durch die wiederholten Justirungen der Kette ergeben haben, wäre eine grössere Vollständigkeit der a. a. O. mitgetheilten Resultate zu wünschen gewesen. Es wären dadurch nicht nur Vergleichungen mit den Werthen von c möglich geworden, sondern es hätten für die l durchgehends die gehörigen Werthe, statt, wie es nun geschehen muss, einfach nur die Werthe 5, 3, 2 benutzt werden können.

Gemessene Linien.	I.	II.	III.	IV.	V.
Länge der Kette: 5 Ruthen.	20,324	49,506	64,934	79,910	100,000
	20,322	49,517	64,985	79,880	99,991
	20,353	49,500	64,956	79,912	100,030
	20,327	49,512	65,000	79,891	100,000
	20,330	49,468	65,034	79,895	100,030
	20,330	49,460	65,000	79,850	100,050
	20,342	49,450	64,970	79,844	100,010
	20,331	49,477	64,955	79,850	100,020
	20,346	49,450	64,925	79,885	100,030
	20,334	49,440	64,930	79,851	100,000
Mittelwerth der Kettenmessnng	20,3339	49,4780	64,9689	79,8768	100,0161
Länge der Linie	20,3572	19,5430	64,9932	80,0065	100,1694
Constanter Fehler *c*	0,00574	0,00656	0,00187	0,00815	0,00765
Länge der Kette: 3 Ruthen.	20,360	49,467	64,900	79,860	100,065
	20,340	49,490	64,920	79,850	100,115
	20,340	49,480	64,900	79,860	100,050
	20,340	49,510	64,910	79,873	100,025
	20,345	49,490	64,960	79,800	99,965
	20,315	49,500	64,900	79,850	100,065
	20,330	49,530	64,890	79,875	100,070
	20,320	49,535	64,920	79,860	100,120
	20,335	49,550	64,960	79,855	100,037
	20,320	49,490	64,960	79,850	99,960
Mittelwerth der Kettenmessung	20,3345	49,5042	64,9220	79,8593	100,0472
Länge der Linie	20,3572	49,5430	64,9932	80,0065	100,1694
Constanter Fehler *c*	0,00187	0,00235	0,00321	0,00552	0,00366
Länge der Kette: 2 Ruthen.	20,355	49,490	64,880	79,885	100,000
	20,330	49,470	64,920	79,885	100,001
	20,320	49,440	64,860	79,900	100,004
	20,350	49,445	64,875	79,875	99,996
	20,320	49,460	64,880	79,915	100,020
	20,330	49,453	64,870	79,880	99,990
	20,340	49,435	64,910	79,862	100,005
	20,335	49,443	64,905	79,856	99,995
	20,330	49,465	64,890	79,850	99,991
	20,330	49,485	64,880	79,865	100,000
Mittelwerth der Kettenmessung	20,3340	49,4586	64,8870	79,8743	100,0002
Länge der Linie	20,3572	49,5430	64,9932	80,0065	100,1694
Constanter Fehler *c*	0,00228	0,00341	0,00327	0,00330	0,00337

Von diesen Messungen hat Herr Prof. Gerling jene der Linie V, mit der 3 Ruthen langen Kette gemessen, „nach dem Erfolg ausgeschlossen, weil ein eingetretenes Regenwetter den Boden erweichte und die Genauigkeit beeinträchtigte.' Für die vorliegende Art der Betrachtung würde jedoch, wie es scheint, der Ausschluss jener Beobachtungsweise nicht gerechtfertigt sein, weshalb ich sie unverändert beibehalte.

6.

Die Werthe des constanten Fehlers c, nach Art. 4 berechnet, sind in der obigen Zusammenstellung schon angegeben. Ich ermittle nun in früher angegebener Weise die Werthe von M^2 und stelle die Resultate der bequemern Uebersicht wegen, wie folgt, zusammen:

Kettenlänge.		I.	II.	III.	IV.	V.
5 R.	c^2	0,00003295	0,00004303	0,00000350	0,00006642	0,00005852
	M^2	0,00063318	0,00496320	0,00173558	0,01743485	0,02381978
	$M^2 - \frac{L}{l}c^2$	0,00049904	0,00453680	0,00169013	0,01637200	0,02264735
3 R.	c^2	0,00000350	0,00000552	0,00001030	0,00003047	0,00001340
	M^2	0,00068254	0,00199720	0,00576644	0,02173895	0,01753440
	$M^2 - \frac{L}{l}c^2$	0,00065879	0,00190600	0,00554321	0,02092634	0,01708712
2 R.	c^2	0,00000520	0,00001163	0,00001069	0,00001089	0,00001136
	M^2	0,00065724	0,00744520	0,01153444	0,01705775	0,02869500
	$M^2 - \frac{L}{l}c^2$	0,00060433	0,00715715	0,01118706	0,01662212	0,02812610

Um auch die übrigen zur Berechnung von x und y erforderlichen Zahlen darzulegen, füge ich noch die folgende Tabelle hinzu:

Kettenlänge.		I.	II.	III.	IV.	V.
	L	20,3572	49,5430	64,9932	80,0065	100,1694
	L^2	414,416	2454,509	4224,116	6401,044	10033,912
5 R.	$L^2 l^2$	10360,15	61362,72	105602,90	160026,10	250847,80
	$\frac{L^2}{l^2}$	16,58	98,18	168,96	256,04	401,36
	$Ll(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,050795	1,123833	0,549235	6,549334	11,342867
	$\frac{L}{l}(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,002032	0,044953	0,021969	0,261973	0,453715
3 R.	$L^2 l^2$	3729,74	22090,58	38017,04	57609,40	90305,21
	$\frac{L^2}{l^2}$	46,05	272,72	469,35	711,23	1114,88
	$Ll(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,040233	0,283288	1,080812	5,022724	5,134821
	$\frac{L}{l}(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,004470	0,031476	0,120090	0,558080	0,570536
2 R.	$L^2 l^2$	1657,66	9818,04	16896,47	25604,18	40135,65
	$\frac{L^2}{l^2}$	103,60	613,63	1056,03	1600,26	2508,48
	$Ll(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,024605	0,193859	1,453717	2,657751	5,634768
	$\frac{L}{l}(M^2 - \frac{L}{l}c^2)$	0,006518	0,048465	0,363430	0,664938	1,408692

Hieraus erhält man sofort die Werthe:

$$[L^2] = 70583{,}99,$$

$$[L^2 l^2] = 894063{,}68, \qquad \left[Ll\left(M^2 - \frac{L}{l}c^2\right)\right] = 41{,}14264,$$

$$\left[\frac{L^2}{l^2}\right] = 9437{,}34, \qquad \left[\frac{L}{l}\left(M^2 - \frac{L}{l}c^2\right)\right] = 4{,}56111.$$

Die Gleichungen 1) und 2) des Art. 4 können nur bezüglich x und y aufgelöst werden, und man erhält:

$$x = 0{,}00033974,$$

$$y = 0{,}000019196.$$

Hiernach ist also der mittlere Fehler M einer Linie, deren Länge L Ruthen beträgt und welche mit einer Kette von der Länge l Ruthen (mit dem constanten Fehler c) unter denselben Umständen wie die zu Grunde liegenden fünf Linien gemessen wird, durch die Gleichung:

$$M = \sqrt{L\left(\frac{c^2 + 0{,}00033974}{l} + 0{,}000019196 \,.\, l\right)}$$

dargestellt.

Diese setzt, wie man sieht, die Kenntniss des constanten Fehlers c voraus, welcher zu l addirt die richtige Kettenlänge giebt. Ist eine längere Linie, etwa durch Messung mit Stäben, auf dem Felde genau bestimmt $= \lambda$ gegeben, so braucht man nur, nach Art. 4, um c zu erhalten, jene Linie mit der betreffenden Kette mehrere Male zu messen, von dem arithmetischen Mittel dieser Messungsresultate die gegebene wahre Länge der Linie abzuziehen und die Differenz mit $\frac{l}{\lambda}$ zu multipliciren.

Angenommen z. B., man habe unter den oben vorausgesetzten Umständen für eine Kette gefunden:

$$c = -0{,}006, \; c^2 = 0{,}000036, \text{ wobei } l = 5 \text{ Ruthen},$$

und es sei hierauf eine Linie von der Länge $L = 100$ R. mit derselben Kette gemessen worden. Man erhält alsdann aus der oben erhaltenen Gleichung:

$$M^2 = 0{,}0238, \; M = 0{,}15 \text{ Ruthen}.$$

Uebrigens darf nicht unbemerkt bleiben, dass c^2 in allen zu Grunde liegenden Messungen so klein ist, dass es gegen den Posten 0,00033974 fast ohne Fehler ganz weggelassen werden könnte. Diess wird wohl immer der Fall sein, wenn die Kette mit gehöriger Sorgfalt berichtigt worden ist.

7.

Ich habe in Art. 3 bemerkt, dass diese Erörterungen auch zur Beantwortung der Frage führen, welcher Kettenlänge unter gegebenen *Umständen* der Messung der geringste mittlere Fehler ent-

spreche. Die in jenem Artikel für diese vortheilhafte Länge l gefundene Gleichung 1) geht, da $z=0$ gesetzt worden ist, in die folgende:

$$l^2 - \frac{c^2+x}{y} = 0 \quad \text{oder} \quad l = \sqrt{\frac{c^2+x}{y}}$$

über. — Wenn, wie diess in der Regel der Fall sein wird, c^2 gegen x ausser Acht gelassen werden darf, so kann man genähert auch

$$l_0 = \sqrt{\frac{x}{y}}$$

setzen, jedenfalls aber den hieraus hervorgehenden Werth als erste Annäherung benutzen.

Um auch hierfür einen bestimmten Fall zu betrachten, will ich die Werthe von x und y, welche den bisher betrachteten Messungsresultaten entsprechen, zu Grunde legen. Man findet dann:

$$l_0 = \sqrt{\frac{33974}{1920}} = 4{,}206 \text{ Rth.}$$

Dieser Länge der Kette entspricht aber, der ersten Tabelle des Art. 6 gemäss, durchschnittlich ein Werth von $c^2 = 0{,}00004$; man erhält also jetzt genauer:

$$l = \sqrt{\frac{37974}{1920}} = 4{,}447 \text{ Rth.}$$

Dieses Ergebniss, welches zeigt, dass hier weder sehr lange, noch sehr kurze, sondern etwa $4^1/_2$ Ruthen lange Ketten am vortheilhaftesten gewesen wären, gehört, wie mir scheint, zu den bemerkenswerthesten Folgerungen, welche sich aus den vorausgeschickten theoretischen Betrachtungen im Vereine mit den Messungsresultaten ziehen lassen, deren Vorbereitung und Veröffentlichung Herrn Prof. Gerling zu verdanken ist.

VI.

Ueber die Controverse zwischen Doppler und Petzval, bezüglich der Aenderung des Tones und der Farbe durch Bewegung.

Von Dr. Ernst Mach in Wien.

In dem Folgenden soll in Kürze die sowohl für die Physik, wie für die Astronomie interessante Controverse zwischen Doppler und Petzval bezüglich der Aenderung des Tones und der Farbe durch Bewegung dargelegt werden. Ich will mich bemühen, die ziemlich unklaren Streitpunkte in ein helleres Licht zu setzen und werde zu diesem Zwecke zwar die historische Ordnung festhalten, aber nur die wesentlichsten Punkte herausheben.

I. Im Jahre 1849 erschien eine kleine Abhandlung von Doppler: „Ueber das farbige Licht der Doppelsterne", worin behauptet wird, dass Tonhöhe und Farbe durch schnelle Bewegung der Wellenquelle oder des Beobachters geändert werden. Doppler leitet dies durch eine ganz einfache Betrachtung ab, indem er annimmt, dass von der Wellenquelle in gleichen Zwischenzeiten Impulse ausgehen, welche, mit bestimmter Geschwindigkeit fortschreitend, Auge oder Ohr treffen. Je nachdem nun der Beobachter sich gegen oder von der Quelle bewegt, werden für ihn die Impulse schneller oder langsamer auf einander folgen, d. h. eben der Ton wird höher oder tiefer, die Farbe rückt gegen das Violette oder Rothe. Aehnliches findet statt, wenn sich die Quelle allein bewegt oder Quelle und Beobachter zugleich in Bewegung sind. Mit Hinweglassung der sehr einfachen Rechnung will ich blos die Formel angeben, zu welcher man auf diese Art gelangt.

Ist $\varkappa$ die Geschwindigkeit der Wellenquelle, c die des Beobachters, γ die der Welle, ferner τ die Schwingungsdauer der Quelle und τ' die scheinbare Schwingungsdauer, so hat man

$$\tau' = \tau \,.\, \frac{\gamma - \varkappa}{\gamma - c},$$

wobei $\varkappa$ und c positiv zu nehmen sind in der Richtung von der Quelle zum Beobachter, negativ in der entgegengesetzten.

Doppler verwendet den angegebenen Satz zur Erklärung der Erscheinungen an farbigen Sternen, indem er annimmt, die Geschwindigkeit dieser Sterne sei nicht verschwindend gegen die Lichtgeschwindigkeit.

Die Doppler'sche Behandlungsweise des Gegenstandes genügt wohl nach den gegebenen Andeutungen nicht den Anforderungen der strengen Wissenschaft, sondern kann nur als erster Versuch einer Theorie gelten. Wir besprechen später die von Petzval vorgebrachten Einwürfe speciell. Ist aber auch die Doppler'sche Ableitung ungenau, so scheint doch das gewonnene Resultat richtig zu sein. Es wurden nämlich zur Deutung des erwähnten Satzes zahlreiche Experimente angestellt, welche fast sämmtlich zur Befriedigung ausfielen. Dass der einzige Gegenversuch von Angström *) (mit dem Spectrum des elektrischen Funkens) gar nicht entscheiden könne, glaube ich in einer früheren Abhandlung **) dargethan zu haben, in welcher ich auch eigene Experimente anführe, die mir noch mehr als die ältern für den Doppler'schen Satz zu sprechen scheinen.

Es dürfte demnach, wenigstens für den Augenblick nicht nöthig sein, auf die Experimente näher einzugehen, wir können uns auf die theoretische Seite des Streites beschränken.

II. Doppler's Ansicht wurde von Professor Petzval angegriffen in der Schrift: „Ueber ein allgemeines Princip der Undulationslehre, Gesetz der Erhaltung der Schwingungsdauer". Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften VIII. Bd. S. 134.

Ich will mit Uebergehung des für eine mathematische Abhandlung allzu reichen oratorischen Schmuckes den wesentlichen Inhalt dieses Aufsatzes darlegen.

Es giebt drei Differentialgleichungen der Bewegung eines Systems von materiellen Punkten, das gleiche Elasticität nach allen Seiten besitzt:

$$a\frac{d^2\xi}{dt^2}=3\frac{d^2\xi}{dx^2}+\frac{d^2\xi}{dy^2}+\frac{d^2\xi}{dz^2}+2\frac{d^2\eta}{dx\,dy}+2\frac{d^2\zeta}{dx\,dz},$$

$$a\frac{d^2\eta}{dt^2}=\frac{d^2\eta}{dx^2}+3\frac{d^2\eta}{dy^2}+\frac{d^2\eta}{dz^2}+2\frac{d^2\xi}{dx\,dy}+2\frac{d^2\zeta}{dy\,dz},$$

$$a\frac{d^2\zeta}{dt^2}=\frac{d^2\zeta}{dx^2}+\frac{d^2\zeta}{dy^2}+3\frac{d^2\zeta}{dz^2}+2\frac{d^2\xi}{dx\,dz}+2\frac{d^2\eta}{dy\,dz}.$$

Diese Gleichungen sind unter der Voraussetzung abgeleitet, dass sehr nahe an einander liegende Punkte auch nahezu dieselbe Bewegung annehmen, was auch bei sehr heftigen Bewegungen stattfindet, wenn nur die Continuität der Masse nicht verletzt wird. Die Gleichungen gelten dann auch für diese heftigen Bewegungen.

*) Optische Untersuchungen. Pogg. Ann. 94. Bd. S. 141.

**) Ueber die Aenderung des Tones und der Farbe durch Bewegung von Dr. Ernst Mach. Sitzungsberichte der k. k. Akademie der Wissenschaften zu Wien 41. Bd. S. 543.

Sollten auch künftighin andere Bewegungsgleichungen aufgestellt werden, welche sich der Erfahrung genauer anschliessen, so werden sie doch mit den obigen drei Eigenschaften gemein haben:

1. die lineare Form;

2. ξ, η, ζ gehen undifferentiirt in die Gleichungen nicht ein, weil nur der Unterschied der Verschiebung benachbarter Theile Molecularkräfte weckt;

3. nur die zweiten Differentialquotienten von ξ, η, ζ nach t sind in den Gleichungen enthalten.

Aus diesen ganz allgemeinen Eigenschaften der Gleichungen lassen sich nun schon Schlüsse ziehen. Es ist z. B. eine unmittelbare Folge der linearen Form der Gleichungen, dass, wenn die Functionen ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 .... für sich genügen, auch die Summe $\Sigma C_n \vartheta_n$ Genüge leistet, wo C eine Constante bedeutet.

Aus der linearen Form der Gleichungen folgt also das sogenannte Princip der Coexistenz der elementaren Bewegungen. Wird in einem elastischen Medium zugleich eine Strömung und eine Undulation erregt, so legen sich beide Bewegungen über einander, ohne sich zu stören; auch werden alle Elemente, welche die Undulation charakterisiren, also auch die Schwingungsdauer und im Zusammenhange damit Ton und Farbe durch die Strömung in keiner Weise afficirt.

Petzval begnügt sich nicht mit dieser ganz allgemeinen Ableitung, sondern stellt specielle Differentialgleichungen auf für die Bewegung eines Mediums, in welchem sich irgend eine permanente Strömung mit einer Undulation combinirt. Er untersucht, welche Schwingungsweise sich legen lasse über eine mit der Zeit unveränderliche Strömung, deren Geschwindigkeitscomponenten u, v, w also nur Functionen der Coordinaten und nicht der Zeit sind. Die der Undulation angehörigen ξ, η, ζ werden nicht auf ein bestimmtes Theilchen, sondern auf einen bestimmten Ort bezogen. Petzval findet, dass man den aufgestellten Gleichungen genügen könne, indem man für die Undulation setzt:

$$\xi = e^{\pm st\sqrt{-1}} X, \qquad \eta = e^{\pm st\sqrt{-1}} Y, \qquad \zeta = e^{\pm st\sqrt{-1}} Z,$$

wobei s eine Constante ist, welche die Schwingungsdauer bestimmt; X, Y, Z werden nur als Functionen von xyz betrachtet. — Substituirt man diese ξ, η, ζ in die von Petzval aufgestellten Gleichungen, so fällt nämlich mit der Exponentielle zugleich das t heraus, es bleiben nur X, Y, Z zurück und lassen sich immer von einer solchen Form wählen, dass sie der Gleichung genügen. Ein constantes s in den Ausdruck für ξ, η, ζ gesetzt, d. h. eine constante Schwingungsdauer befriedigt demnach die Gleichung. Es lässt sich also über eine permanente Strömung eine Schwingungsweise mit an allen Orten constanter Schwingungsdauer legen.

Würde man im Gegentheil s als variabel betrachten, so fällt t nicht aus der Gleichung und man wird zu einem Widerspruche geführt, indem

man X, Y, Z als unabhängig von t vorausgesetzt hat und doch eine Abhängigkeit bestehen müsste, weil zugleich mit X, Y, Z auch t in der Gleichung erscheint. — Nun wird noch gezeigt, dass eine schwingende Fläche $\varphi(x, y, z) = 0$ in einem von permanenten Strömungen durchzogenen Medium nur eine Schwingungsweise mit aller Orten constanter Schwingungsdauer erregen könne. — Betrachten wir den Petzval'schen Gedankengang, so finden wir, dass er auf den Doppler'schen Fall gar nicht passt, sondern diesen im Gegentheil *a priori* ausschliesst. Petzval spricht von einer aller Orten constanten Schwingungsdauer. Doppler's Satz behauptet aber gar nichts über die Schwingungsdauer an diesem oder jenem Orte, welcher eben als mit der Zeit variabel betrachtet wird. Die Tonhöhe hängt ja nach Doppler nicht von der Entfernung des Beobachters von der Tonquelle, sondern von seiner Geschwindigkeit ab, von dem Differentialquotienten der genannten Entfernung nach der Zeit genommen.

In einem schwingenden Medium sind die ξ, η, ζ im Allgemeinen Functionen der Zeit und der Coordinaten, denn sie sind sowohl zu verschiedenen Zeiten, als auch an verschiedenen Orten verschieden. So lange x, y, z dieselben sind, betrachtet man offenbar die Schwingung an einem und demselben Orte; will man die Schwingung für einen bewegten Beobachter untersuchen, so sind alle irgendwie in ξ, η, ζ enthaltene x, y, z als Functionen der Zeit zu betrachten. In Petzval's Ausdrücken z. B.:

$$\xi = e^{\pm st\sqrt{-1}} X \text{ etc. etc.}$$

wären eben die in X, Y, Z enthaltenen x, y, z als mit t variabel zu betrachten, auch beim Differentiiren nicht als independent variabel, sondern sämmtlich als Functionen von t zu behandeln. Da Petzval diess alles nicht rücksichtigt, so behandelt er eben den Doppler'schen Fall nicht. — Die ganze Anlage von Petzval's Rechnung scheint auf einem Missverständnisse zu beruhen. Betrachtet man einen einzigen Punkt in einem Medium, so ist es offenbar gleichgültig, ob man den Punkt als bewegt und das Medium als ruhend betrachtet, oder umgekehrt. Hingegen wird es nie gelingen, die relative Bewegung zweier Punkte gegen einander durch eine Strömung des Mediums zu ersetzen. Wenn also Petzval glaubt, er behandle den Doppler'schen Fall, indem er statt Quelle und Beobachter gegen einander zu bewegen, beide ruhen lässt und das Medium in Strömung versetzt, so irrt er.

Wollte man die Sache kurz in allgemein verständliche Worte zusammenfassen, so würde man sagen:

1. Petzval hat durch seine Deduction gezeigt, dass windiges Wetter keinen Einfluss übe auf die Tonhöhe.

2. Doppler untersucht, wie die Tonhöhe durch die relative Bewegung von Quelle und Beobachter afficirt wird.

Die Resultate beider Untersuchungen können sich nicht widersprechen.

Der durch Petzval's Aufsatz eingeleitete Streit führte nun, wie dies wohl gewöhnlich ist, zu keinem andern Resultate, als dass jede Partei auf ihrer Aussage beharrte. Doppler berief sich auf das Experiment, Petzval auf die Deduction. Keinem fiel es ein, die Gründe des Andern genauer zu prüfen.

III. Hierauf erschienen noch zwei Abhandlungen*) von Petzval, bei deren Betrachtung wir finden, dass die Streitfrage in eine neue Phase getreten sei. Petzval macht nun nicht sowohl den Satz der Erhaltung der Schwingungsdauer, als vielmehr ganz andere und untergeordnete Gründe gegen Doppler geltend. Petzval weist eigentlich blos nach, inwiefern der Doppler'sche Satz mangelhaft deducirt sei, und leitet zuletzt sogar selbst eine der Doppler'schen Formel entsprechende aus den Gleichungen der Mechanik ab, indem er aber auch gegen diese jene untergeordneten Gründe geltend macht. Betrachten wir die einzelnen Punkte etwas näher, so finden wir folgende Haupteinwürfe:

α. Doppler betrachtet die Welle als ein Individuum, statt die Elementarwellen in Rechnung zu ziehen.

β. Es wird stillschweigend vorausgesetzt, dass die progressive Bewegung der Tonquelle keinen Einfluss übe auf das Medium, was unstatthaft ist.

γ. Endlich kann man bei Auswerthung der Doppler'schen Formel auch negative und unendlich hohe Töne erhalten, was absurd ist.

Was sich gegen diese Einwürfe wieder vorbringen lässt, habe ich bereits in der oben citirten Abhandlung angeführt; im Allgemeinen sind sie wohl richtig, beweisen aber nur, dass der Doppler'sche Satz mangelhaft deducirt sei. Welche Modificationen die Doppler'sche Formel erfahren würde, wenn man alle diese Nebenumstände in Betracht ziehen wollte, kann Petzval ebensowenig angeben als Doppler, da keiner von beiden die Rechnungen durchgeführt hat. — Es hätte gar keinen Sinn, wenn man, wie Petzval immer wünscht, Doppler's Satz durch Petzval's Princip ersetzen wollte. Beide Sätze beziehen sich auf ganz verschiedene Fälle und der eine kann dem andern ebensowenig substituirt werden als ein Lehnstuhl einem Droschkenpferde.

Den meisten Nachdruck legt Petzval auf die Veränderung des Mediums durch die progressive Bewegung der Tonquelle; denn er giebt zu, dass der Doppler'sche Satz eine gewisse Giltigkeit hätte, wenn diese Veränderung nicht wäre, wenn man sich die Quelle als imaginären Punkt denken könnte, der, indem er sich bewegt, das Medium nicht afficirt. Für diesen Fall leitet Petzval selbst eine der Doppler'schen Formel nahekommende ab, und zwar aus der Gleichung für die plane Welle in einem ela-

*) Ueber die Unzukömmlichkeiten gewisser populärer Anschauungen in der Undulationslehre etc. Sitzungsberichte VIII Seite 567 und IX Seite 699.

stischen Medium. Hieraus ist schon klar, dass diese Formel dem Principe nicht widerspreche; nur Petzval widerspricht sich selbst, denn er verfuhr in der ältern Abhandlung von Doppler abweichend, indem er nur die Schwingungsdauer an beliebigen, der Zeit nach unveränderlichen Orten untersuchte, und verführt in den folgenden Arbeiten mit Doppler übereinstimmend, indem er auf die Bewegung Rücksicht nimmt.

Die Gleichung, welcher eine auf der Achse der X senkrechte Planwelle genügt, ist:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = s^2 \frac{d^2\xi}{dx^2},$$

ihr Integrale:

$$\xi = f(x - st) + F(x + st),$$

wobei f, F willkürliche Functionen sind. Diese f, F werden hier so gewählt, dass $f(z)$, $F(z)$ nur für solche z, welche von 0 wenig abweichen, von der Null verschiedene Werthe haben. Die Constante s bezeichnet die Fortpflanzungsgeschwindigkeit. Setzt man nun eine Reihe von sehr kleinen Erregungen des Mediums voraus, welche das Gesetz $\sin k\vartheta\, d\vartheta$ befolgen, wobei ϑ die Zeit ist und die mit der Geschwindigkeit c fortschreiten, so ist für den Ort x und die Zeit t die aus den Elementarwellen resultirende Erregung:

$$\xi = \int_0^t f\left\{x - c\vartheta - s(t-\vartheta)\right\} \sin k\vartheta\, d\vartheta$$

$$+ \int_0^t F\left\{x - c\vartheta + s(t-\vartheta)\right\} \sin k\vartheta\, d\vartheta,$$

Durch Ausführung der Integration ergiebt sich:

$$\xi = \frac{A}{s-c} \sin \frac{k}{c-s}(x - st) + \frac{B}{s+c} \sin \frac{k}{s+c}(x + st),$$

wobei A, B constante Grenzintegrale bezeichnen. Dieses Resultat stimmt bezüglich der Wellenlänge augenscheinlich mit dem Doppler'schen überein, giebt aber zugleich auch Aufschluss über die Intensität der Welle.

Offenbar ist diese Ableitung viel schöner, vollständiger und strenger, als die Doppler'sche, doch erklärt Petzval dieselbe für unbrauchbar, weil auf die durch die progressive Bewegung der Tonquelle erregte Strömung keine Rücksicht genommen wird. Ich habe in der früher citirten Abhandlung zu zeigen versucht, dass diese Strömung, bei bewegten Körpern von kleinem Querschnitte, wo das Medium zur Seite ausweichen kann, die Ergebnisse des Calcüls nicht bedeutend afficirt. Die Petzval'sche Formel wird im Gegentheil in den meisten Fällen sich der Wahrheit sehr nähern und in manchen speciellen streng richtig sein.

Es scheint mir, dass Petzval seine Analyse blos deshalb als unbrauch-

bar verwirft, weil er nicht eingestehen will, dass die Ausdehnung des Satzes der Erhaltung der Schwingungsdauer auf den Doppler'schen Fall unberechtigt war.

IV. Fassen wir die Hauptpunkte unserer Untersuchung noch einmal zusammen, so können wir Folgendes als constatirt ansehen:

1. Doppler's Ansicht wird durch die Experimente bestätigt.
2. Petzval's Satz der Erhaltung der Schwingungsdauer darf auf den Doppler'schen Fall nicht ausgedehnt werden.
3. Petzval zeigt, dass Doppler's Formeln ungenügend deducirt seien.
4. Petzval leitet auf strengere Weise den Doppler'schen Formeln nahe kommende ab, die er zwar selbst für unbrauchbar erklärt, die aber nichtsdestoweniger in den meisten Fällen anwendbar sind.

Die von Petzval vorgebrachten Gründe können also Doppler's Ansicht eher bestätigen als widerlegen. Dagegen bleibt für die vollständige mathematische Erklärung des Factums, mit Berücksichtigung aller Nebenumstände, noch viel zu leisten übrig, und es ist der letzte Zweck dieses Aufsatzes, diese Arbeit von Neuem anzuregen.

Man würde das Problem beiläufig auf folgende Art angreifen:

Denkt man sich eine begrenzte Ebene in einem elastischen Medium senkrecht zu sich selbst mit constanter Geschwindigkeit fortschreitend, so wird diese, einen bestimmten Anfangszustand vorausgesetzt, dem Medium nach einer gewissen Zeit einen gewissen Dichtenzustand beigebracht haben. Ueber dieses Medium von überall bekannter Dichte kann man nun die von der Ebene ausgehenden Schwingungen legen.

Diese Betrachtung führt zu ziemlich complicirten Differentialgleichungen, deren Integration mir aber hoffentlich noch gelingen wird, falls nicht zum Vortheile der Wissenschaft ein gewandterer Mathematiker die Lösung dieser Aufgabe übernehmen sollte.

Kleinere Mittheilungen.

IX. Ueber die Berechnung des Integrallogarithmen und einiger mit ihm zusammenhängenden anderen Functionen. Von C. A. BRETSCHNEIDER, Professor am Realgymnasium zu Gotha.

Die unter dem Namen des Integrallogarithmus bekannte transcendente Function

$$li\,z^{\pm 1} = \int \frac{d.e^{\pm lz}}{\pm lz} = \gamma + l(\pm lz) \pm \frac{lz}{1.1!} + \frac{(lz)^2}{2.2!} \pm \frac{(lz)^3}{3.3!} + \frac{(lz)^4}{4.4!} \pm \dots$$

hat durch die eigenthümlichen Schwierigkeiten, welche sie einer umfassenden Untersuchung ihrer Eigenschaften entgegengesetzt, eine gewisse Berühmtheit erlangt. Schon vor länger als vierzig Jahren haben sich Soldner und Mascheroni*) mit ihr beschäftigt und gezeigt, dass der Werth der Constante γ, wenn das Integral für $z = 0$ selbst Null werden soll, auf die Constante der natürlichen harmonischen Reihe zurückkommt. Beide Analysten, sowie bald darauf auch Bessel**), bemühten sich Reihenentwickelungen aufzufinden, die möglichst stark convergirten und somit bequem zu numerischer Berechnung der Function gebraucht werden könnten. Die Resultate dieser Untersuchungen, die meistens das Ergebniss besonderer analytischer Kunstgriffe waren und deshalb sehr wenig innern Zusammenhang zeigten, habe ich in einer, vor länger als zwanzig Jahren in Crelle's Journal***) erschienenen Abhandlung zusammengestellt und aus einer gemeinsamen Quelle abgeleitet, zugleich aber auch nachgewiesen, dass alle die Hilfsmittel, welche die Theorie der Potenzreihen und der Kettenbrüche zur Entwickelung und Untersuchung transcendenter Integralfunctionen darbieten, im vorliegenden Falle entweder geradezu unbrauchbar sind, oder nur Resultate geben, die nichts Erhebliches erkennen lassen und namentlich für numerische Berechnung nur sehr geringe Hilfe gewähren. In diesem Stadium befindet sich die Theorie des Integrallogarithmus

---

*) Soldner, théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendante; à Munic, 1809. — Mascheroni, adnotationes ad calculum integralem Euleri; Ticini 1790.

**) Bessel, Königsberger Archiv für Mathematik und Naturwissenschaften.

***) Theoriae logarithmi integralis lineamenta nova; Crelle's Journal Bd. 17.

noch bis auf den heutigen Tag. Da nun auch nicht eine einzige analytische Eigenschaft oder Relation zwischen Functionenwerthen verschiedener Argumente hat aufgefunden werden können und es fast scheint, als ob dergleichen für diese Transcendente gar nicht existirten, so ist die numerische Berechnung derselben vor der Hand wohl das Wichtigste, was für sie zu leisten ist.

Nun hat zwar Soldner bereits eine Tafel der Integrallogarithmen gegeben; allein abgesehen von ihrer geringen Ausdehnung ist sie, seiner eignen Angabe zu Folge, ohne alle Controlen berechnet, und so darf es nicht Wunder nehmen, dass einzelne Werthe aus ihr, bei zufälliger Prüfung derselben durch andere Rechner, sehr erhebliche Abweichungen von den Resultaten der letzteren zeigten. Unter diesen Umständen darf ich hoffen, durch Mittheilung des Nachfolgenden den Gegenstand vor der Hand zu einer Art von Abschluss zu bringen.

Die Theorie unserer Transcendente liefert, streng genommen, nur zwei Reihenentwickelungen, die so convergent sind, dass sie sich zu numerischer Berechnung eignen, nämlich:

$$1)\qquad li\,x^{\pm 1} = \gamma + l(\pm lx) \pm \frac{lx}{1.1!} + \frac{(lx)^2}{2.2!} \pm \frac{(lx)^3}{3.3!} + \frac{(lx)^4}{4.4!} \pm \cdots$$

$$2)\qquad li\,(a+x) = li\,(au) = li\,a + l\left(\frac{lau}{la}\right) + a\left[\frac{lu}{1!}A_1 + \frac{(lu)^2}{2!}A_2 + \frac{(lu)^3}{3!}A_3 + \cdots\right]$$

$$u = 1 + \frac{x}{a};\; A_n = \frac{1}{n} - \frac{la}{n(n+1)} + \frac{(la)^2}{n(n+1)(n+2)} - + \cdots$$

Die erste Reihe giebt die Functionenwerthe für diejenigen x, welche sich nicht allzuweit von der Einheit entfernen, während die zweite dazu dient, um von bereits gefundenen Functionenwerthen zu denen nahe liegender Argumente fortzuschreiten. Die Letztere ist um so bemerkenswerther, als alle bis jetzt geführten Untersuchungen, von wie verschiedenen Standpunkten sie auch ausgehen und wie verschiedene Methoden und Kunstgriffe der Entwickelung sie auch anwenden mögen, schliesslich immer die Reihe 2) als Endresultat geben.

So erträglich nun auch beide Reihen beim ersten Blicke für die numerische Rechnung gebaut zu sein scheinen, so unerhört lästig wird die wirkliche Ausführung der letzteren. Bei der höchst mässigen Convergenz jener Ausdrücke muss man, sobald x sich nur um ein Geringes von der Einheit entfernt oder der Bruch $\frac{x}{a}$ den Werth 0,1 übersteigt, fast immer zwischen zehn bis zwanzig Glieder zusammennehmen, um das Resultat auf zehn Decimalstellen genau zu erhalten. Ist schon die Berechnung so vieler auf einander folgender Potenzen eines natürlichen Logarithmen beschwerlich, so wird die Mühe noch um ein Bedeutendes durch die erforderlichen Multiplicationen mit den Coefficienten A gesteigert, und zum Schlusse hat man noch obendrein die Berechnung des Logarithmen eines Logarithmen auszu-

führen. Es lässt sich zwar die Reihe 2) so umformen, dass das Glied $l\left(\frac{lau}{la}\right)$ wegfällig wird; man findet dadurch:

$$3)\qquad li\,(a+x) = li\,a + a\left[\frac{lu}{1!}B_1 + \frac{(lu)^2}{2!}B_2 + \frac{(lu)^3}{3!}B_3 + \ldots\right]$$

$$B_1 = \frac{1}{la};\ B_n = \frac{1-(n-1)\,B_{n-1}}{la};$$

aber dennoch bleibt für jede einzelne Werthbestimmung immer noch so viel Arbeit übrig, dass auch die hartnäckigste Geduld dadurch erschöpft wird.

Um diesem Uebelstande zu begegnen, habe ich statt des Integrales $\int\frac{dz}{lz}$ das verwandte Integral $\int\frac{e^y\,dy}{y}$ angewendet, und damit die Berechnung von $li\,z$ auf die von $li\,.\,e^y$ zurückgeführt. Setzt man nämlich in die Gleichung 3) e^a anstatt a und bezeichnet $\left(1+\frac{x}{e^a}\right)$ mit v, so erhält man:

$$li\,(e^a+x) = li\,.\,e^a + e^a\left\{\frac{lv}{1!}C_1 + \frac{(lv)^2}{2!}C_2 + \frac{(lv)^3}{3!}C_3 + \ldots\right\}$$

$$C_1 = \frac{1}{a};\ C_n = \frac{1-(n-1)\,C_{n-1}}{a};$$

oder wenn man, um die Multiplication der in der Klammer stehenden Reihe mit e^a zu ersparen, diesen Factor gleich mit den einzelnen Coefficienten verbindet und jeden der letzteren noch durch die ihm zugehörige natürliche Facultät dividirt:

$$4)\quad li\,(e^a+x) = li\,a = lv\,.\,D_1 + (lv)^2 D_2 + (lv)^3 D_3 + (lv)^4 D_4 + \ldots$$

$$D_1 = \frac{e^a}{a};\ D_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{e^a}{a.n!} - \frac{n}{a}D_n\right).$$

Diese Reihe ist in der That sehr brauchbar, um die Integrallogarithmen aller beliebigen, namentlich sehr grosser oder sehr kleiner Zahlen zu berechnen. Nimmt man nämlich eine Tafel der Werthe e^a zu Hilfe, so braucht man nur x gleich dem im Zahlenwerthe von e^a vorkommenden Decimalbruche (letzteren natürlich negativ genommen), oder gleich der dekadischen Ergänzung dieses Bruches zu setzen, um den Werth von (e^a+x) in eine ganze Zahl zu verwandeln. Dadurch wird man zugleich in den Stand gesetzt, den Werth von $v = 1+\frac{x}{e^a}$ der Einheit so nahe zu bringen, als man will, und kann demnach lv so klein machen, dass wenige Glieder der Reihe 4) hinreichen, das Resultat auf 7 bis 10 Decimalstellen genau zu geben. Ein Paar Beispiele werden genügen, die Sache anschaulich zu machen. Es werde verlangt $li\,10$, $li\,11$, $li\,12$ etc. zu berechnen. Man hat:

$e^{2,3} = 9,97418$	also $10 = e^{2,3} + 0,02582$	$v = 1,00258$	$lv = +0,0025767$
$e^{2,4} = 11,02318$	$11 = e^{2,4} - 0,02318$	$v = 0,99789$	$lv = -0,0021122$
$e^{2,48} = 11,94126$	$12 = e^{2,48} + 0,05874$	$v = 1,00492$	$lv = +0,0049079$.

Je grösser die Zahlen sind, deren Integrallogarithmen gefunden werden

sollen, desto kleiner werden die lv, so dass die Arbeit immer rascher von Statten geht, je weiter man in derselben vorschreitet. So wird z. B. $e^{9,21} = 9996,600$ und $e^{10} = 22026,47$ und damit ergiebt sich:

$$10000 = e^{9,21} + 3,400 \quad v = 1,00034 \quad lv = +0,000340$$
$$22026 = e^{10} - 0,47 \quad v = 0,999978 \quad lv = -0,0000211.$$

Endlich ist auch klar, dass man keineswegs genöthigt ist, immer diejenige Potenz von e zu wählen, welche der gegebenen Zahl am nächsten liegt; man kann vielmehr zu einem und demselben Werthe von e^a verschiedene x nehmen, und dadurch die einmal gefundenen Coefficienten D für die Berechnung mehrerer Integrallogarithmen benutzen. So wird z. B. $e^3 = 20,08553$ und man erhält damit:

$20 = e^3 - 0,08553$	$lv = -0,00426$	$21 = e^3 + 0,91446$	$lv = +0,04452$
$19 = e^3 - 1,08553$	$lv = -0,05556$	$22 = e^3 + 1,91446$	$lv = +0,09104$
$18 = e^3 - 2,08553$	$lv = -0,10963$	u. s. w.	

Das Einzige, was bei dieser Art von Berechnung nothwendig vorausgesetzt werden muss, ist die Kenntniss der Integrallogarithmen für alle diejenigen Werthe von e^a, welche man bei den eben besprochenen Zerlegungen anzuwenden hat. Die Berechnung derselben geschieht, so lange a nicht grösser ist als 5, am bequemsten nach der Formel

$$5) \qquad li\, e^{\pm a} = \gamma + la \pm \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} \pm \frac{a^3}{3.3!} + \frac{a^4}{4.4!} \pm \cdots$$

die das Resultat mit verhältnissmässig grosser Schnelligkeit finden lässt. Wächst hingegen a über 5 hinaus, so wendet man bequemer die nachstehende Reihe an:

$$6) \qquad li\, e^{a \pm u} = li\, e^a + l\left(\frac{a \pm u}{a}\right) \pm u F_1 + u^2 F_2 \pm u^3 F_3 + u^4 F_4 \pm \cdots$$
$$F_1 = \frac{e^a - 1}{a}; \quad F_{n+1} = \frac{1}{n+1}\left(\frac{e^a}{a.n!} - \frac{n}{a} F_n\right),$$

welche aus der Gleichung 2) dadurch entsteht, dass man in letzterer beziehungsweise e^a und $e^{\pm u}$ anstatt a und u einsetzt. Die nachfolgende Tafel der Werthe von $li\, e^a$ ist zum grössten Theile auf diese Art berechnet worden. Da jedoch die Glieder der Reihe 5), auf die gehörige Weise verbunden, zugleich die Werthe der cyclischen und hyperbolischen Integral-Cosinus und Sinus finden lassen, so habe ich mich der zum Theil sehr grossen Mühe unterzogen, die ganze Tafel noch einmal mittelst der Formel 5) zu berechnen und die bereits gefundenen Werthe von $li\, e^a$ als Controlen zu verwenden. Zu dem Ende suchte ich die Summen der vier Reihen

$$\mathrm{I} = \gamma + la + \frac{a^4}{4.4!} + \frac{a^8}{8.8!} + \cdots \qquad \mathrm{III} = \frac{a^2}{2.2!} + \frac{a^6}{6.6!} + \frac{a^{10}}{10.10!} + \cdots$$
$$\mathrm{II} = \frac{a}{1.1!} + \frac{a^5}{5.5!} + \frac{a^9}{9.9!} + \cdots \qquad \mathrm{IV} = \frac{a^3}{3.3!} + \frac{a^7}{7.7!} + \frac{a^{11}}{11.11!} + \cdots$$

für die einzelnen Werthe von a und erhielt damit:

$$\mathfrak{Ci}\, a = \int \frac{e^a + e^{a-}}{2} \cdot \frac{da}{a} = \text{I} + \text{III}$$

$$ci\, a = \int \cos a \cdot \frac{da}{a} = \text{I} - \text{III}$$

$$li\, e^a = \text{I} + \text{III} + \text{II} + \text{IV},$$

$$\mathfrak{Si}\, a = \int \frac{e^a - e^{-a}}{2} \cdot \frac{du}{a} = \text{II} + \text{IV}$$

$$si\, a = \int \sin a \cdot \frac{da}{a} = \text{II} - \text{IV}$$

$$li\, e^{-a} = \text{I} + \text{III} - \text{II} - \text{IV}.$$

War die Rechnung nach 5) richtig, so musste der damit gefundene Werth von $li\, e^a$ mit dem aus der Formel 6) erhaltenen übereinstimmen. Da der Werth $a = 1$ gewissermassen als Fundament für die ganze Tafel anzusehen ist, so wurden die obigen vier Reihen für ihn auf 40 Decimalstellen entwickelt. Dies gab, wenn die Constante γ*) gleich

$$\gamma = 0{,}57721\ 56649\ 01532\ 86060\ 65120\ 90082\ 40243\ 10421$$

gesetzt wird, folgende Resultate:

$li\, e = +\ 1{,}89511\ 78163\ 55936\ 75546\ 65209\ 34331\ 63426\ 90$

$li\, e^{-1} = -\ 0{,}21938\ 39343\ 95520\ 27367\ 71637\ 75460\ 12164\ 90$

$\mathfrak{Ci}\, 1 = +\ 0{,}83786\ 69409\ 80208\ 24089\ 46785\ 79435\ 75630\ 99:$

$\mathfrak{Si}\, 1 = +\ 1{,}05725\ 08753\ 75728\ 51457\ 18423\ 54895\ 87795\ 90$

$ci\ 1 = +\ 0{,}33740\ 39229\ 00968\ 13466\ 26462\ 03889\ 15076\ 99:$

$si\ 1 = +\ 0{,}94608\ 30703\ 67183\ 01494\ 13533\ 13823\ 17965\ 78$

Hier wie im Folgenden ist die letzte Decimalziffer stets ungeändert gelassen; es ist ihr aber, wenn die nächst folgenden Ziffern zwischen 33 ... und 66 ... lagen, ein Punkt, und wenn sie zwischen 66 ... und 99 ... lagen, ein Colon beigefügt worden. In ähnlicher Weise habe ich die nachfolgenden Functionenwerthe für $a = 2$ u. s. w. bis $a = 10$ auf 23 Decimalstellen berechnet und das Resultat nach Gleichung 6) geprüft.

---

*) Der hier gebrauchte Werth von γ ist aus der Abhandlung von Gauss über die hypergeometrische Reihe $1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{\gamma \cdot 1} x +$ etc. entnommen; die Berechnung desselben ist von Nicolai und zwar auf doppelte Weise bewirkt worden, so dass die Uebereinstimmung der so erhaltenen Resultate die Richtigkeit der hier aufgenommenen 40 Decimalstellen verbürgt. Soldner hat γ auf 22 Decimalen berechnet, die vollständig mit Nicolai's Werth übereinstimmen; Mascheroni's Rechnung giebt 32 Stellen, von denen jedoch nur die ersten 19 richtig, die übrigen total falsch sind. — In neuerer Zeit hat Lindmann, der wahrscheinlich die Werthbestimmung Nicolai's nicht kannte, sich durch die eben besprochene Differenz zu einer Wiederholung der Rechnung veranlasst gefunden, und dabei gleichfalls Soldner's Rechnungsresultat bestätigt erhalten. Vergl. Grunert's Archiv, Bd. 29, S. 240.

a	$li\,.\,e^a$	$Ci\,.\,a$	$ci\,.\,a$
1	+ 1,89511 78163 55936 75546.	+ 0,83786 69409 80208 24089.	+ 0,33740 39229 00968 13466
2	4,95423 43560 01890 16337:	2,45266 69226 46914 52190.	0,42298 08287 74864 99569:
3	9,93383 25706 25416 55800:	4,96039 20047 65009 76029:	0,11962 07860 08000 32762.
4	19,63087 44700 56220 02264.	9,81354 75588 23185 55808.	− 0,14098 16978 86930 41163:
5	40,18527 53558 03177 45509	20,09206 35301 05951 06464:	0,19002 97496 56643 87861:
6	85,98976 21424 39204 80358.	42,99470 10299 93521 07246	0,06805 72438 93247 12620.
7	191,50474 33355 01395 95306	95,75231 39268 84802 80742.	+ 0,07669 52784 82184 51838
8	440,37989 95348 38268 99742.	220,18093 09346 07712 53626	0,12243 38825 32009 55729
9	1037,87820 07170 80587 65757	518,93913 91348 67704 82565	0,05534 75313 33133 60708.
10	2492,22897 62418 77759 13844	1246,11448 60424 54414 72655:	− 0,04545 64330 04455 37203.

a	$li\,.\,e^{-a}$	$Si\,.\,a$	$si\,.\,a$
1	− 0,21938 39343 95520 27367:	+ 1,05725 08753 75728 51457	+ 0,94608 30703 67183 01494
2	0,04890 05107 08061 11956:	2,50156 74333 54075 64147.	1,60541 29768 02694 84857:
3	0,01304 83810 94197 03741	4,97344 04758 59806 79771	1,84865 25279 99468 25639:
4	0,00377 93524 09848 90647:	9,81732 69112 33034 46456	1,75820 31389 49053 05810.
5	0,00114 82955 91275 32579:	20,09321 18256 97226 39044.	1,54993 12449 44674 13727.
6	0,00036 00824 52162 65865:	42,99506 11124 45683 73112	1,42468 75512 80506 53576:
7	0,00011 54817 31610 33821.	95,75242 94086 16503 14563:	1,45459 66142 48093 59061.
8	0,00003 76056 22843 92490	220,18996 86002 30556 46116	1,57418 68217 06942 05208
9	0,00001 24473 54178 00627	518,93915 15822 21882 83192	1,66504 00758 29002 49510.
10	0,00000 41569 68029 68532.	1246,11449 01994 23344 41188	1,65834 75942 18874 04933

Die vorstehenden Zahlwerthe sind von mir schon früher veröffentlicht worden (Grunert's Archiv, Bd. 3, S. 34), gleichwohl aber hier nochmals aufgeführt, um alles zusammenzustellen, was über numerische Werthe der fraglichen Transcendenten bis jetzt vorhanden ist. Mittelst dieser Hauptwerthe konnten nun die $li\,e^a$ für alle Argumente der nachfolgenden Tafel nach Gleichung 6) berechnet und dadurch für die zweite Rechnung nach Formel 5) die erforderliche Controle erhalten werden.

a	$li\,.\,e^{a}$	$li\,.\,e^{-a}$	$\mathfrak{Ci}\,.\,a$	$\mathfrak{Si}\,.\,a$	$ci\,.\,a$	$si\,.\,a$
0,00	— ∞	— ∞	— ∞	+ 0,00000 00000	— ∞	+ 0,00000 00000
0,01	— 4,01792 94654	— 4,03792 95765	— 4,02792 95209:	0,01000 00555.	— 4,02797 95209:	0,00999 99444.
0,02	3,31470 68944	3,35470 77833	3,33470 73388.	0,02000 04444.	3,33490 73388.	0,01999 95555.
0,03	2,89911 57239.	2,95911 87240	2,92911 72239:	0,03000 15000.	2,92956 72239:	0,02999 85000.
0,04	2,60125 65775:	2,68126 36890	2,64126 01333	0,04000 35557	2,64206 01333	0,03999 64446
0,05	— 2,36788 45985:	— 2,46789 84885	— 2,41789 15435.	+ 0,05000 69449.	— 2,41914 15435.	+ 0,04999 30560.
0,06	2,17528 29155.	2,29530 69181.	2,23529 49168.	0,06001 20012:	2,23709 49168:	0,05998 80012:
0,07	2,01080 00635.	2,15083 81802.	2,08081 91218:	0,07001 90583.	2,08326 91219.	0,06998 09472.
0,08	1,86688 41027:	2,02694 10025:	1,94691 25526:	0,08002 84499	1,95011 25528	0,07997 15610
0,09	1,73866 37503.	1,91874 47700	1,82870 42601:	0,09004 05098.	1,83275 42604.	0,08995 95098.
0,10	— 1,62281 28139:	— 1,82292 39584	— 1,72286 83861:	+ 0,10005 55722	— 1,72786 83866.	+ 0,09994 44611
0,11	1,51695 87514:	1,73710 66940.	1,62703 27227:	0,11007 39712:	1,63308 27235:	0,10992 60823:
0,12	1,41934 96691	1,65954 17520:	1,53944 57106	0,12009 60414:	1,54664 57119:	0,11990 40414.
0,13	1,32865 50699.	1,58889 93048.	1,45877 71874	0,13012 21174.	1,46722 71896.	0,12987 80063
0,14	1,24384 06539.	1,52414 57221:	1,38399 31880.	0,14015 25341	1,39379 31915.	0,13984 76451.
0,15	— 1,16408 64172:	— 1,46446 16705	— 1,31427 40439	+ 0,15018 76266	— 1 32552 40401:	+ 0,14981 26265
0,16	1,08873 12379	1,40918 66986:	1,24895 89682:	0,16022 77303:	1,26175 89760.	0,15977 26191
0,17	1,01723 42901.	1,35778 06525.	1,18750 74713.	0,17027 31812	1,20195 74825	0,16972 72920:
0,18	0,94914 75052	1,30979 61354	1.12947 18203	0,18032 43151	1.14567 18360.	0,17967 63147.
0,19	0,88409 54874	1,26485 84244	1,07447 69559	0,19038 14084:	1,09252 69777	0,18961 93568:
0,20	— 0,82176 05879	— 1,22265 05441:	— 1,02220 55660.	+ 0,20044·49781.	— 1,04220 55056:	+ 0,19955 60885
0,21	0,76187 16238:	1,18290 19862.	0,97238 68050.	0,21051 51811:	0,99443 68447:	0,20948 61801:
0,22	0,70419 52245:	1,14538 00550	0,92478 76308	0,22059 24152	0,94898 76922:	0,21940 93026:
0,23	0,64852 91026	1,10988 31388:	0,87920 61207.	0,23067 70181.	0,90565 61892:	0,22932 51273
0,24	0.59469 67580.	1.07623 54148:	0,83546 60864:	0,24076 93284	0,86426 61749.	0,23923 33258

a	$\mathfrak{Li} . e^{a}$	$li . e^{-a}$	$\mathfrak{Ci} . a$	$\mathfrak{Si} . a$	$ci . a$	$si . a$
0,25	— 0,54254 32646.	— 1,04428 26344.	— 0,79341 29495.	+ 0,25086 96848:	— 0,82406 30625:	+ 0,24013 35703
0,26	0,49193 18828:	1,01388 87367:	0,75291 03098	0,26097 84269.	0,78671 04528.	0,25002 55335
0,27	0,44274 13124	0,98493 31013	0,71383 72068:	0,27109 58944.	0,75028 73802.	0,26890 88885
0,28	0,39486 34448	0,95730 83003.	0,67608 58725:	0,28122 24277:	0,71528 60956:	0,27878 33090
0,29	0,34820 15102:	0,93091 82460	0,63955 98781.	0,29135 83678.	0,68161 01535	0,28864 84691:
0,30	— 0,30266 85392.	— 0,90567 66516:	— 0,60417 25954:	+ 0,30150 40562	— 0,64917 29329:	+ 0,29850 40438
0,31	0,25818 60759	0,88150 57456:	0,56984 59107:	0,31165 98348:	0,61789 63216:	0,30834 97081:
0,32	0,21468 30961	0,85833 51893	0,53650 91427	0,32182 60465:	0,58770 96398	0,31818 51382
0,33	0,17209 50921.	0,83610 11614.	0,50409 81267:	0,33200 30346.	0,55854 87246:	0,32801 00104:
0,34	0,13030 32936	0,81474 55796	0,47255 44366.	0,34219 11430	0,53035 51518.	0,33782 40021.
0,35	— 0,08943 40019	— 0,79421 54346	— 0,44182 47182:	+ 0,35239 07163.	— 0,50307 55693	+ 0,34762 67909:
0,36	0,04925 80179	0,77446 22178	0,41186 01178:	0,36260 20090.	0,47666 11256.	0,35741 80555
0,37	0,00979 01485	0,75544 14281.	0,38261 57883	0,37282 56398	0,45106 69761:	0,36719 74749
0,38	+ 0,02901 12214	0,73711 21441.	0,35405 04613:	0,38306 16827:	0,42625 18553	0,37696 47290.
0,39	0,06718 45009:	0,71043 66516:	0,32612 60753.	0,39331 05763	0,40217 77043:	0,38671 94985
0,40	+ 0,10476 52186	— 0,70238 01188.	— 0,29880 74501	+ 0,40357 26687.	— 0,37880 93464	+ 0,39646 14647.
0,41	0,14178 63068:	0,68501 03113.	0,27206 20022.	0,41384 83091	0,35611 42013:	0,40619 03098
0,42	0,17827 83531.	0,66909 73415	0,24585 94941:	0,42413 78473.	0,33406 20354	0,41590 57166.
0,43	0,21426 98207:	0,65461 34475.	0,22017 18138:	0,43444 16341.	0,31262 47390.	0,42560 73689.
0,44	0,24978 72447	0,63973 27976	0,19497 27764.	0,44476 00211:	0,29177 61358.	0,43529 49512:
0,45	+ 0,28485 54053.	— 0,62533 13163	— 0,17023 79554:	+ 0,45509 33608.	— 0,27140 17998.	+ 0,44496 81490
0,46	0,31949 74829.	0,61138 65301	0,14594 45235:	0,46544 20065	0,25174 89098.	0,45462 66483.
0,47	0,35373 51958:	0,59787 74292.	0,12207 11166:	0,47580 63125.	0,23252 61070:	0,46427 01364:
0,48	0,38758 89238:	0,58478 43444	0,09859 77102:	0,48618 66341.	0,21380 33726	0,47389 83013.
0,49	0,42107 78189.	0,57208 88360.	0,07550 55085.	0,49658 33275	0,19556 19165:	0,48351 08319

a	$li.e^a$	$li.e^{-a}$	$\mathfrak{Ci}.a$	$\mathfrak{Si}.a$	$ci.a$	$si.a$
0,50	+ 0,45421 99048.	— 0,55977 35947:	— 0,05277 68449.	+ 0,50699 67498	— 0,17778 40788	+ 0,49310 74180.
0,51	0,48703 21668	0,54782 23517:	0,03039 50924:	0,51742 72502:	0,16045 32389:	0,50208 77505.
0,52	0,51953 06324.	0,53621 97978.	0,00834 45826.	0,52787 52150.	0,14355 37358.	0,51225 15212
0 53	0,55173 04452	0,52495 15101	+ 0,01338 94675.	0,53834 09776:	0,12707 07938	0,52170 84228.
0,54	0,58364 59307	0,51400 38857	0,03482 10225	0,54882 49082	0,11009 04567	0,53132 81491:
0,55	+ 0,61529 06570.	— 0,50336 40813:	+ 0,05596 32878.	+ 0,55932 73692	— 0,09529 95274	+ 0,54084 03950.
0,56	0,64667 74897:	0,49301 90587:	0,07682 87054:	0,56984 87242:	0,07998 55128:	0,55033 48563
0,57	0,67781 86418:	0,48296 00342.	0,09742 93038	0,58038 93380:	0,06503 65743.	0,55981 12298.
0,58	0,70872 57196	0,47317 34333	0,11777 61431.	0,59094 95764:	0,05041 14814:	0,56926 92136.
0,59	0,73940 97641.	0,46364 98489.	0,13787 99575:	0,60152 98065.	0,03618 95707	0,57870 85068.
0,60	+ 0,76988 12899.	— 0,45437 95031:	+ 0,15775 08933:	+ 0,61213 03965.	— 0,02227 07069	+ 0,58812 88096
0,61	0,80015 03198	0,44535 31121.	0,17739 86038.	0,62275 17159:	0,00867 52485:	0,59752 98232.
0,62	0,83022 64173.	0,43656 18538.	0,19683 22817.	0,63339 41355:	+ 0,00460 59848:	0,60091 12503
0,63	0,86011 87163.	0,42799 73384	0,21606 06889:	0,64405 80273:	0,01758 17423:	0,61627 27943:
0,64	0,88983 59484:	0,41965 15808.	0,23509 21838	0,65474 37646:	0,03026 03685:	0,62561 41603
0,65	+ 0 91938 64682.	— 0,41151 69759.	+ 0,25393 47461.	+ 0,66545 17220:	+ 0,04264 98292.	+ 0,63493 50541.
0,66	0,94877 82764:	0,40358 62747:	0,27259 60008.	0,67618 22756.	0,05475 77342:	0,64423 51831
0,67	0,97801 90418:	0,39585 25634	0,29108 32392.	0,68693 58026.	0,06659 13593.	0,65351 42557
0,68	1,00711 61209	0,38830 92428	0,30940 34390.	0,69771 26818:	0,07815 76659	0,66277 19816:
0,69	1,03607 65763:	0,38095 00104.	0,32756 32829:	0,70851 32934	0,08946 33195	0,67200 80720.
0,70	+ 1,06490 71946	— 0,37376 88432.	+ 0,34556 91756:	+ 0 71933 80189	+ 0,10051 47070	+ 0,68122 22391
0,71	1,09361 45014	0,36675 99814	0,36342 72599:	0,73018 72414	0,11131 79525	0,69041 41964.
0,72	1,12220 47768:	0,35991 79139	0,38114 34314:	0,74106 13453:	0,12187 89321:	0,69958 36589:
0,73	1,15068 40693:	0,35323 73644:	0,39872 33524.	0,75196 07169.	0,13220 32879.	0,70873 03429:
0,74	1,17905 82082.	0,34671 32789	0,41617 24646:	0,76288 57435:	0,14229 64404.	0,71785 39660.

a	$li\,.\,e^a$	$li\,.\,e^{-a}$	$\mathfrak{Ci}\,.\,a$	$\mathfrak{Si}\,.\,a$	$ci\,.\,a$	$si\,.\,a$
0,75	+ 1,20733 28160	— 0,34034 08129	+ 0,43349 60015.	+ 0,77383 68144.	+ 0,15216 36009:	+ 0,72695 42471.
0,76	1,23551 33194.	0,33411 53210:	0,45069 89991:	0,78481 43202.	0,16180 97820:	0,73603 09066.
0,77	1,26360 49602	0,32803 23463:	0,46778 63069	0,79581 86533	0,17123 98110.	0,74508 36663.
0,78	1,29161 28047	0,32208 76102:	0,48476 25972	0,80685 02075	0,18045 83335.	0,75411 22494
0,79	1,31954 17531.	0,31627 70037.	0,50163 23746:	0,81790 93784.	0,18946 98289:	0,76311 63804
0,80	+ 1,34739 65482	— 0,31059 65785.	+ 0,51839 99848.	+ 0,82899 65633:	+ 0,19827 86159.	+ 0,77209 57854:
0,81	1,37518 17833.	0,30504 25392	0,53506 96220:	0,84011 21612:	0,20688 88609.	0,78105 01921
0,82	1,40290 19100:	0,29961 12355	0,55164 53372:	0,85125 65727:	0,21530 45858:	0,78997 93293.
0,83	1,43056 12453:	0,29429 91553:	0,56813 10450	0,86243 02003:	0,22352 96751:	0,79888 29276.
0,84	1,45816 39782:	0,28910 29181:	0,58453 05300.	0,87363 34482	0,23156 78824.	0,80776 07190:
0,85	+ 1,48571 41762	— 0,28401 92685	+ 0,60084 74538.	+ 0,88486 67223.	+ 0,23942 28367.	+ 0,81661 24371:
0,86	1,51321 57910	0,27904 50701:	0,61708 53604	0,89613 04306	0,24709 80485:	0,82543 78170.
0,87	1,54067 26644.	0,27417 73007:	0,63324 76818.	0,90742 49826	0,25459 69152:	0,83423 65953
0,88	1,56808 85336.	0,26941 30463.	0,64933 77436.	0,91875 07899:	0,26192 27264	0,84300 85102
0,89	1,59546 70359	0,26474 94963:	0,66535 87697:	0,93010 82661.	0,26907 86686.	0,85175 33015.
0,90	+ 1,62281 17136:	— 0,26018 39393	+ 0,68131 38871:	+ 0,94149 78265	+ 0,27606 78304.	+ 0,86047 07107.
0,91	1,65012 60188	0,25571 37579:	0,69720 61304	0,95291 98883:	0,28289 32065	0,86916 04808
0,92	1,67741 33168	0,25133 64254	0,71303 84456:	0,96437 48711	0,28955 77018.	0,87782 23564.
0,93	1,70467 68909:	0,24704 95010	0,72881 36949:	0,97586 31900	0,29606 41358	0,88645 60839
0,94	1,73191 99460.	0,24285 06267:	0,74453 46596.	0,98738 52864	0,30241 52457:	0,89506 14112
0,95	+ 1,75914 56118:	— 0,23873 75236.	+ 0,76020 40441	+ 0,99894 15677.	+ 0,30861 36907:	+ 0,90363 80879:
0,96	1,78635 69467	0,23470 79883.	0,77582 44791:	1,01053 24675.	0,31466 20546:	0,91218 58655.
0,97	1,81355 69406:	0,23075 98900.	0,79139 85253	1,02215 84153.	0,32056 28494:	0,92070 44969:
0,98	1,84074 85185	0,22689 11674	0,80692 86755.	1,03381 98429.	0,32631 85182:	0,92919 37369.
0,99	1,86793 45427.	0,22309 98257:	0,82241 73584:	1,04551 71842.	0,33193 14381:	0,93765 33420

a	$li.e^a$	$li.e^{-a}$	$\mathfrak{Ci}.a$	$\mathfrak{Si}.a$	$ci.a$	$si.a$
1,0	+ 1,89511 78163.	— 0,21938 39343:	+ 0,83786 69400:	+ 1,05725 08753:	+ 0,33740 39220	+ 0,94608 30703:
1,1	2,16737 82795.	0,18599 09045.	0,90069 36875	1,17068 45920.	0,38487 33774	1,02868 52186:
1,2	2,44209 22851:	0,15840 84368.	1,14184 19241:	1,30025 03610	0,42045 91828:	1,10804 71990
1,3	2,72139 88802	0,13545 09578.	1,29297 39611:	1,42842 49190.	0,44573 85675.	1,18305 80090:
1,4	3,00720 74641	0,11621 93125:	1,44549 40757:	1,50171 33883.	0,46200 65850:	1,25622 67327:
1,5	+ 3,30128 54491	— 0,10001 95824	+ 1,60063 29333.	+ 1,70065 25157:	+ 0,47035 63171:	+ 1,32468 35311:
1,6	3,60531 09490	0,08630 83336:	1,75950 58076.	1,84581 41413.	0,47173 25169	1,38918 04858:
1,7	3,92096 32013.	0,07465 46444	1,92315 42784.	1,99780 89228:	0,46096 83641:	1,44959 22896:
1,8	4,24986 75574:	0,06471 31293.	2,09257 72140.	2,15729 03434	0,45681 11294	1,50581 67802.
1,9	4,59371 36869.	0,05620 43780:	2,26875 46543:	2,32495 90325.	0,44194 03496:	1,55777 53137.
2,0	+ 4,95423 43560	— 0,04890 05107	+ 2,45266 69226.	+ 2,50156 74333.	+ 0,42298 08287:	+ 1,60541 29768
2,1	5,33323 53596.	0,04261 43415	2,64531 05090:	2,68792 48505:	0,40051 19878.	1,64869 86362.
2,2	5,73261 46998	0,03719 11370.	2,84771 17813:	2,88490 29184	0,37507 45990.	1,68762 48272.
2,3	6,15438 07913.	0,03250 22671:	3,06093 92620:	3,09344 15292.	0,34717 56175.	1,72220 74818
2,4	6,60067 02703.	0,02844 02609.	3,28611 50077	3,31455 52086.	0,31729 16174.	1,75248 55007.
2,5	+ 7,07376 58945:	— 0,02491 49178:	+ 3,52442 54883.	+ 3,54934 04062	+ 0,28587 11963:	+ 1,77852 01734.
2,6	7,57611 47697:	0,02185 02218	3,77713 22739:	3,70898 24957:	0,25333 06160.	1,80039 44505
2,7	8,11034 74152	0,01918 18718	4,04558 27716:	4,06476 46435	0,22008 48786.	1,81821 20764:
2,8	8,67929 77238	0,01685 52924.	4,33122 12156:	4,34807 65081	0,18648 83896.	1,83209 65890:
2,9	9,28602 41865:	0,01482 40192	4,63560 00836:	4,65042 41028:	0,15289 53241.	1,84219 01946.
3,0	+ 9,93383 25706	— 0,01304 83810:	+ 4,96039 20947.	+ 4,97344 04758.	+ 0,11962 07860	+ 1,84865 25279:
3,1	10,62630 02841	0,01149 44187.	5,30740 29326:	5,31889 73514.	0,08699 18311:	1,85165 93076:
3,2	11,36730 26569:	0,01013 29924:	5,67858 48322.	5,68871 78247.	0,05525 74117	1,85140 08970
3,3	12,16104 13736	0,00893 90425.	6,07605 11655.	6,08499 02080:	0,02467 82846	1,84808 07827:
3,4	13,01207 53041.	0,00789 09735	6,50209 21653	6,50998 31388	— 0,00451 80779	1,84191 39833

a	$li\,.\,e^{a}$	$li\,.\,e^{-a}$	$Ci\,.\,a$	$Si\,.\,a$	$ci\,.\,a$	$si\,.\,a$
3,5	+ 13,92535 39951:	— 0,00697 01398:	+ 6,95919 19276.	+ 6,96616 20675	— 0,03212 85485	+ 1,83312 53986:
3,6	14,90625 40995.	0,00616 04143	7,45004 68426	7,45620 72569.	0,05797 43518.	1,82194 81156.
3,7	15,96061 90419	0,00544 78246.	7,97758 56101	7,98303 34347:	0,08190 10012:	1,80862 16808:
3,8	17,09480 22651.	0,00482 02468	8,54490 10091:	8,54981 12550:	0,10377 81503.	1,79339 03548.
3,9	18,31571 43464.	0,00426 71452:	9,15572 36005:	9,15999 07458.	0,12340 93492	1,77650 13604.
4,0	+ 19,63087 44700.	— 0,00377 93524	+ 9,81354 75588	+ 9,81732 69112.	— 0,14098 16078:	+ 1,75820 31389.
4,1	21,04846 65683	0,00334 88806.	10,52255 88438.	10,52590 77244:	0,15616 53918	1,73874 36264:
4,2	22,57740 06477:	0,00296 87621:	11,28721 59427:	11,29018 47049:	0,16901 31567:	1,71836 85636:
4,3	24,22737 97756.	0,00263 29119.	12,11237 34318.	12,11500 63437:	0,17950 95725	1,69731 98506:
4,4	26,00897 32716	0,00233 60100	13,00331 86307:	13,00565 46408	0,18766 02867:	1,67583 39594
4,5	+ 27,93369 06979.	— 0,00207 34007.	+ 13,96581 16485:	+ 13,96788 50493.	— 0,19349 11221	+ 1,65414 04143:
4,6	30,01409 02964:	0,00184 10058	15,00612 91453	15,00797 01511.	0,19704 70797	1,63246 03525
4,7	32,26385 95826	0,00163 52494:	16,13111 21665.	16,13274 74160.	0,19839 12468.	1,61100 51718
4,8	34,69788 98737:	0,00145 29939.	17,34821 84399	17,34967 14338.	0,19760 36133	1,58997 52781:
4,9	37,33237 06037:	0,00121 14833.	18,66557 95602	18,66679 10435:	0,19477 98060	1,56963 89381
5,0	+ 40,18527 53558	— 0,00114 82955:	+ 20,09206 35301	+ 20,09321 18256:	— 0,19002 97496.	+ 1,54993 12449.
5,1	43,27570 76357.	0,00102 13001	21,63734 31678	21,63836 44679.	0,18347 62631.	1,53125 32047
5,2	46,62485 05057:	0,00090 86216	23,31197 00120:	23,31287 95637	0,17525 36022.	1,51367 09467.
5,3	50,25573 03048	0,00080 86083.	25,12746 08482.	25,12826 94565:	0,16550 50585.	1,49731 50635:
5,4	54,19347 58009:	0,00071 98044.	27,09647 79982.	27,09709 78027	0,15438 59261:	1,48230 00826.
5,5	+ 58,46551 42498	— 0,00064 00260.	+ 29,23243 06618:	+ 29,23307 75879.	— 0,14205 29475.	+ 1,46872 40726.
5,6	63,10178 59742:	0,00057 08401.	31,55060 75670.	31,55117 84072.	0,12867 17493.	1,45666 83847
5,7	68,13497 92375.	0,00050 85404:	34,06723 53455	34,06774 38920	0,11441 07807.	1,44619 75285
5,8	73,60078 73506:	0,00045 31612:	36,80016 70946:	36,80062 02559:	0,09944 06646:	1,43735 91822:
5,9	79,53819 01448:	0,00040 39035	39,76889 31206:	39,76929 70241:	0,08390 26741	1,43018 43341

a	$li \, . \, e^a$	$li \, . \, e^{-a}$	$\mathfrak{Ci} \, . \, a$	$\mathfrak{Si} \, . \, a$	$ci \, . \, a$	$si \, . \, a$
6,0	+ 85,98976 21424.	— 0,00036 00824.	+ 42,90470 10209:	+ 42,90506 11124.	— 0,06805 72438:	+ 1,42408 75512:
6,1	93,00200 99869:	0,00032 10870	46,50084 44499:	46,50116 55369:	0,05198 25289:	1,42086 73734
6,2	100,62574 19406.	0,00028 63763.	50,31272 77821.	50,31301 41585	0,03587 30102.	1,41870 68241
6,3	108,91647 25275:	0,00025 54914	54,45810 85180:	54,45836 40095	0,01988 82106	1,41817 40447:
6,4	117,93486 57001:	0,00022 70479.	58,96731 88761	58,96754 68240:	0,00418 14110	1,41922 20740.
6,5	+ 127,74722 02332	— 0,00020 34298.	+ 63,87350 84016:	+ 63,87371 18315.	+ 0,01110 15195	+ 1,42170 42744.
6,6	138,42600 14082	0,00018 15837.	69,21290 99122.	69,21309 14959:	0,02582 31380.	1,42581 61485:
6,7	150,05042 34452.	0,00016 21138.	75,02513 06656:	75,02529 27795.	0,03985 54400.	1,43120 53852:
6,8	162,70708 75714	0,00014 47577:	81,35347 14068	81,35361 61646	0,05308 07167	1,43786 84160:
6,9	176,49068 10901.	0,00012 92826:	88,24527 59037.	88,24540 51864	0,06539 23139:	1,44570 24427
7,0	+ 191,50474 33355	— 0,00011 54817	+ 95,75231 39268:	+ 95,75242 94086	+ 0,07669 52784:	+ 1,45459 66142.
7,1	207,86250 49687	0,00010 31713.	103,93120 08987.	103,93130 40700	0,08690 68880.	1,46443 32441
7,2	225,68780 77010.	0,00009 21881	112,84385 77564:	112,84394 99445:	0,09595 70643.	1,47508 90554.
7,3	245,11611 22163:	0,00008 23872.	122,55801 49145.	122,55809 73018	0,10378 86664	1,48643 64450.
7,4	266,29560 28236.	0,00007 36397	133,14776 45919.	133,14783 82316:	0,11035 76658	1,49834 47533
7,5	+ 289,38839 82001.	— 0,00006 58308:	+ 144,69410 61846	+ 144,69423 20155	+ 0,11563 32032.	+ 1,51068 15309.

X. Ueber Dreiecke und Tetraeder, welche in Bezug auf Curven und Oberflächen zweiter Ordnung sich selbst conjugirt sind. Von Dr. WILH. FIEDLER.

Im letzten Juni-Heft der „*Nouvelles Annales de Mathématiques*" von Terquem und Gerono wurde folgender Satz von M. Faure zum Beweise vorgelegt: „Die Tangente, welche man vom Centrum einer Ellipse an den Kreis ziehen kann, welcher einem in Bezug auf sie sich selbst conjugirten Dreieck umschrieben ist, ist der Sehne des elliptischen Quadranten gleich." Der Versuch, ihn auf Oberflächen zweiter Ordnung auszudehnen und analoge Sätze für andere Curven zweiter Ordnung zu suchen, lag nahe. Eine briefliche Bemerkung des Rev. George Salmon bezeichnete mir eine ebenso einfache als allgemeine Beweismethode für die angedeutete Gruppe von Sätzen. Indem ich sie verfolgte, bin ich zu den nachstehenden Resultaten gelangt, welche man vielleicht der Mittheilung nicht unwerth findet. Wenige Bemerkungen werden genügen, in den Mittelpunkt der Sache zu führen.

Wenn die allgemeine Gleichung zweiten Grades in der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0$$

geschrieben und durch

$$S = 0$$

symbolisch bezeichnet wird, so repräsentiren bekanntlich die Gleichungen

$$\frac{dS}{dx_1} = 0,\ \frac{dS}{dx_2} = 0,\ \frac{dS}{dx_3} = 0,$$

oder

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0, \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= 0 \end{aligned}$$

die in Bezug auf den durch sie ausgedrückten Kegelschnitt genommenen Polaren der Eckpunkte des Fundamental-Dreiecks

$$x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0;$$

und diese drei Polaren gehen durch einen Punkt, d. i. der durch die allgemeine Gleichung dargestellte Kegelschnitt degenerirt in ein Paar von geraden Linien, wenn

$$\begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13} \\ a_{21}, a_{22}, a_{23} \\ a_{31}, a_{32}, a_{33} \end{vmatrix} = 0 \text{ ist.}$$

Wenn sodann durch $S_1 = 0$ die allgemeine Gleichung eines zweiten Kegelschnitts

$$A_{11}x_1^2 + A_{22}x_2^2 + A_{33}x_3^2 + 2A_{12}x_1x_2 + 2A_{13}x_1x_3 + 2A_{23}x_2x_3 = 0$$

bezeichnet wird, so dass

$$kS + S_1 = 0 \text{ oder}$$

$$(ka_{11} + A_{11})x_1^2 + (ka_{22} + A_{22})x_2^2 + (ka_{33} + A_{33})x_3^2 + 2(ka_{12} + A_{12})x_1x_2 + 2(ka_{13} + A_{13})x_1x_3 + 2(ka_{23} + A_{23})x_2x_3 = 0$$

alle die Kegelschnitte bezeichnet, welche mit den beiden ersten durch die nämlichen vier Punkte gehen, so dient die Vergleichung der entsprechend gebildeten Determinante mit Null zur Bestimmung der drei Paare gerader Linien, welche jene vier gemeinsamen Punkte verbinden, oder der Durchschnittssehnen der Kegelschnitte aus der allgemeinen Gleichung. Die Bedingung

$$\begin{vmatrix} ka_{11}+A_{11}, & ka_{12}+A_{12}, & ka_{13}+A_{13} \\ ka_{12}+A_{12}, & ka_{22}+A_{22}, & ka_{23}+A_{23} \\ ka_{13}+A_{13}, & ka_{23}+A_{23}, & ka_{33}+A_{33} \end{vmatrix} = 0$$

liefert eine Gleichung, welche in Bezug auf die zu bestimmende Constante k vom dritten Grade ist; ihre drei Wurzeln k_1, k_2, k_3 sind die Coefficienten, durch deren Einführung in die allgemeine Gleichung dieselbe die drei Systeme der Durchschnittssehnen respective darstellt. Die Gleichung ist in vollständiger Entwickelung die folgende:

$$k^3(a_{11}a_{23}^2+a_{22}a_{13}^2+a_{33}a_{12}^2-a_{11}a_{22}a_{33}-2a_{12}a_{13}a_{23})+k^2[A_{11}(a_{23}^2-a_{22}a_{33})+A_{22}(a_{13}^2-a_{33}a_{11})+A_{33}(a_{12}^2-a_{11}a_{22})+2A_{23}(a_{11}a_{23}-a_{12}a_{13})+2A_{13}(a_{22}a_{13}-a_{23}a_{12})+2A_{12}(a_{33}a_{12}-a_{13}a_{23})]+k[a_{11}.(A_{23}^2-A_{22}A_{23})+a_{22}(A_{13}^2-A_{33}A_{11})+a_{33}(A_{12}^2-A_{11}A_{22})+2a_{23}(A_{11}A_{23}-A_{12}A_{13})+2a_{13}(A_{22}A_{13}-A_{12}A_{23})+2a_{12}(A_{33}A_{12}-A_{13}A_{23})]+A_{11}A_{23}^2+A_{22}A_{13}^2+A_{33}A_{12}^2-A_{11}A_{22}A_{33}-2A_{12}A_{13}A_{23}=0,$$

und sie soll zur Abkürzung durch

$$k^3.\Delta+k^2.\Theta+k.\Theta_1+\Delta_1=0$$

bezeichnet werden. Darin sind nach einer bekannten Bezeichnung Δ und Δ_1 die Discriminanten der beiden Kegelschnittsgleichungen, und es ist nicht schwer, die geometrische Bedeutung der Coefficienten-Verbindungen Θ und Θ_1 zu erkennen. Man findet,*) dass

$$\Theta_1=0$$

die Bedingung ausdrückt, unter welcher der zweite Kegelschnitt die Ecken eines in Bezug auf den ersten sich selbst conjugirten Dreiecks enthält; und dass ebenso $$\Theta=0$$ die Bedingung ist, unter welcher der zweite Kegelschnitt die Seiten eines in Bezug auf den ersten sich selbst conjugirten Dreiecks berührt.

Die Functionen Θ, Θ_1, ebenso wie Δ, Δ_1 sind Invarianten und alle unveränderlichen Beziehungen beider Kegelschnitte auf einander können durch dieselben ausgedrückt werden.

Wenn der eine Kegelschnitt ein Kreis ist, so findet man leicht den Satz von M. Faure und eine Reihe von analogen Sätzen. Zum Beweise des ersteren bildet man die Discriminante von

$$k\left\{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-r^2\right\}+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$$

---

*) Man vergleiche hierzu meine deutsche Bearbeitung von Rev. Salmon's „*Treatise on Conic Sections*", welche soeben erschienen ist. Leipzig, B. G. Teubner. (Siehe Art. *360, 362, Zusatz VI, p. 602.*)

und findet

$$k^3 . r^2 + k^2 \frac{a^2 b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) - b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2}$$
$$+ k . \frac{a^2 + b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2} + \frac{1}{a^2 b^2}.$$

Man sieht, sobald der als zweiter Kegelschnitt gedachte Kreis einem in Bezug auf die Ellipse sich selbst conjugirten Dreieck umschrieben ist, wird

$$a^2 + b^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2,$$

d. i. es gilt der Satz von M. Faure.

Setzt man an Stelle der Ellipse auch einen Kreis vom Halbmesser R, so wird

$$\Theta_1 = \frac{2R^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2},$$

also für den umschriebenen Kreis (r) des sich selbst conjugirten Dreiecks in Bezug auf einen Kreis (R)

$$2R^2 = \alpha^2 + \beta^2 - r^2;$$

und ebenso

$$\Theta = \frac{R^4 - R^2(\beta^2 + \alpha^2 - 2r^2)}{R^4},$$

also für den eingeschriebenen Kreis (r) des sich selbst conjugirten Dreiecks in Bezug auf einen Kreis (R)

$$R^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2) - r^2.$$

Beides sind Relationen, welche sich auch leicht in Sätzen aussprechen lassen.

Man überträgt ferner die vorigen Relationen auf die Hyperbel, indem man das Vorzeichen von b^2 verwechselt, so dass

$$\Theta_1 = -\frac{a^2 - b^2 - (\alpha^2 + \beta^2 - r^2)}{a^2 b^2}$$

und für den umschriebenen Kreis

$$a^2 - b^2 = (\alpha^2 + \beta^2 - r^2),$$
$$\Theta = \frac{-a^2 b^2 - a^2(\beta^2 - r^2) + b^2(\alpha^2 - r^2)}{a^2 b^2},$$

sowie für den eingeschriebenen Kreis

$$a^2 b^2 = a^2(r^2 - \beta^2) + b^2(\alpha^2 - r^2)$$

wird.

Für $a = b$ erhält man die auf die gleichseitige Hyperbel bezüglichen Relationen

$$\alpha^2 + \beta^2 - r^2 = 0$$

in Bezug auf den umschriebenen Kreis, und

$$\alpha^2 - \beta^2 = a^2$$

in Bezug auf den eingeschriebenen Kreis, d. i. für jedes Dreieck, welches in Bezug auf eine gleichseitige Hyperbel sich selbst conjugirt ist, geht der umschriebene Kreis durch den Mittelpunkt der Curve und der Mittelpunkt des eingeschriebenen Kreises liegt in der Curve.

Machen wir endlich dieselbe Entwickelung in Bezug auf die Parabel

$$y^2 = px,$$

so wird

$$\Theta_1 = p\left(\alpha + \frac{p}{4}\right), \ \Theta = p\alpha + r^2 - \beta^2;$$

somit für den umschriebenen Kreis

$$\alpha = -\frac{p}{4},$$

und für den eingeschriebenen

$$\beta^2 - r^2 = p\alpha,$$

d. i.: der Mittelpunkt des Kreises, welcher einem in Bezug auf eine Parabel sich selbst conjugirten Dreieck umschrieben ist, liegt in der Directrix — und für den einem in Bezug auf eine Parabel sich selbst conjugirten Dreieck eingeschriebenen Kreis ist die vom Fusspunkt seiner Mittelpunkts-Ordinate an ihn zu legende Tangente der entsprechenden Parabel-Ordinate gleich.

Offenbar sind diese Entwickelungen noch bedeutend zu vermehren; es ist aber nicht nöthig, dabei zu verweilen.

Aber wir bemerken, dass sie sich sofort auf Oberflächen zweiter Ordnung übertragen und dann analoge Ergebnisse für sich selbst conjugirte Tetraeder liefern.

Wenn wir die allgemeine Gleichung zweiten Grades in der Form

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44}x_4^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{14}x_1x_4$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{24}x_2x_4 + 2a_{34}x_3x_4 = 0$$

schreiben, so ist ihre Discriminante das Resultat der Elimination der Veränderlichen zwischen den Gleichungen

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 = 0,$$
$$a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 = 0,$$
$$a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 = 0,$$
$$a_{14}x_1 + a_{24}x_2 + a_{34}x_3 + a_{44}x_4 = 0,$$

oder

$$\varDelta = \begin{vmatrix} a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14} \\ a_{12}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \\ a_{13}, a_{23}, a_{33}, a_{34} \\ a_{14}, a_{24}, a_{34}, a_{44} \end{vmatrix},$$

und die Bedingung

$$\varDelta = 0$$

drückt aus, dass die durch die allgemeine Gleichung repräsentirte Oberfläche zweiten Grades eine abwickelbare Regelfläche sei.

Die Verbindung zweier Oberflächen zweiter Ordnung

$$S = 0, \ S_1 = 0$$

(wobei wir in der Gleichung der zweiten die Coefficienten a durch A ersetzt denken) liefert in

$$kS + S_1 = 0$$

die Gleichung aller der Oberflächen zweiter Ordnung, welche mit den beiden ersten die nämliche Durchschnittscurve gemein haben, und die Vergleichung der Discriminante von

$$kS + S_1 = 0$$

mit Null, oder die Gleichung

$$\begin{vmatrix} ka_{11} + A_{11}, & ka_{12} + A_{12}, & ka_{13} + A_{13}, & ka_{14} + A_{14} \\ ka_{12} + A_{12}, & ka_{22} + A_{22}, & ka_{23} + A_{23}, & ka_{24} + A_{24} \\ ka_{13} + A_{13}, & ka_{23} + A_{23}, & ka_{33} + A_{33}, & ka_{34} + A_{34} \\ ka_{14} + A_{14}, & ka_{24} + A_{24}, & ka_{34} + A_{34}, & ka_{44} + A_{44} \end{vmatrix} = 0$$

liefert, als Bestimmungsgleichung für k betrachtet, diejenigen Werthe von k, für welche diese Oberfläche zweiter Ordnung eine abwickelbare Regelfläche wird. Da sie vom vierten Grade ist, so können durch die Durchdringungscurve zweier Oberflächen zweiter Ordnung vier Kegelflächen zweiter Ordnung gelegt werden.

Wenn wir die obige Gleichung nach den Potenzen von k geordnet in der Form

$$k^4 . \Delta + k^3 . \Theta + k^2 . \Omega + k . \Theta_1 + \Delta_1 = 0$$

schreiben, so drückt

$$\Theta = 0$$

die Bedingung aus, unter welcher die zweite Oberfläche die Flächen eines in Bezug auf die erste sich selbst conjugirten Tetraeders berührt, und

$$\Theta_1 = 0$$

die Bedingung, unter welcher die zweite Oberfläche die Ecken eines in Bezug auf die erste sich selbst conjugirten Tetraeders enthält. Lässt man die dem Tetraeder eingeschriebene oder umschriebene Oberfläche eine Kugel sein, oder

$$S = 0$$

die Form

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 = r^2$$

haben, so ergeben sich aus der näheren Betrachtung der Formen, welche die Grössen Θ, Θ_1 nun annehmen, die dem Satz von M. Faure analogen Sätze für Oberflächen zweiter Ordnung.

Unter jener Voraussetzung hat man folgende Werthe der Coefficienten:

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1, \quad a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0, \quad a_{44} = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 - r^2, \quad a_{14} = -\alpha,$$
$$a_{24} = -\beta, \quad a_{34} = -\gamma.$$

Wenn man nun die gegebene Oberfläche zweiter Ordnung zugleich als ein auf seine Hauptachsen bezogenes Ellipsoid voraussetzt, so dass die Gleichung

$$S_1 = 0$$

die Form

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$$

annimmt, so hat man ferner:

$$A_{11}=\frac{1}{a^2},\ A_{22}=\frac{1}{b^2},\ A_{33}=\frac{1}{c^2},\ A_{44}=-1,\ A_{12}=A_{13}=A_{14}=A_{23}=A_{24}$$
$$=A_{34}=0,$$

und die allgemeine Discriminante wird:

$$\begin{vmatrix} k+\frac{1}{a^2}, & 0, & 0, & -k\alpha \\ 0, & k+\frac{1}{b^2}, & 0, & -k\beta \\ 0, & 0, & k+\frac{1}{c^2}, & -k\gamma \\ -k\alpha, & -k\beta, & -k\gamma, & k(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)-1 \end{vmatrix},$$

und somit durch Entwickelung:

$$-k^4 r^2 + k^3 \cdot \left\{ \frac{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)-(a^2+b^2)c^2\gamma^2}{a^2b^2c^2} \frac{-(b^2+c^2)a^2\alpha^2-(c^2+a^2)b^2\beta^2-a^2b^2c^2}{a^2b^2c^2} \right\}$$

$$+k^2 \cdot \left\{ \frac{(a^2+b^2+c^2)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2)-(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)}{a^2b^2c^2} \frac{-(a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2)}{a^2b^2c^2} \right\}$$

$$+k \cdot \frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2-(a^2+b^2+c^2)}{a^2b^2c^2} - \frac{1}{a^2b^2c^2},$$

also für die umschriebene Kugel

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=a^2+b^2+c^2,$$

das Analogon des Satzes von M. Faure.

Für $$a=b=c=R,$$

d. i. wenn das dreiachsige Ellipsoid in eine Kugel übergeht, wird

$$\Theta=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-3r^2-R^2}{R^2},$$

somit für die eingeschriebene Kugel

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2=R^2+2r^2.$$

Wenn man in den allgemeinen Ausdrücken das Vorzeichen von c^2 in das entgegengesetzte verwandelt, so überträgt man die erhaltenen Resultate auf das einfache und durch die Vertauschung der Vorzeichen von a^2 und b^2 auf das zweifache Hyperboloid.

Für $$a^2+b^2=c^2$$

wird

$$\Theta_1=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-r^2}{a^2b^2c^2},$$

d. i. die umschriebene Kugel geht durch den Mittelpunkt; etc.

Für die beiden Paraboloide, oder die Gleichung

$$\frac{x^2}{a}\pm\frac{y^2}{b}-2z=0$$

hat man

$$-k^4 . r^2 \pm k^3 . \frac{(a \pm b)(\alpha^2+\beta^2-r^2) \mp 2\gamma ab - (a\alpha^2 \pm b\beta^2)}{ab}$$
$$\pm k^2 . \frac{\alpha^2+\beta^2-r^2-2\gamma(a\pm b) \mp ab}{ab} \mp k . \frac{2\gamma + a \pm b}{ab} \mp \frac{1}{ab}$$

und damit hat man für die umschriebene Kugel

$$2\gamma = -(a \pm b), \text{ oder } \gamma = -\frac{a \pm b}{2},$$

d. i. der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel eines in Bezug auf ein Paraboloid sich selbst conjugirten Tetraeders liegt in einer festen Ebene.

Für das hyperbolische Paraboloid und $a = b$ hat man

$$\gamma = 0,$$

d. i. der Mittelpunkt der umschriebenen Kugel liegt in der durch den Mittelpunkt der Oberfläche senkrecht zu ihrer Hauptachse gelegenen Ebene.

Ferner ist für denselben Fall und in Bezug auf die eingeschriebene Kugel

$$\frac{\alpha^2}{a} - \frac{\beta^2}{a} - 2\gamma = 0,$$

d. i. der Mittelpunkt der eingeschriebenen Kugel gehört der Oberfläche an.

Man sieht, wie die Sätze über die Oberflächen zweiter Ordnung denen über die Curve zweiter Ordnung völlig analog sind. Das Mitgetheilte mag genügen, um die Reihe derselben zu vergegenwärtigen.

XI. Elegante Ableitung der Formeln für den sphärischen Excess. Von Dr. Oscar Werner.

Die Seiten eines ebenen Dreiecks seien p, q, r und die diesen Seiten gegenüberstehenden Winkel P, Q, R, die 180° nicht übersteigenden Seiten eines sphärischen Dreiecks dagegen a, b, c und deren Gegenwinkel A, B, C. Diese beiden Dreiecke mögen in einem solchen Zusammenhange zu einander stehen, dass

$$p = \cos\tfrac{1}{2}a . \cos\tfrac{1}{2}b,\ q = \sin\tfrac{1}{2}a . \sin\tfrac{1}{2}b \text{ und } r = \cos\tfrac{1}{2}c.$$

Unter diesen Umständen ist

$$r^2 = p^2 + q^2 - 2pq . \cos R,$$

oder

$$\cos^2\tfrac{1}{2}c = \cos^2\tfrac{1}{2}a . \cos^2\tfrac{1}{2}b + \sin^2\tfrac{1}{2}a . \sin^2\tfrac{1}{2}b$$
$$- 2\cos\tfrac{1}{2}a . \cos\tfrac{1}{2}b . \sin\tfrac{1}{2}a . \sin\tfrac{1}{2}b . \cos R,$$

folglich, wenn wir die goniometrischen Formeln

$$\sin^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1-\cos x}{2},\ \cos^2\tfrac{1}{2}x = \frac{1+\cos x}{2}$$

und

$$\sin x = 2\sin\tfrac{1}{2}x . \cos\tfrac{1}{2}x$$

benutzen,

$$\tfrac{1}{2}(1+\cos c) = \tfrac{1}{4}(1+\cos a)(1+\cos b) + \tfrac{1}{4}(1-\cos a)(1-\cos b)$$
$$-\tfrac{1}{2}\sin a \sin b \cos R,$$

oder

$$2+2\cos c = 1+\cos a+\cos b+\cos a\cos b+1-\cos a-\cos b$$
$$+\cos a\cos b-2\sin a\sin b\cos R;$$

d. i.

$$\cos c = \cos a\cos b-\sin a\sin b\cos R.$$

Nach einer bekannten Grundformel der sphärischen Trigonometrie ist aber

$$\cos c = \cos a\cos b+\sin a\sin b\cos C,$$

folglich

$$\cos R = -\cos C;\text{ d. i. } R = 180-C.$$

Ferner ist nach Principien der ebenen Trigonometrie

$$\tang\tfrac{1}{2}(P-Q) = \frac{p-q}{p+q}\cot\tfrac{1}{2}R = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\tang\tfrac{1}{2}C$$

und nach einer der Neper'schen Analogien

$$\cot\tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}\cdot\tang\tfrac{1}{2}C;$$

daher erhalten wir durch Vergleichung

$$\tang\tfrac{1}{2}(P-Q) = \cot\tfrac{1}{2}(A+B);\text{ d. i. }\tfrac{1}{2}(P-Q) = 90^\circ-\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Nehmen wir hierzu noch

$$P+Q = 180-R = C\text{ oder }\tfrac{1}{2}(P+Q) = \tfrac{1}{2}C,$$

so folgt

$$P = 90-\frac{A+B-C}{2}\text{ und }Q = \frac{A+B+C}{2}-90^\circ$$

oder, wenn wir den sphärischen Excess, d. i. den Ueberschuss der Summe der drei Winkel des sphärischen Dreiecks über 180° durch E bezeichnen,

$$P = C-\tfrac{1}{2}E\text{ und }Q = \tfrac{1}{2}E.$$

Führen wir jetzt die Werthe für die Bestandtheile des ebenen Dreiecks in die bekannten Formeln der ebenen Trigonometrie

$$\sin P = \frac{1}{2qr}\sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\sin Q = \frac{1}{2pr}\sqrt{(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)},$$

$$\cos P = \frac{q^2+r^2-p^2}{2qr},$$

$$\cos Q = \frac{p^2+r^2-q^2}{2pr},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{(p+r-q)(p+q-r)}{4qr}},$$

$$\sin\tfrac{1}{2}Q = \sqrt{\frac{(q+r-p)(p+q-r)}{4pr}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}P = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+q-r)}{4qr}}$$

und

$$\cos\tfrac{1}{2}Q = \sqrt{\frac{(p+q+r)(p+r-q)}{4pr}}$$

ein, und berücksichtigen dabei, dass

$$\begin{aligned}
p+q+r &= \cos\tfrac{1}{2}(a-b) + \cos\tfrac{1}{2}c = 2\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a),\\
q+r-p &= \cos\tfrac{1}{2}c - \cos\tfrac{1}{2}(a+b) = 2\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c),\\
p+r-q &= \cos\tfrac{1}{2}c + \cos\tfrac{1}{2}(a+b) = 2\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c),\\
p+q-r &= \cos\tfrac{1}{2}(a-b) - \cos\tfrac{1}{2}c = 2\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a),
\end{aligned}$$

daher

$$(p+q+r)(q+r-p)(p+r-q)(p+q-r)$$
$$\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)$$

und

$$\begin{aligned}
q^2+r^2-p^2 &= \cos^2\tfrac{1}{2}c - (\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b - \sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b)\\
&= \cos^2\tfrac{1}{2}c - \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\\
&= \cos^2\tfrac{1}{2}c - \cos^2\tfrac{1}{2}a + \sin^2\tfrac{1}{2}b = \frac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{2},\\
p^2+r^2-q^2 &= \cos^2\tfrac{1}{2}c + (\cos^2\tfrac{1}{2}a\cos^2\tfrac{1}{2}b - \sin^2\tfrac{1}{2}a\sin^2\tfrac{1}{2}b)\\
&= \cos^2\tfrac{1}{2}c + \cos\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}(a-b)\\
&= \cos^2\tfrac{1}{2}c + \cos^2\tfrac{1}{2}a - \sin^2\tfrac{1}{2}b = \frac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{2},
\end{aligned}$$

so erhalten wir

1)

$$\begin{cases}
\sin(C-\tfrac{1}{2}E) = \dfrac{\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}{2\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},\\
\sin\tfrac{1}{2}E = \dfrac{\sqrt{\sin\tfrac{1}{2}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{2}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{2}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{2}(a+b-c)}}{2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},
\end{cases}$$

2)

$$\begin{cases}
\cos(C-\tfrac{1}{2}E) = \dfrac{1+\cos c-\cos a-\cos b}{4\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},\\
\cos\tfrac{1}{2}E = \dfrac{1+\cos a+\cos b+\cos c}{4\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c},
\end{cases}$$

3)

$$\begin{cases}
\sin(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E) = \sqrt{\dfrac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}},\\
\sin\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\dfrac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\sin\tfrac{1}{4}(b+c-a)\sin\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}},
\end{cases}$$

4)

$$\begin{cases}
\cos(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{4}E) = \sqrt{\dfrac{\sin\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\sin\tfrac{1}{4}(a+b-c)}{\sin\tfrac{1}{2}a\sin\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}},\\
\cos\tfrac{1}{4}E = \sqrt{\dfrac{\cos\tfrac{1}{4}(a+b+c)\cos\tfrac{1}{4}(b+c-a)\cos\tfrac{1}{4}(a+c-b)\cos\tfrac{1}{4}(a+b-)}{\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c}}.
\end{cases}$$

Aus den letzten beiden Formelsystemen erhalten wir endlich durch Division die eleganten Ausdrücke:

5)

$$\left\{\begin{array}{l} tg(\frac{1}{2}C-\frac{1}{2}E)=\sqrt{\dfrac{tg\frac{1}{2}(b+c-a)\,tg\frac{1}{2}(a+c-b)}{tg\frac{1}{2}(a+b+c)\,tg\frac{1}{2}(a+b-c)}}, \\ tg\frac{1}{2}E=\sqrt{tg\frac{1}{2}(a+b+c)tg\frac{1}{2}(b+c-a)\,tg\frac{1}{2}(a+c-b)\,tg\frac{1}{2}(a+b-c)}. \end{array}\right.$$

Anmerkung. Aus den Formeln 5) ergiebt sich

$$tang\,(\tfrac{1}{2}C-\tfrac{1}{2}E)=\frac{tang\frac{1}{2}(b+c-a)\,tang\frac{1}{2}(a+c-b)}{tang\frac{1}{2}E}$$

und durch Vertauschung der Buchstaben

$$tang\,(\tfrac{1}{2}B-\tfrac{1}{2}E)=\frac{tang\frac{1}{2}(b+c-a)\,tang\frac{1}{2}(a+b-c)}{tang\frac{1}{2}E},$$

sowie

$$tang\,(\tfrac{1}{2}A-\tfrac{1}{2}E)=\frac{tang\frac{1}{2}(a+c-b)\,tang\frac{1}{2}(a+b-c)}{tang\frac{1}{2}E}.$$

Hieraus leitet man folgendes Verfahren ab, um aus den drei Seiten eines sphärischen Dreiecks die Winkel zu berechnen:

Man bestimmt zunächst vermittelst der zweiten Formel unter 5) die Grösse $\frac{1}{2}E$ und vermittelst der darauf folgenden Formeln die Winkel A, B und C.

Als Controle für die Richtigkeit der Rechnung hat man alsdann

$$A+B+C-180^{\circ}=E.$$

(Aus den *Mélanges mathématiques et astronomiques* T. II.)

XII. In den Monatsberichten der königl. preussischen Akademie der Wissenschaften 1859, S. 783 ist nachgewiesen, dass das bereits bekannte Verhalten der Gase im glühenden Zustand in inniger Beziehung mit der Eigenschaft von Flammen steht, die an und für sich ein discontinuirliches Spectrum geben, dunkte Streifen an der Stelle der hellen Linien erscheinen zu lassen, sobald man durch die Flammen Licht hindurchgehen lässt, welches an sich ein Spectrum ohne Streifen liefert. Um diesen Satz auch theoretisch abzuleiten, wird erstens gezeigt, dass für dieselbe Wellenlänge des Lichtes oder der Wärme und für eine bestimmte Temperatur alle Körper ein gleiches Verhältniss ihres Ausstrahlungsvermögens zum Absorptionsvermögen besitzen; zweitens wird angedeutet, dass das Absorptionsvermögen der Flammen für gewisse Strahlen sehr gross sein müsse.

Um den unter 1. angegebenen Satz zu beweisen, nimmt Kirchhoff an, dass ein Körper C in Gestalt einer unbegrenzten Platte einem andern ebenso gestalteten Körper c gegenüber gestellt sei. Die einander gegenüber liegenden Oberflächen beider Platten mögen sich gegen gewisse Strahlen wie vollkommene ebene Spiegel verhalten. Der Körper C möge nur Strahlen von der Wellenlänge Λ aussenden und absorbiren, so dass Strahlen anderer Wellenlänge von seiner Oberfläche vollkommen gespiegelt werden. Der

Körper c soll von allen auf ihn fallenden Strahlen einen Theil absorbiren, einen Theil wieder aussenden. Wenn sich in diesem Systeme einmal Gleichheit der Temperatur eingestellt hat, so muss jeder Körper durch Absorption so viel Wärme aufnehmen, als er durch die Ausstrahlung verliert. Aehnliches muss natürlich in Bezug auf Lichtschwingungen gelten. Alle Strahlen von der Wellenlänge $\lambda \gtrless \Lambda$, die c aussendet, werden von C ohne Absorption reflectirt, erleiden an der Oberfläche von c Absorption und Reflection etc., so dass der Körper schliesslich alle Strahlen wieder aufnimmt, die er aussendete und die eine von Λ verschiedene Wellenlänge hatten. Eine Bedingung für das Gleichbleiben der Temperatur kann demnach nur aus den Strahlungsverhältnissen der Strahlen von der Länge Λ hervorgehen. Um diese Bedingung aufzustellen, sei E das Emissionsvermögen der Platte C, d. h. die Strahlenmenge von der Wellenlänge Λ, welche die freistehende Platte C nach einer Seite hin aussendet. Ferner sei A das Absorptionsvermögen der Platte C, d. h. wenn die Strahlenmenge 1 auf die Platte C auffällt, so wird von derselben die Strahlenmenge A absorbirt. Diese Grössen mögen e und a für die Platte c und für Strahlen von der Wellenlänge Λ sein. Es findet nun in Bezug auf Strahlen von der Länge Λ folgender Vorgang statt:

Von C wird ausgesendet:	Von c wird absorbirt:	Von c wird ausgesendet:	Von C wird absorbirt:
E	aE	$(1-a)E$	$A(1-a)E$
$(1-A)(1-a)E$	$a(1-A)(1-a)E$	$(1-A)(1-a)^2E$	$A(1-A)(1-a)^2E$
$(1-A)^2(1-a)^2E$	$a(1-A)^2(1-a)^2E$	$(1-A)^2(1-a)^3E$	$A(1-A)^2(1-a)^3E$
	etc.		
...	...	e	Ae
$(1-A)e$	$a(1-A)e$	$(1-A)(1-a)e$	$A(1-A)(1-a)e$
$(1-A)^2(1-a)e$	$a(1-A)^2(1-a)e$	$(1-A)^2(1-a)^2e$	$A(1-A)^2(1-a)^2e$
	etc.		

Der Ausdruck für die Menge der Strahlen, die ursprünglich von C ausgingen und dann von c absorbirt werden, ist nun, wenn man der Kürze wegen die Bezeichnung $(1-A)(1-a) = k$ einführt:

$$aE(1+k+k^2+k^3+\ldots) = \frac{aE}{1-k}.$$

Von den Strahlen jedoch, die c ursprünglich aussendete und nach und nach wieder absorbirte, beträgt die Menge:

$$a(1-A)e(1+k+k^2+\ldots) = \frac{a(1-A)e}{1-k}.$$

Daher ist die Bedingung, dass die lebendige Kraft der Aetherschwingungen von c dieselbe bleibt:

$$e = \frac{aE}{1-k} + \frac{a(1-A)e}{1-k}$$

oder, indem man den Werth von k wieder einsetzt:

$$e\left[\frac{1-(1-a)(1-A)-a(1-A)}{1-k}\right]=\frac{aE}{1-k},$$

d. i.

$$\frac{e}{a}=\frac{E}{A},$$

d. h. das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen ist bei beiden Körpern gleich. Ebenso findet man leicht als Bedingung in Betreff des Körpers C

$$E=\frac{A(1-a)E}{1-k}+\frac{Ae}{1-k}$$

oder

$$E\left[\frac{1-(1-a)(1-A)-A(1-a)}{1-k}\right]=\frac{Ae}{1-k}$$

oder

$$\frac{e}{a}=\frac{E}{A},$$

d. h. die Zustände beider Körper erfordern, dass bei derselben Temperatur und für dieselbe Wellenlänge das Verhältniss des Emissionsvermögens zum Absorptionsvermögen bei beiden Körpern ein und dasselbe sei. Was nun ad 2. die Anwendung obigen Gesetzes auf die Gase anbelangt, so bemerkt Kirchhoff, dass das Verhältniss beider Vermögen eine Function der Wellenlänge und der Temperatur sei und dass, wenn es für sichtbare Strahlen anfange, sich von Null zu unterscheiden, der Körper anfange, Licht von der Farbe dieses Strahles auszusenden, ausgenommen, wenn der Körper ein verschwindend kleines Absorptionsvermögen habe. Bei der Temperatur nun, bei welcher die festen Körper erglühen, muss dieses Verhältniss schon einen bemerkbaren Werth haben, weil sie viele Strahlen aussenden. Die Gase erglühen bei dieser Temperatur noch nicht, indem sie ein verschwindend kleines Absorptionsvermögen und Emissionsvermögen haben. Erhitzt man die Gase über diese Temperatur hinaus, so erglühen sie endlich auch, das Verhältniss beider Vermögen ist bei ihnen gewachsen, ihr Emissionsvermögen ist merklich gross geworden, demnach ist auch das Absorptionsvermögen merklich grösser geworden. Dies ist die Erklärung, die aus Kirchhoff's Artikel in den Berliner Berichten für die Erscheinung hervorzugehen scheint, dass bunte Flammen Licht ihrer eigenen Farbe absorbiren.

XIII. Eine neue Art elektrischer Ströme von G. Quincke. In zwei Aufsätzen dieses Titels Pogg. Ann. Bd. 107, S. 1 und Bd. 110, S. 38 hat der Herr Verfasser durch mühevolle experimentelle Arbeiten gezeigt, dass beim Durchpressen destillirten Wassers durch poröse Körper von zwei Platinplatten elektrische Ströme angezeigt werden, von denen die eine (nach der Strömungsrichtung des Wassers gerechnet) auf der Bergseite des porösen Körpers, die andere auf dessen Thalseite in das destillirte Wasser eingesenkt war und die durch Drähte mit einem Multiplicator in Verbindung gesetzt waren. Die Richtung dieser Ströme war dieselbe, wie die des strömenden Wassers. Die porösen Körper waren entweder Platten von gebranntem Thon oder von Bunsen'scher Kohle, oder über einander gelegte Platten reiner Seide, oder folgende gekleinte Körper, in ein planparallel an den *Enden abgeschliffenes* Glasrohr gebracht und durch an den

Enden angebrachte Seidenplatten zusammengehalten: Elfenbeinsägemehl, Glaspulver, reiner Quarzsand, Schwefelpulver, Kienen-, Linden-, Eichenholzsägespähne, Graphit, Eisenfeile, Platinschwamm, Porzellanpulver, Schellackpulver, Talkpulver, oder es dienten durch Seidenfäden zusammengeschnürte Bündel Asbest als Diaphragmen. Alle diese Körper wurden mit Siegellack an den Endpunkten zweier Glasröhren angekittet, deren eine die Verlängerung der andern bildete. Das Wasser, welches man später durch einen geeigneten, mit Windkessel versehenen Druckapparat hindurchpresste, gelangte von der einen Röhre durch das Diaphragma zur andern Röhre, aus der es ausfloss. Der Druck, der das Wasser hindurchtrieb, betrug bis zu 3 Atmosphären. Die elektromotorische Kraft, welche hierbei von den Platinplatten angezeigt wurde, zeigte sich unabhängig vom Querschnitt und der Dicke der Platte, aber proportional dem Drucke. Der Verfasser oben genannter Aufsätze hat die Grösse dieser elektromotorischen Kräfte gemessen und fand, dass, wenn man die elektromotorische Kraft der Daniell'schen Kette = 100 setzt, bei folgenden Substanzen als Diaphragmata die elektromotorischen Kräfte bei einem Drucke von 1 Atmosphäre durch die nebenstehenden Zahlen repräsentirt werden.

1.	Schwefel	977,07
2.	Quarzsand	620,49
3.	Schellackpulver .	330,01
4.	Seide	115,45
5.	Gebrannter Thon .	36,15
6.	Asbest	22,15
7.	Porzellanmasse . .	19,86
8.	Elfenbein	3,1
9.	Thierblase (ganz)	1,51.

Aus diesen Zahlenwerthen geht hervor, dass die elektromotorischen Kräfte bei einigen Substanzen sehr bedeutend sind, während sich die Intensität der Ströme wegen der geringen Leitungsfähigkeit des destillirten Wassers nur sehr gering zeigte. Diesem letzteren Umstande kann man nicht abhelfen, indem man verdünnte Säuren, Alkalien oder Salzlösungen durch die Diaphragmen presst, denn diese bewirken, in geringer Menge dem destillirten Wasser beigemengt, schon eine bedeutende Verminderung der elektromotorischen Kräfte. Diesem Umstande ist es jedenfalls zuzuschreiben, dass ein Versuch in grösserem Massstabe, wobei das Wasser einer Wasserleitung durch ein Schwefeldiaphragma zu fliessen genöthigt wurde, keine bedeutende elektromotorische Kraft ergab.

Bei dem Durchpressen von destillirtem Wasser konnte auch, wie sich erwarten lässt, mittels des Condensators freie positive Elektricität an der Thalelektrode, freie negative Elektricität an der Bergelektrode nachgewiesen werden.

Diese durch den Druck hervorgebrachten Ströme sind Thatsache, ohne dass es dem Verfasser der genannten Arbeiten gelungen wäre, sie mit bekannten Erscheinungen in Verbindung zu setzen; hingegen hat sich aus den Versuchen ergeben, dass diese Ströme weder durch etwa erregte Reibungselektricität zwischen dem Wasser und dem Diaphragma entstehen konnten, noch dass es Thermoströme sind. Vielleicht ergäbe sich irgend ein Gesetz, wenn der Verlust an lebendiger Kraft des Wassers beim Durchpressen durch die Diaphragmen mit der elektromotorischen Kraft der erregten Ströme verglichen werden könnte. Dr. Kahl.

VII.

Ueber sphärische Kegelschnitte.

Von Dr. HEILERMANN,
Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Coblenz.

Von Herrn Steiner ist vor einigen Jahren eine Reihe von wichtigen Eigenschaften der ebenen Kegelschnitte aufgedeckt worden. (Crelle's Journal Bd. 37 und 45.) Einige neue Sätze, welche mit denen des Herrn Steiner in innigem Zusammenhange stehen, habe ich in der letzten Zeit hinzugefügt. (Crelle's Journal Bd. 56 und diese Zeitschrift Bd. 5.) Hierdurch ist zu der Frage, wie sich die sphärischen Kegelschnitte oder, was auf dasselbe hinauskommt, die Kegel zweiten Grades in dieser Beziehung verhalten, hinreichende Veranlassung gegeben. Ich habe die Beantwortung versucht und erlaube mir im Nachfolgenden diejenigen Ergebnisse meiner Untersuchung, welche einigermassen wichtig zu sein scheinen, den Lesern dieser Zeitschrift vorzulegen.

Für die Entwickelung derselben benutze ich das Verfahren meines unvergesslichen Lehrers Gudermann, durch welches die analytischen Untersuchungen der Sphärik den planimetrischen ganz ähnlich werden. Die Sätze und Formeln, welche zur Anwendung kommen, sind von demselben in der „analytischen Sphärik" hergeleitet worden.

§. 1.

Um die Lage eines Punktes m auf der Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, wendet Gudermann zwei Quadranten von Hauptkreisen CD und CE als Coordinatenachsen an (siehe Fig. 1 Taf. IV). In ihrem Schnittpunkte C, dem Anfangspunkte der Coordinaten, bilden sie im Allgemeinen einen beliebigen Winkel, der jedoch im Nachfolgenden immer als Rechter angenommen ist.

Durch die Hauptkreise Dm und Em, welche die Achsen in K und L schneiden, wird nun der Punkt m auf die beiden Achsen bezogen, und zwar sind CL und CK die Coordinaten des Punktes m. Da jedoch diese durchgehends nur *mittels der trigonometrischen* Tangenten in Rechnung kom-

men, so werden auch für diese die einfachen Zeichen gewählt und der Punkt m durch (xy) bezeichnet, wenn

$$x = tng\,CL,\ y = tng\,CK.$$

In dieser Bezeichnung ist

$$1)\qquad \frac{x^2}{tng^2 a} + \frac{y^2}{tng^2 b} = 1$$

die Gleichung eines Kegelschnittes, dessen Halbachsen a und b sind, und zwar fallen die Achsen des Kegelschnittes in die Hauptkreise CD und CE. Die Excentricität e dieses Kegelschnittes ist bekanntlich unter der Voraussetzung, dass $a > b$, durch die Gleichung

$$\cos e = \frac{\cos a}{\cos b}$$

bestimmt. Soll nun ein zweiter Kegelschnitt

$$2)\qquad \frac{x^2}{tng^2 a_1} + \frac{y^2}{tng^2 b_1} = 1$$

mit dem obigen die Brennpunkte gemeinsam haben und jenen in dem Punkte (xy) schneiden, so müssen die Halbachsen desselben der Gleichung 2) und der Bedingung

$$\frac{\cos a_1}{\cos b_1} = \frac{\cos a}{\cos b}$$

genügen.

Um hieraus die Halbachsen a_1 und b_1 zu bestimmen, setze man

$$3)\qquad \frac{\cos a}{\cos a_1} = \frac{\cos b}{\cos b_1} = \cos \mu,$$

mithin

$$tng\,a_1 = \sqrt{\frac{tng^2 a - tng^2 \mu}{1 + tng^2 \mu}},\ tng\,b_1 = \sqrt{\frac{tng^2 b - tng^2 \mu}{1 + tng^2 \mu}}$$

und statt der Gleichung 2)

$$4)\qquad \frac{x^2}{tng^2 a - tng^2 \mu} + \frac{y^2}{tng^2 b - tng^2 \mu} = \frac{1}{1 + tng^2 \mu}.$$

Aus diesem ergiebt sich nun zunächst

$$5)\qquad \begin{cases} tng^2 \mu = tng^2 a\, tng^2 b \,.\, \dfrac{1 + x^2 \cot^4 a + y^2 \cot^4 b}{1 + x^2 + y^2}, \\ \sin^2 \mu = \sin^2 a \sin^2 b \,.\, (1 + x^2 \cot^4 a + y^2 \cot^4 b), \\ \cos^2 \mu = \cos^2 a \cos^2 b \,.\, (1 + x^2 + y^2). \end{cases}$$

Die Halbachsen des Kegelschnittes 2) sind danach in folgender Weise bestimmt:

$$6)\qquad \begin{cases} tng^2 a_1 = \dfrac{tng^2 a - tng^2 b}{1 + tng^2 b} \,.\, \dfrac{x^2}{tng^2 a} = \dfrac{tng^2 e}{tng^2 a} \,.\, x^2, \\ tng^2 b_1 = \dfrac{tng^2 b - tng^2 a}{1 + tng^2 a} \,.\, \dfrac{y^2}{tng^2 b} = -\dfrac{\sin^2 e}{tng^2 b} \,.\, y^2. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke zeigen, dass a_1 real und b_1 imaginär ist, wenn $a > b$ *und der Schnittpunkt* der Kegelschnitte 1) und 2), nämlich (xy), real ist.

Da diese Curven mit der ebenen Ellipse und Hyperbel darin übereinstimmen, dass innerhalb der halben Kugelfläche, deren Mittelpunkt der Anfangspunkt der Coordinaten ist, die erstere aus einer geschlossenen Linie und die letztere aus zwei getrennten Zweigen besteht, so wird nach Gudermann jene eine sphärische Ellipse und diese eine sphärische Hyperbel genannt.

Wenn der Schnittpunkt (xy) der Kegelschnitte 1) und 2) in einem Scheitel der kleinen Achse BB_1 (Fig. 2 Taf. IV) der Ellipse 1) liegt, so ist $x=0$, $y=\pm\, tng\, b$,

$$tng\, a_1 = 0,\ tng\, b_1 = \pm\, sin\, e\sqrt{-1}.$$

Wenn zweitens der Punkt (xy) ein Scheitel der grossen Achse AA_1 ist, also

$$x = \pm\, tng\, a,\ y = 0,$$

so ist

$$tng\, a_1 = \pm\, tng\, e,\ tng\, b_1 = 0,$$

mithin reducirt sich der confocale Kegelschnitt 2) auf die beiden Brennpunkte des Kegelschnittes 1). Nehmen wir nun an, dass $x > tng\, a$, so wird der Schnittpunkt (xy) imaginär, weil unter dieser Voraussetzung nach Gleichung 1)

$$y^2 = \frac{tng^2 b}{tng^2 a}(tng^2 a - x^2)$$

negativ ist; mithin sind jetzt beide Halbachsen des Kegelschnittes 2) real. Wenn insbesondere

$$x = \frac{tng^2 a}{tng\, e},\ y = \frac{tng^2 b}{sin\, e}\sqrt{-1},$$

so ist

$$a_1 = a,\ b_1 = b,$$

oder es fällt der Kegelschnitt 2) mit dem ursprünglichen zusammen. Wird zuletzt

$$x = \infty \text{ und } y^2 = -\infty,$$

so folgt daraus

$$a_1 = \tfrac{1}{2}\pi \text{ und } b_1 = \tfrac{1}{2}\pi,$$

d. h. der confocale Kegelschnitt 2) geht in den Hauptkreis DE (Fig. 2 Taf. IV) über.

Zwischen diesen speciellen Werthen $x=0$, $x = tng\, a$, $x = \frac{tng^2 a}{tng\, e}$ und $x=\infty$ liegen nun der Reihe nach die Werthe, für welche der confocale Kegelschnitt 2) eine Hyperbel, oder eine von der Ellipse 1) eingeschlossene, oder eine dieselbe einschliessende Ellipse ist.

§. 2.

Die Hauptkreise, welche die confocalen Kegelschnitte 1) und 2) in ihrem Schnittpunkte (xy) berühren, sind

7) $$\frac{x}{tng^2 a}\cdot u + \frac{y}{tng^2 b}\cdot v = 1,$$

7*) $$\frac{x}{tng^2 a_1}\cdot u + \frac{y}{tng^2 b_1}\cdot v = 1,$$

und der Winkel, welchen sie bilden, ist nach §. 11 der „analytischen Sphärik" ein Rechter, denn

$$\frac{x^2}{tng^2 a\, tng^2 a_1} + \frac{y^2}{tng^2 b\, tng^2 b_1} + 1 = 0,$$

wie sich sogleich aus den Gleichungen 1) und 4) durch Subtraction ergiebt. Da nun hiernach die confocalen Kegelschnitte, auf der Kugel eben so, wie in der Ebene, sich unter rechten Winkeln schneiden, so ist die Berührende 7) eine Normale des Kegelschnittes 2) und die Berührende 7*) eine Normale des Kegelschnittes 1). Setzt man in die Gleichung der letzteren die Werthe von $tng^2 a_1$ und $tng^2 b_1$, so erhält man durch einige Umformungen

8) $$\frac{sin^2 a}{sin^2 a - sin^2 b}\cdot\frac{u}{x} + \frac{sin^2 b}{sin^2 b - sin^2 a}\cdot\frac{v}{y} = 1,$$

als Gleichung des Hauptkreises, welcher im Punkte (xy) den Kegelschnitt 1) unter rechtem Winkel schneidet.

Damit in dieser Normale der Punkt $n = (x_1 y_1)$ liege, muss

9) $$x_1 = \frac{sin^2 a - c}{sin^2 a}\cdot x,\; y_1 = \frac{sin^2 b - c}{sin^2 b}\cdot y,$$

wo die Länge des Bogens, welcher von dem Punkte $n = (x_1 y_1)$ und den Fusspunkt der Normale $m = (xy)$ begrenzt ist, durch die Grösse c bestimmt wird. Bezeichnet man diesen Bogen mn mit d, so ist nach §. 6 der „analytischen Sphärik"

$$cos\, d = \frac{1 + xx_1 + yy_1}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}};$$

nun erhält man aber durch Einsetzung der Werthe von x_1 und y_1

$$1 + xx + yy_1 = (1 - c)(1 + x^2 + y^2),$$

folglich

$$cos\, d = \pm (1-c)\sqrt{\frac{1 + x^2 + y^2}{1 + x_1^2 + y_1^2}},$$

$$sin\, d = \pm c\sqrt{\frac{1 + x^2 cot^4 a + y^2 cot^4 b}{1 + x_1^2 + y_1^2}},$$

10) $$tng\, d = \pm \frac{c}{1-c}\sqrt{\frac{1 + x^2 cot^4 a + y^2 cot^4 b}{1 + x^2 + y^2}},$$

und das Zeichen $\pm$ ist jedes Mal so zu wählen, wie es die Länge des Bogens d erfordert. Setzt man $c = -\infty$, so liegt nach den Gleichungen 9) der Punkt $n = (x_1 y_1)$ in dem Hauptbogen DE, mithin ist nach 10)

$$tng\, mR = \sqrt{\frac{1 + x^2 cot^4 a + y^2 cot^4 b}{1 + x^2 + y^2}},$$

wenn der Schnittpunkt der Normale 8) und des Hauptbogens DE mit R bezeichnet wird.

Hierdurch ist nun zugleich das Stück der Normale bestimmt, welches durch eine vom Anfangspunkte C darauf gefällte Senkrechte begrenzt wird, denn es ergänzt den Bogen mR zu einem Quadranten; es ist also, wenn die Tangente desselben mit ξ bezeichnet wird,

12) $$\xi = \sqrt{\frac{1+x^2+y^2}{1+x^2 \cot^4 a + y^2 \cot^4 b}};$$

und somit entsteht aus Gleichung 10)

13) $$\xi \operatorname{tng} d = \pm \frac{c}{1-c}.$$

Wenn man denselben Werth in die Gleichung 5) einsetzt, so ergiebt sich noch

14) $$\operatorname{tng} \mu = \frac{\operatorname{tng} a \,.\, \operatorname{tng} b}{\xi}.$$

§. 3.

Für den Punkt Q, wo die Normale des Punktes m in die grosse Achse einschneidet, ist wegen der Gleichungen 9)

$$c = \sin^2 b,$$

folglich nach der Formel 13)

15) $$\operatorname{tng} m Q = \frac{\operatorname{tng}^2 b}{\xi}.$$

Eben so ist für den Einschnitt P in die kleine Achse

$$c = \sin^2 a,$$

und

15*) $$\operatorname{tng} m P = \frac{\operatorname{tng}^2 a}{\xi}.$$

Nimmt man nun noch hinzu, dass

$$\operatorname{tng} m R = \frac{1}{\xi},$$

so erhält man

$$\operatorname{tng} m P \,.\, \operatorname{tng} m Q \,.\, \operatorname{tng} m R = \frac{\operatorname{tng}^2 a \operatorname{tng}^2 b}{\xi^3}.$$

Dazu ist nach §. 71 der analytischen Sphärik der Krümmungshalbmesser h des Kegelschnittes 1) für den Punkt (xy) mittels der Gleichung

$$\operatorname{tng} h = \frac{\operatorname{tng}^2 a \operatorname{tng}^2 b}{\xi^3}$$

zu bestimmen, folglich ist auch

16) $$\operatorname{tng} m P \,.\, \operatorname{tng} m Q \,.\, \operatorname{tng} m R = \operatorname{tng} h.$$

Da jede Seite des dreirechtwinkligen Dreieckes CDE als Achse des Kegelschnittes 1) angesehen werden kann, so ist durch diese Gleichung folgende Eigenschaft der sphärischen Kegelschnitte dargestellt:

Das Produkt aus den Tangenten der drei Abschnitte welche auf einer Normalen eines sphärischen Kegelschnittes

einerseits durch ihren Fusspunkt und andererseits durch die drei Achsen begrenzt werden, ist gleich der Tangente des zugehörigen Krümmungshalbmessers.

Berücksichtigt man nur die Werthe von $tng\, mP$ und $tng\, mQ$, so ergiebt sich durch Umkehrung des Zusammenhanges, welchen die Gleichungen 15) ausdrücken, folgender Satz: **Werden die Schenkel eines rechten Winkels von einem Hauptkreise geschnitten und in dem letztern ein Punkt so bestimmt, dass die Tangente jedes Abschnittes, multiplicirt mit der Tangente des Abschnittes, welcher durch die vom Scheitel des rechten Winkels gefällte Senkrechte begrenzt ist, ein constantes Produkt bildet, so liegt jener Punkt in einem Kegelschnitte, für welchen jene Produkte die Quadrate der Tangenten der Halbachsen sind, und jener Hauptkreis ist eine Normale desselben.**

Die Voraussetzungen, welche in diesem Satze gemacht werden, sind auch durch die beiden Hauptkreise 7), welche die Kegelschnitte 1) und 2) im Punkte $m = (xy)$ berühren und von den Achsen derselben in den Punkten Q und Q_1, P und P_1 geschnitten werden, erfüllt: es ist nämlich nach den Gleichungen 7)

$$tng\, CQ = \frac{tng^2 a_1}{x},\quad tng\, CQ_1 = \frac{tng^2 a}{x}$$

und durch die vom Punkte m auf die Achse AA_1 gefällte Senkrechte mL wird der Bogen CL abgeschnitten, von welchem

$$tng\, CL = x,$$

folglich ist

$$tng\, CQ \,.\, tng\, CL = tng^2 a_1,\quad tng\, CQ_1 \,.\, tng\, CL = tng^2 a.$$

Es liegt mithin der Mittelpunkt C in einem Kegelschnitt, dessen Achsen $2a$ und $2a_1$ sind und in den Berührenden 7) liegen, und die Axe AA_1 ist eine Normale desselben. Bezeichnet man mit ξ und η die Tangenten der Coordinaten des Punktes C in Bezug auf die Hauptkreise 7) als Coordinatenachsen, so ist dieser Kegelschnitt

$$17)\qquad \frac{\xi^2}{tng^2 a} + \frac{\eta^2}{tng^2 a_1} = 1.$$

Dasselbe gilt in Bezug auf die Achse BB_1 und zwar ist sie eine Normale des Kegelschnittes

$$17^*)\qquad \frac{\xi^2}{tng^2 b} + \frac{\eta^2}{tng^2 b_1} = 1,$$

von welchem sie im Punkte C geschnitten wird.

Auch diese Kegelschnitte sind confocal und zwar ist nach der Gleichung 3) der Bogen μ ihre gemeinsame Excentricität.

Hiernach haben die sphärischen Kegelschnitte mit den ebenen auch folgende Eigenschaft gemeinsam.

Werden um den Schnittpunkt zweier confocalen Kegel-

schnitte zwei neue Kegelschnitte beschrieben, welche die Berührenden des Schnittpunktes als Achsen enthalten und die Achsen derselben im Mittelpunkte berühren, so sind auch diese Kegelschnitte confocal.

§. 4.

Aus den Gleichungen 9) folgt sogleich, dass auch der Punkt $n = (x_1 y_1)$, dessen Coordinaten

$$x_1 = \frac{\sin^2 a - c}{\sin^2 a} \cdot x,\; y_1 = \frac{\sin^2 b - c}{\sin^2 b} \cdot y$$

sind, in einem Kegelschnitte

$$18)\qquad \frac{x_1^2}{tng^2 \alpha} + \frac{y_1^2}{tng^2 \beta} = 1$$

liegt und zwar sind die Halbachsen desselben

$$tng\,\alpha = \frac{\sin^2 a - c}{\sin a \cos a},\; tng\,\beta = \frac{\sin^2 b - c}{\sin b \cos b}.$$

Aus diesen Werthen erhält man dann zur Bestimmung der Excentricität ε dieses Kegelschnittes

$$19)\qquad \begin{cases} \cos \varepsilon = \cos e \sqrt{\dfrac{(1-c)^2 + c^2 \cot^2 b}{(1-c)^2 + c^2 \cot^2 a}}, \\ \sin \varepsilon = \sin e \sqrt{\dfrac{(1-c)^2 - c^2 \cot^2 a \cot^2 b}{(1-c)^2 + c^2 \cot^2 a}}, \\ tng\,\varepsilon = tng\,e \sqrt{\dfrac{(1-c)^2 - c^2 \cot^2 a \cot^2 b}{(1-c)^2 + c^2 \cot^2 b}}. \end{cases}$$

Wird nun noch in der Normalen 8) auf der entgegengesetzten Seite des Fusspunktes ein zweiter Punkt $n_1 = (x_1 y_1)$ durch die Coordinaten

$$x_1 = \frac{\sin^2 a + c_1}{\sin^2 a} \cdot x,\; y_1 = \frac{\sin^2 b + c_1}{\sin^2 b} \cdot y$$

bestimmt, so liegt dieser in dem Kegelschnitte

$$20)\qquad \frac{x_1^2}{tng^2 \alpha_1} + \frac{y_1^2}{tng^2 \beta_1} = 1,$$

dessen Halbachsen die Gleichungen

$$tng\,\alpha_1 = \frac{\sin^2 a + c_1}{\sin a \cos a},\; tng\,\beta_1 = \frac{\sin^2 b + c_1}{\sin b \cos b}$$

angeben. Sollen nun die beiden Punkte n und n_1 von dem Fusspunkte m der Normale gleiche Entfernungen haben, so muss nach Gleichung 10) der Bedingung

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1}$$

Genüge geschehen. Wenn aber diese Bedingung erfüllt ist, so haben auch, wie die Ausdrücke 19) zeigen, die Kegelschnitte 18) und 20) dieselbe Excentricität.

Werden also auf einer Normale eines sphärischen Kegel-

schnittes vom Fusspunkte aus nach beiden Seiten gleiche Stücke abgeschnitten, deren Tangenten mit der Tangente des Abschnittes, welchen die vom Mittelpunkte auf die Normale gefällte Senkrechte begrenzt, Produkte von constanter Grösse bilden, so sind die Ortscurven der Schnittpunkte zwei confocale Kegelschnitte.

Die Punkte m, n und n_1 sind entsprechende Punkte in den Kegelschnitten 1), 18) und 20), denn es verhält sich:

$$x : \frac{\sin^2 a - c}{\sin^2 a} . x : \frac{\sin^2 a + c_1}{\sin^2 a} . x = tng\, a : tng\, \alpha : tng\, \alpha_1,$$

$$y : \frac{\sin^2 b - c}{\sin^2 b} . y : \frac{\sin^2 b + c_1}{\sin^2 b} . y = tng\, b : tng\, \beta : tng\, \beta_1.$$

Wenn man diese Beziehung umkehrt und den vorhergehenden Satz hinzunimmt, so ergiebt sich folgende Eigenschaft der confocalen Kegelschnitte:

Der Hauptbogen, welcher zwei entsprechende Punkte zweier confocalen Kegelschnitte verbindet, ist in allen Lagen Normale desselben dritten Kegelschnittes und wird durch diesen halbirt.

§. 5.

Nach den Gleichungen 19) und 13) liegen die gemeinsamen Brennpunkte der Kegelschnitte 18) und 20), für welche

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1} = \xi\, tng\, d,$$

in der grossen Achse des Kegelschnittes 1), wenn

$$\xi\, tng\, d < tng\, a\, tng\, b;$$

sie liegen aber in der kleinen Achse desselben, wenn

$$\xi\, tng\, d > tng\, a\, tng\, b$$

und fallen mit dem Mittelpunkte zusammen, wenn

$$\xi\, tng\, d = tng\, a\, tng\, b.$$

In dem letzten Falle ist

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1} = tng\, a\, tng\, b,$$

mithin

21) $$c = \frac{\sin a \sin b}{\cos (a-b)},\quad c_1 = \frac{\sin a \sin b}{\cos (a+b)},$$

und durch diese Werthe nehmen die Punkte n und n_1 besondere Lagen an, welche mit r und r_1 bezeichnet seien; und zwar sind nach 9) die Coordinaten dieser Punkte

$$x_1 = \frac{tng\,(a \mp b)}{tng\, a} . x,\quad y_1 = \frac{tng\,(b \mp a)}{tng\, b} . y.$$

Die Punkte r und r_1 liegen also in den Kreisen

22) $$x_1^2 + y_1^2 = tng^2 (a \mp b),$$

oder: **Werden um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen Kreise beschrieben, so wird von diesen jede Normale der Ellipse in zwei Punkten geschnitten, welche dem Fusspunkte entsprechend und von demselben gleich weit entfernt sind.**

Der Bogen $mr = mr_1$ selbst, welcher durch diese Kreise abgeschnitten wird, ist nach 13)

23) $$tng\, mr = tng\, mr_1 = \frac{tng\, a\; tng\, b}{\xi}$$

und wegen der Gleichung 14) ist

$$mr = mr = \mu.$$

Da nun, wie oben erwähnt, μ die Excentricität der confocalen Kegelschnitte 17) ist, so ergiebt sich für diese auch folgende Eigenschaft:

Werden für irgend einen Punkt einer sphärischen Ellipse die Kegelschnitte gezeichnet, welche die Normale und Berührende dieses Punktes als Achsen enthalten und die Achsen der Ellipse im Mittelpunkte berühren, so liegen die gemeinsamen Brennpunkte dieser Kegelschnitte in den Kreisen, welche um den Mittelpunkt der Ellipse mit der Summe und Differenz ihrer Halbachsen beschrieben worden sind.

Da nach den Gleichungen 15) und 23)

24) $$tng^2\, mr = tng^2\, mr_1 = tng\, m P \,.\, tng\, m Q,$$

so liegen die Punkte r und r_1 harmonisch gegen P und Q; oder:

Jede Normale einer sphärischen Ellipse wird von den um ihren Mittelpunkt mit der Summe und Differenz der Halbachsen beschriebenen Kreisen in zwei Punkten geschnitten, welche dem Fusspunkte der Normale entsprechen und gegen die in den Achsen gelegenen Punkte derselben Normale harmonisch liegen.

Wenn man die oben hergeleiteten Werthe von $tng\, mP$ und $tng\, mr$ in die Gleichung

$$tng\, r P = \frac{tng\, m P - tng\, mr}{1 + tng\, m P \,.\, tng\, mr}$$

einsetzt, so entsteht

$$tng\, r P = \frac{(tng\, a - tng\, b)\, \xi\, tng\, a}{\xi^2 + tng^2\, a\; tng\, b},$$

und

$$sin\, r P = \frac{(tng\, a - tng\, b)\, \xi\, tng\, a}{\sqrt{tng^4\, a + \xi^2}\, \sqrt{tng^2\, a\; tng^2\, b + \xi^2}}.$$

Eben so findet sich

$$sin\, r_1 P = \frac{(tng\, a + tng\, b)\, \xi\, tng\, a}{\sqrt{tng^4\, a + \xi^2}\, \sqrt{tng^2\, a\; tng^2\, b + \xi^2}},$$

$$\sin r Q = \frac{(tng\, a - tng\, b)\, \xi\, tng\, b}{\sqrt{tng^4 b + \xi^2}\, \sqrt{tng^2 a\, tng^2 b + \xi^2}},$$

$$\sin r_1 Q = \frac{(tng\, a - tng\, b)\, \xi\, tng\, b}{\sqrt{tng^4 b + \xi^2}\, \sqrt{tng^2 a\, tng^2 b + \xi^2}};$$

folglich ist

$$25)\ \begin{cases} \sin r P : \sin r_1 P = tng\, a - tng\, b : tng\, a + tng\, b = \sin(a - b) : \sin(a + b), \\ \sin r Q : \sin r_1 Q = tng\, a - tng\, b : tng\, a + tng\, b = \sin(a - b) : \sin(a + b). \end{cases}$$

Aus diesen Proportionen ergiebt sich nun zur Ergänzung des vorhergehenden Satzes folgende Eigenschaft der sphärischen Kegelschnitte:

Werden um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen Kreise beschrieben, so wird das Stück jeder Normale, welches durch die ihrem Fusspunkte entsprechenden Punkte dieser Kreise begrenzt ist, von den Achsen der Ellipse so getheilt, dass die Sinus der Abschnitte in einem constanten Verhältnisse stehen.

Die besonderen Werthe unter 21) sind die wichtigsten, welche die Grössen c und c_1 annehmen können; einige andere sollen nur eben erwähnt werden.

Setzt man

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1} = 1, \text{ also } c = \tfrac{1}{2},\ c_1 = \infty,$$

so geht die Ellipse 20) in den Hauptkreis DE über und die confocale 18) in

$$\frac{x^2}{\cot^2 2a} + \frac{y^2}{\cot^2 2b} = 1.$$

Dieselben Linien erhält man durch

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1} = -1, \text{ also } c = \infty,\ c_1 = -\tfrac{1}{2},$$

indem der Kegelschnitt 18) in den Hauptkreis und der zugehörige 20) in die vorstehende Ellipse übergeht.

Wenn

$$\frac{c}{1-c} = \frac{c_1}{1+c_1} = \infty, \text{ also } c = -c_1 = 1,$$

so ist nach der Gleichung 10) der auf der Normale abgeschnittene Bogen d ein Quadrant und die beiden confocalen Kegelschnitte 18 und 20) fallen in den einen

$$\frac{x_1^2}{\cot^2 a} + \frac{y_1^2}{\cot^2 b} = 1$$

zusammen, welcher von dem ursprünglichen die reciproke Curve ist, d. h. von allen Hauptkreisen, welche die Ellipse 1) berühren, die Mittelpunkte enthält.

§. 6.

Der Bogen mQ, welcher einerseits durch den Fusspunkt der Normale *und andererseits* durch ihren Einschnitt in die grosse Achse begrenzt wird,

ist durch die Gleichung 15) bestimmt. Wird derselbe mit ϱ bezeichnet und mittels der Gleichung 14) die Grösse ξ eliminirt, so ist

27) $$tng\,\varrho = \frac{tng\,b\;tng\,\mu}{tng\,a}.$$

Durch Einsetzung dieses Werthes kann man den Halbachsen des Kegelschnittes 2), welcher durch den Fusspunkt der Normale geht, und den Coordinaten ihres Fusspunktes folgende Form geben:

$$tng\,a_1 = tng\,a\sqrt{\frac{tng^2 b - tng^2 \varrho}{tng^2 b + tng^2 a\; tng^2 \varrho}},\quad tng\,b_1 = \sqrt{\frac{tng^4 b - tng^2 a\; tng^2 \varrho}{tng^2 b + tng^2 a\; tng^2 \varrho}},$$

$$x = \frac{tng^2 a}{tng\,e}\sqrt{\frac{tng^2 b - tng^2 \varrho}{tng^2 b + tng^2 a\; tng^2 \varrho}},\quad y = \frac{tng\,b}{sin\,c}\sqrt{\frac{tng^2 a\; tng^2 \varrho - tng^4 b}{tng^2 a\; tng^2 \varrho + tng^2 b}}.$$

Zugleich ist wegen der Gleichung 7*) der Bogen CQ, welcher von derselben Normale auf der grossen Achse abgeschnitten wird, durch die Gleichung

$$tng\,CQ = \frac{tng^2 a_1}{x}$$

bestimmt. Wenn man noch den Werth von x einsetzt, so entsteht

28) $$tng\,CQ = \frac{tng\,a_1\; tng\,e}{tng\,a} = tng\,e\sqrt{\frac{tng^2 b - tng^2 \varrho}{tng^2 b + tng^2 a\; tng^2 \varrho}}.$$

Man denke sich nun um den Punkt mit dem Halbmesser ϱ einen Kreis K beschrieben; dieser berührt den Kegelschnitt 1) in zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1, und der Hauptbogen mm_1 schneidet die grosse Achse in einem Punkte L, so dass

$$tng\,CL = \frac{tng\,a\,.\,tng\,a_1}{tng\,e} = \frac{tng^2 a}{tng\,e}\sqrt{\frac{tng^2 b - tng^2 \varrho}{tng^2 b + tng^2 a\; tng^2 \varrho}}.$$

Man sieht sogleich, dass

30) $$tng\,CQ\,.\,tng\,CL = tng^2 a_1,$$

folglich ist **der Mittelpunkt eines Kreises, welcher einen Kegelschnitt in zwei gegen die erste Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, in Bezug auf den confocalen Kegelschnitt, welcher durch die Berührungspunkte geht, der Pol des Hauptkreises, in welchem die Berührungspunkte liegen.**

Der grösste Werth, welchen der Halbmesser ϱ des doppelt berührenden Kreises K annehmen kann, ist

$$\varrho = b$$

und zwar ist dann zugleich

$$a_1 = 0,\; tng\,b_1 = sin\,e\sqrt{-1},\; x = 0,\; y = tng\,b,$$
$$CQ = 0,\; CL = 0,$$

mithin berührt dieser Kreis die Ellipse 1) in den Scheiteln der kleinen Achse. Der kleinste Kreis, welcher die Ellipse in zwei realen, gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, ist bestimmt durch

$$tng\,\varrho = \frac{tng^2 b}{tng\,a};$$

zugleich ist

$$a_1 = e,\ b_1 = 0,\ x = tng\, a,\ y = 0$$

$$tng\, CQ = \frac{tng^2 e}{tng\, a},\ CL = a;$$

es fallen also die beiden Berührungspunkte in einen Scheitel der grossen Achse zusammen und für diesen ist der zugehörige Werth von ϱ der Krümmungshalbmesser. Wenn endlich der Halbmesser

$$\varrho = 0$$

gesetzt wird, so ist

$$a_1 = a,\ b_1 = b,\ x = \frac{tng^2 a}{tng\, e},\ y = \pm \frac{tng^2 b}{sin\, e}\sqrt{-1},$$

$$CQ = e,\ tng\, CL = \frac{tng^2 a}{tng\, e}.$$

Es geht also in diesem Falle der doppelt berührende Kreis K in einen Brennpunkt und der Hauptbogen, in welchem die Berührungspunkte desselben liegen, in die zugehörige Directrix über.

Jenachdem nun

$$tng\, b > tng\, \varrho > \frac{tng^2 b}{tng\, a}$$

oder

$$\frac{tng^2 b}{tng\, a} > tng\, \varrho > tng\, 0,$$

findet zwischen dem Berührungskreise K und der Ellipse 1) eine Berührung in zwei realen oder imaginären Punkten statt.

§. 7.

Der Hauptbogen $r = nQ$, welcher einen beliebigen Punkt $n = (x_1 y_1)$ des Keglschnittes 1) mit dem Punkte $Q = \left(\frac{tng^2 a_1}{x}, 0\right)$ in der grossen Achse verbindet, ist mittels der schon mehrfach angewandten Formel zu bestimmen, nämlich

$$cos\, r = \frac{1 + \frac{x_1}{x} \cdot tng^2 a_1}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}\sqrt{1 + \frac{tng^4 a_1}{x^2}}}.$$

Nun ist aber nach der Gleichung 6)

$$1 + \frac{tng^4 a_1}{x^2} = \frac{tng^4 a + x^2\, tng^4 e}{tng^4 a}$$

und

$$1 + \frac{x_1}{x} \cdot tng^2 a_1 = \frac{tng^2 a + x x_1\, tng^2 e}{tng^2 a},$$

weil dazu der Punkt $n = (x_1 y_1)$ in der Ellipse 1) liegt, so ist auch

$$1 + x_1^2 + y_1^2 = \frac{tng^2\, a + x_1^2\, tng^2\, e}{tng^2\, a\, cos^2\, b}$$

und durch Einsetzung dieser Werthe entsteht

$$cos\, r = \frac{ng\, a\, cos\, b\, (tng^2\, a + x x_1\, tng^2\, e)}{\sqrt{tng^2\, a + x_1^2\, tng^2\, e}\, \sqrt{tng^4\, a + x^2\, tng^4\, e}}.$$

Wenn nun insbesondere der Punkt $n = (x_1 y_1)$ mit dem Punkte $m = (xy)$, wo der Kreis K den Kegelschnitt 1) berührt, zusammenfällt, so geht der Bogen $nQ = r$ in den Halbmesser ϱ über, mithin ist zunächst

$$cos\, \varrho = tng\, a\, cos\, b \sqrt{\frac{tng^2\, a + x^2\, tng^2\, e}{tng^4\, a + x^2\, tng^4\, e}}$$

und weiter

$$\frac{cos\, r}{cos\, \varrho} = \frac{tng^2\, a + x x_1\, tng^2\, e}{\sqrt{tng^2\, a + x_1^2\, tng\, e}\, \sqrt{tng^2\, a + x^2\, tng^2\, e}}.$$

Man beachte nun zuerst, dass nach den Gleichungen 6)

$$sin\, a_1 = \frac{x\, tng\, e}{\sqrt{tng^2\, a + x^2\, tng^2\, e}},\quad cos\, a_1 = \frac{tng\, a}{\sqrt{tng^2\, a + x^2\, tng^2\, e}},$$

setze dann nach Analogie dieses Werthes

$$tng\, \varphi_1 = \frac{tng\, e}{tng\, a} \cdot x_1,$$

also

$$sin\, \varphi_1 = \frac{x_1\, tng\, e}{\sqrt{tng^2\, a + x_1^2\, tng^2\, e}},\quad cos\, \varphi_1 = \frac{tng\, a}{\sqrt{tng^2\, a + x_1^2\, tng^2\, e}},$$

und berücksichtige ferner noch, dass der Quotient $cos\, r : cos\, \varrho$ auch der Cosinus der vom Punkte $n = (x_1 y_1)$ an den Kreis gezogenen Berührenden t ist. Hierdurch erhält man aus der vorstehenden Gleichung

$$cos\, t = cos\, a_1\, cos\, \varphi_1 + sin\, a_1\, sin\, \varphi_1,$$

oder

31) $$t = \pm (a_1 - \varphi_1),$$

wo das Zeichen $\pm$ so zu verstehen ist, dass der Werth von t immer positiv wird.

Da nun a_1 und φ in den Hyperbeln, welche mit der Ellipse 1) die Brennpunkte gemeinsam haben und durch die Punkte $m = (xy)$ und $n = (x_1 y_1)$ gehen, die realen Halbachsen sind und die eine von beiden negativ zu nehmen ist, wenn diese Punkte m und n auf verschiedenen Seiten der kleinen Achse liegen, so ergiebt sich aus der vorstehenden Gleichung folgender Satz:

Wird eine sphärische Ellipse von einem Kreise in zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1 berührt und von einem beliebigen Punkte n der Ellipse an diesen Kreis eine Berührende gezogen, so ist diese Linie gleich der Summe oder Differenz der realen Halbachsen der Hyperbeln, welche mit jener Ellipse confocal sind und dieselbe in *den Punkten* m und n schneiden, jenachdem diese

Punkte auf verschiedenen oder derselben Seite der kleinen Achse liegen.

Von diesem Satze will ich hier nur zwei besondere Fälle hervorheben. Wenn zuerst $x = 0$ also auch $a_1 = 0$ ist, so geht die Gleichung 31) über in

$$t = \varphi_1,$$

oder: Die Berührende, welche von einem beliebigen Punkte einer Ellipse an den über der kleinen Achse beschriebenen Kreis gezogen wird, ist gleich der realen Halbachse der Hyperbel, welche durch diesen Punkt geht und mit der Ellipse confocal ist.

Wenn zweitens der Bogen $\varphi = 0$ oder der Punkt $n = (x_1 y_1)$ in einen Scheitel der kleinen Achse liegt, so ist

$$t = a_1,$$

d. h.: Zieht man einen Kreis, welcher eine Ellipse in zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, von einem Scheitel der kleinen Achse eine Berührende, so ist diese gleich der realen Halbachse der Hyperbel, welche durch jene symmetrischen Punkte geht und mit der Ellipse confocal ist.

Ich nehme jetzt an, dass die Ellipse 1) von zwei Kreisen in je zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten m, m_1 und p, p_1 berührt wird, und bezeichne die realen Halbachsen der Hyperbeln, welche durch diese Punktenpaare gehen und mit der Ellipse 1) confocal sind, durch a_1 und a_2. Wird nun von einem beliebigen Punkte $n = (x_1 y_1)$, welcher in der Ellipse 1) so liegt, dass

$$tng\, \varphi_1 = \frac{tng\, e}{tng\, a} \cdot x_1,$$

an jeden dieser Kreise eine Berührende gezogen und diese mit t und t_1 bezeichnet, so ist nach der Gleichung 31)

$$t = \pm (a_1 - \varphi_1) \text{ und } t_1 = \pm (a_2 - \varphi_1),$$

und daraus ergiebt sich sogleich

32) $$t \pm t_1 = \pm (a_1 \pm a_2).$$

Die Eigenschaft der Kegelschnitte, welche diese Gleichung darstellt, kann man in folgender Weise ausdrücken:

Wenn eine sphärische Ellipse von zwei Kreisen in je zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten m, m_1 und p, p_1 berührt und von einem beliebigen Punkte n der Ellipse an diese Kreise Berührende gezogen werden, so ist die Summe oder Differenz dieser Linien constant, jenachdem der Punkt n zwischen den Hauptbogen mm_1 und pp_1 liegt oder nicht.

Diese constante Grösse ist die Summe oder Differenz der realen Halbachsen der Hyperbeln, welche durch die Punkte m und p gehen und mit

der Ellipse 1) confocal sind, jenachdem diese Punkte auf verschiedenen oder derselben Seite der kleinen Achse liegen.

Für den speciellen Fall, wo die beiden Berührungskreise in die Brennpunkte übergehen, ergiebt sich aus dem vorstehenden Satze die allbekannte Eigenschaft der Brennstrahlen eines Kegelschnittes.

§. 8.

Nach der Gleichung 31) ist

$$\sin t = \pm \cos a_1 \cos \varphi_1 (trg. a_1 - tng\, \varphi_1) = \pm \frac{\cos a_1 \cos \varphi_1\, tng\, e}{tng\, a}(x - x_1).$$

Wenn man noch von dem Punkte $n = (x_1 y_1)$ auf den Hauptbogen mm_1, welcher durch die beiden Berührungspunkte des Kreises K geht, eine Senkrechte s fällt, so ist nach §. 13 der analytischen Sphärik

$$\sin s = \pm \frac{x - x_1}{\sqrt{1+x^2}\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}} = \pm \frac{\cos b \cos \varphi_1}{\sqrt{1+x^2}}(x - x_1).$$

Aus der Verbindung dieser Gleichungen ergiebt sich

$$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{tng\, e \cos a_1}{tng\, a \cos b}\sqrt{1+x^2},$$

oder weil

$$\frac{tng\, e}{tng\, a \cos b} = \frac{\sin e}{\sin a} \text{ und } \cos a_1 = \frac{tng\, a}{\sqrt{tng^2 a + x^2\, tng^2 e}},$$

so ist

33) $$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{\sin e}{\cos a}\sqrt{\frac{1+x^2}{tng^2 a + x^2\, tng^2 e}}.$$

Diese Gleichung zeigt, dass das Verhältniss $\sin t : \sin s$ von der Lage des Punktes $n = (x_1 y_1)$ unabhängig ist, und enthält also folgende Eigenschaft der sphärischen Kegelschnitte:

Wird eine Ellipse von einem Kreise in zwei gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1 berührt, von einem beliebigen Punkte der Ellipse an diesen Kreis eine Berührende gezogen und auf den Hauptbogen, welcher durch die Berührungspunkte m, m_1 geht, eine Senkrechte gefällt, so stehen die Sinus dieser Linien in einem constanten Verhältnisse.

Der Exponent dieses constanten Verhältnisses, welcher bei den ebenen Kegelschnitten auch von der Lage oder Grösse des doppelt berührenden Kreises unabhängig ist, nimmt auf der Kugel für verschiedene Kreise verschiedene Werthe an. Um dies deutlich zu zeigen, gebe ich der Gleichung 33) durch einige Umformungen mittels der im §. 6 entwickelten Werthe eine Gestalt, welche die Abhängigkeit des Verhältnisses von dem Halbmesser des doppelt berührenden Kreises angiebt; eine solche ist:

$$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{\sin e}{\sin a} \cdot \sqrt{1 + \frac{tng^2 b - tng^2 \varrho}{tng^2 a - tng^2 b} \cdot tng^2 a}.$$

Hieraus sieht man sogleich, dass dies Verhältniss desto kleiner ist, je grösser der Halbmesser ϱ des doppelt berührenden Kreises ist.

Wenn zuerst

$$\varrho = b,$$

also die Berührung in den Scheiteln der kleinen Achse stattfindet, so ist

$$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{\sin e}{\sin a}.$$

Wenn zweitens

$$tng\, \varrho = \frac{tng^2 b}{tng\, a},$$

und somit, wie oben erwähnt, die Berührungspunkte in einen Scheitel der grossen Achse zusammenfallen, so ist

$$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{\sin e}{\sin a} \cdot \frac{1}{\cos b}.$$

Den grössten Werth erreicht das Verhältniss, wenn der doppelt berührende Kreis in einen Brennpunkt übergeht und zwar ist dieses Maximum

$$\frac{\sin t}{\sin s} = \frac{\sin e}{\sin a} \cdot \sqrt{1 + \frac{tng^2 a\, tng^2 b}{tng^2 a - tng^2 b}}.$$

Wenn nun eine sphärische Ellipse von einem Kreise in zwei realen, gegen die grosse Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, so liegt das Verhältniss $\sin t : \sin s$ zwischen dem ersten und zweiten dieser speciellen Werthe, d. h. es ist

$$\frac{\sin e}{\sin a} < \frac{\sin t}{\sin s} < \frac{\sin e}{\sin a \cos b}.$$

Für alle Kreise aber, welche eine Ellipse in zwei imaginären Punkten berühren, liegt dasselbe Verhältniss zwischen dem zweiten und dritten Werthe, oder

$$\frac{\sin e}{\sin a \cos b} < \frac{\sin t}{\sin s} < \frac{\sin e}{\sin a} \cdot \sqrt{1 + \frac{tng^2 a\, tng^2 b}{tng^2 a - tng^2 b}}.$$

Nach der Gleichung 33) kann auch leicht der doppelt berührende Kreis bestimmt werden, für welchen, wie bei einer ebenen Parabel,

$$\frac{\sin t}{\sin s} = 1 \text{ oder } t = s;$$

setzt man nämlich diesen Werth in jene Gleichung ein, so ergiebt sich

34) $$x = \pm \cot e.$$

Wird also eine sphärische Ellipse in zwei (realen oder imaginären) Punkten, welche von einem Brennpunkte um einen Quadranten abstehen, von einem Kreise berührt und von einem beliebigen Punkte der Ellipse an diesen Kreis eine Berührende gezogen, so ist diese gleich der Entfernung desselben Punktes von dem Hauptkreise, dessen Mittelpunkt jener Brennpunkt ist.

Die vorstehende Bedingung 34) kann wegen der Gleichung 6) auch durch

$$tng\, a \,.\, tng\, a_1 = 1 \text{ oder } a + a_1 = \tfrac{1}{2}\pi$$

ersetzt und somit für die zuletzt erwähnte Eigenschaft der Kegelschnitte ein etwas veränderter Ausdruck gegeben werden.

Da, wie oben erwähnt, das Verhältniss $sin\, t : sin\, s$ sein Maximum erreicht, wenn

$$\varrho = 0, \text{ also } x = \frac{tng^2\, a}{tng\, e},$$

so giebt es nur dann einen doppelt berührenden Kreis, für welchen $sin\, t = sin\, s$, wenn

$$\frac{tng^2\, a}{tng\, e} \geqq cot\, e \text{ oder } a \geqq \tfrac{1}{4}\pi.$$

Wenn insbesondere $a = \frac{1}{4}\pi$, so ist, wie auch bei der ebenen Parabel, jeder Punkt des Kegelschnittes von seinem Brennpunkte ebenso weit entfernt, als von der zugehörigen Directrix.

§. 9.

Der Bogen mP, welcher durch die kleine Achse der Ellipse auf der Normale des Punktes $m = (xy)$ begrenzt wird, sei dem Vorhergehenden entsprechend mit ϱ_1 bezeichnet; es ist mithin nach den Gleichungen 14) und 15*)

$$35)\qquad tng\, \varrho_1 = \frac{tng\, a\; tng\, \mu}{tng\, b}.$$

Die Halbachsen a_1 und b_1 des confocalen Kegelschnittes, welcher durch den Punkt $m = (xy)$ geht, und die Coordinaten des Schnittpunktes selbst nehmen durch Einführung dieses Werthes folgende Form an:

$$tng\, a_1 = \sqrt{\frac{tng^4\, a - tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}{tng^2\, a + tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}},\quad tng\, b_1 = tng\, b\sqrt{\frac{tng^2\, a - tng^2\, \varrho_1}{tng^2\, a + tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}},$$

$$x = \pm\frac{tng\, a}{tng\, e}\sqrt{\frac{tng^4\, a - tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}{tng^2\, a + tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}},\quad y = \pm\frac{tng^2\, b}{sin\, e}\sqrt{\frac{tng^2\, \varrho_1 - tng^2\, a}{tng^2\, a + tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}}.$$

Der Bogen CP, welcher durch die Normale des Punktes $m = (xy)$ auf der kleinen Achse begrenzt wird, ergiebt sich nach 7*) aus der Gleichung

$$tng\, CP = \frac{tng^2\, b_1}{y},$$

und wenn man aus dieser die Grösse y entfernt, so ist

$$tng\, CP = \frac{tng\, b_1\, sin\, e\sqrt{-1}}{tng\, b} = -\, sin\, e\sqrt{\frac{tng^2\, \varrho_1 - tng^2\, a}{tng^2\, a + tng^2\, b\; tng^2\, \varrho_1}}.$$

Der Kreis K_1, welcher um den Punkt P mit dem Halbmesser ϱ_1 beschrieben wird, berührt die Ellipse in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1, deren Coordinaten zu den obenstehenden Werthen x und y gehören. Der Hauptbogen, welcher durch

diese Punkte geht, schneidet also auf der kleinen Achse einen Bogen CK ab, für welchen

$$37)\quad tng\, CK = \frac{tng\, b\; tng\, b_1}{sin\, e\sqrt{-1}} = \frac{tng^2 b}{sin\, e}\cdot\sqrt{\frac{tng^2 \varrho_1 - tng^2 a}{tng^2 a + tng^2 b\; tng^2 \varrho}}.$$

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt nun sogleich

$$38)\quad tng\, CP\,.\, tng\, CK = tng^2 b_1,$$

d. h. **der Mittelpunkt eines Kreises, welcher einen sphärischen Kegelschnitt in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, ist in Bezug auf den confocalen Kegelschnitt, welcher durch die Berührungspunkte geht, der Pol des Hauptkreises, in welchem die Berührungspunkte liegen.**

Der Halbmesser ϱ_1 des doppelt berührenden Kreises K_1 erreicht seinen kleinsten Werth, nämlich

$$\varrho_1 = a,$$

wenn

$$a_1 = e,\; b_1 = 0,\; x = \pm\, tng\, a,\; y = 0,$$
$$CP = 0,\; CK = 0,$$

mithin berührt der kleinste Kreis die Ellipse in den Scheiteln der grossen Achse. Der kleinste Werth von ϱ_1, für welchen die Berührungspunkte des Kreises K_1 real sind, genügt der Gleichung

$$tng\, \varrho_1 = \frac{tng^2 a}{tng\, b}$$

und zugleich ist

$$a_1 = 0,\; tng\, b_1 = sin\, e\sqrt{-1},\; x = 0,\; y = \pm\, tng\, b,$$
$$tng\, CP = -\frac{sin^2 e}{tng\, b},\; CK = b;$$

es fallen also die beiden Berührungspunkte dieses Kreises in einen Scheitel der kleinen Achse zusammen und der oben angegebene Werth von ϱ_1 ist der zugehörige Krümmungshalbmesser. Wenn endlich der doppelt berührende Kreis K_1 in einen Hauptkreis übergeht, also

$$\varrho_1 = \tfrac{1}{2}\pi$$

gesetzt wird, so ist

$$tng\, a_1 = \sqrt{-1},\; tng\, b_1 = \sqrt{-1},\; x = \frac{tng\, a}{tng\, e}\cdot\sqrt{-1},\; y = \pm\frac{tng\, b}{sin\, e},$$
$$tng\, CP = -\frac{sin\, e}{tng\, b},\; tng\, CK = \frac{tng\, b}{sin\, e}.$$

Dieser Hauptkreis ist die Grenzform der Kreise, welche einen Kegelschnitt in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten berühren und entspricht in dieser Beziehung den Brennpunkten, welche die Grenze der inneren Berührungskreise sind.

§. 10.

Der Hauptbogen $r_1 = nP$, welcher einen beliebigen Punkt $n = (x_1 y_1)$ in der Ellipse 1) mit dem Punkte $P = \left(0, \frac{tng^2 b_1}{y}\right)$ in der kleinen Achse verbindet, ergiebt sich aus der Gleichung

$$cos\, r_1 = \frac{1 + \frac{y_1}{y} \cdot tng^2 b_1}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}\sqrt{1 + \frac{tng^4 b_1}{y^2}}}.$$

Dazu ist nach Gleichung 6)

$$1 + \frac{tng^4 b_1}{y^2} = \frac{tng^4 b + y^2 sin^4 e}{tng^4 b}$$

und

$$1 + \frac{y_1}{y} \cdot tng^2 b_1 = \frac{tng^2 b - y y_1 sin^2 e}{tng^2 b};$$

weil ferner der Punkt $n = (x_1 y_1)$ in der Ellipse 1) liegt, so ist auch

$$1 + x_1^2 + y_1^2 = \frac{tng^2 b - y_1^2 sin^2 e}{tng^2 b\, cos^2 a},$$

und durch Einsetzung dieser Werthe entsteht aus der obigen Gleichung

$$cos\, r_1 = \frac{tng\, b\, cos\, a\, (tng^2 b - y y_1 sin^2 e)}{\sqrt{tng^2 b - y_1^2 sin^2 e}\sqrt{tng^4 b + y^2 sin^4 e}}.$$

Denkt man sich nun, dass der Punkt n mit dem Punkte $m = (xy)$ zusammenfällt, also der Bogen r_1 in den Halbmesser ϱ_1 übergeht, so erhält man als besondern Fall der vorstehenden Gleichung

$$cos\, \varrho_1 = tng\, b\, cos\, a \sqrt{\frac{tng^2 b - y^2 sin^2 e}{tng^4 b + y^2 sin^4 e}},$$

und durch Verbindung dieser Werthe

$$\frac{cos\, r_1}{cos\, \varrho_1} = \frac{tng^2 b - y y_1 sin^2 e}{\sqrt{tng^2 b - y_1^2 sin^2 e}\sqrt{tng^2 b - y^2 sin^2 e}}.$$

Um die Umformung dieses Ausdruckes in ähnlicher Weise wie oben im §. 7 durchführen zu können, setze ich zunächst die imaginäre Halbachse der Hyperbel 2)

$$b_1 = \beta_1 \sqrt{-1}$$

und weiter in der Bezeichnung Gudermann's (vergl. Potenzial-Functionen in Crelle's Journal 6. 7. 8 und 9)

$$tng\, b_1 = \sqrt{-1} \cdot Tng\, \beta_1.$$

Nun ist nach dieser und den Gleichungen 6) zuerst

$$Sin\, \beta_1 = \frac{y\, sin\, e}{\sqrt{tng^2 b - y^2 sin^2 e}}, \quad Cos\, \beta_1 = \frac{tng\, b}{\sqrt{tng^2 b - y^2 sin^2 e}},$$

und dann diesen Werthen entsprechend zu setzen

$$Tng\, \psi_1 = \frac{y_1\, sin\, e}{tng\, b},$$

also

$$Sin\,\psi_1 = \frac{y_1 \sin e}{\sqrt{tng^2 b - y_1^2 \sin^2 e}},\quad Cos\,\psi_1 = \frac{tng\,b}{\sqrt{tng^2 b - y_1^2 \sin^2 e}}.$$

Wenn man endlich diese Werthe in die obige Gleichung einsetzt und beachtet, dass das Verhältniss $\cos \varrho_1 : \cos r_1$ der Cosinus der kleinsten Halbsehne ist, welche durch den Punkt $n = (x_1 y_1)$ in dem um P mit dem Halbmesser ϱ_1 beschriebenen Kreise K_1 gezogen werden kann, und diese Halbsehne mit t bezeichnet, so ist

$$\frac{1}{\cos t} = Cos\,\beta_1\,Cos\,\psi_1 - Sin\,\beta_1\,Sin\,\psi_1.$$

Hieraus folgt weiter

$$Cos\,Lt = Cos\,(\beta_1 - \psi_1)$$

oder

39) $$Lt = \pm\,(\beta_1 - \psi_1).$$

Weil nun β_1 und ψ_1 (abgesehen von dem Factor $\sqrt{-1}$) die imaginären Halbachsen der Hyperbeln sind, welche mit der Ellipse 1) die Brennpunkte gemeinsam haben und durch die Punkte $m = (xy)$ und $n = (x_1 y_1)$ gehen, und da ferner die eine dieser Halbachsen negativ ist, wenn die Punkte m und n auf verschiedenen Seiten der grossen Achse liegen, so hat auch jeder äussere Berührungskreis einer Ellipse folgende Eigenschaft:

Wird eine sphärische Ellipse von einem Kreise in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1 berührt und durch einen beliebigen Punkt n der Ellipse in diesem Kreise eine kleinste Halbsehne gezogen, so ist die Längenzahl dieser Linie gleich der Summe oder Differenz der imaginären Halbachsen der Hyperbeln, welche mit der Ellipse confocal sind und sie in den Punkten m und n schneiden, je nachdem diese Punkte auf verschiedenen oder derselben Seite der grossen Achse liegen.

Setzt man insbesondere $\beta = 0$, also auch $y = 0$, so vereinfacht sich die obige Gleichung in

$$Lt = \psi_1 \text{ oder } t = l\psi_1$$

und giebt dann eine Eigenschaft an, welche den über der grossen Achse als Durchmesser beschriebenen Kreis auszeichnet, nämlich:

Die kleinste Halbsehne, welche durch einen beliebigen Punkt einer Ellipse in dem über der grossen Achse beschriebenen Kreise gezogen werden kann, ist gleich der Longitudinalzahl der imaginären Halbachse der Hyperbel, welche durch jenen Punkt geht und mit der Ellipse confocal ist.

Lässt man zweitens den Punkt $n = (x_1 y_1)$ in einen Scheitel der grossen Achse fallen, so wird $y_1 = 0$ also auch $\psi_1 = 0$, folglich ist

$$Lt = \beta_1 \text{ oder } t = l\beta_1,$$

d. h.: **Zieht man in einem Kreise, welcher eine Ellipse in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, eine kleinste Halbsehne durch einen Scheitel der grossen Achse, so ist die Längenzahl dieser Linie gleich der imaginären Halbachse der Hyperbel, welche mit der Ellipse confocal ist und durch jene symmetrischen Punkte geht.**

Ich setze jetzt voraus, dass die Ellipse 1) von zwei Kreisen in je zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten m, m_1 und p, p_1 berührt und die imaginären Halbachsen der Hyperbeln, welche mit der Ellipse confocal sind und durch die Punkte m und p gehen, mit $\beta_1 \sqrt{-1}$ und $\beta_2 \sqrt{-1}$ bezeichnet werden, und ziehe dann durch einen beliebigen Punkt n der Ellipse in diesen Kreisen die kleinsten Halbsehnen t und t_1. Nach der Gleichung 39) ist

$$Lt = \pm(\beta_1 - \psi_1) \text{ und } Lt_1 = \pm(\beta_2 - \psi_1),$$

folglich

$$Lt \pm Lt_1 = \pm(\beta_1 \pm \beta_2). \qquad 40)$$

Hierdurch ist entsprechend dem Satze 32) für die sphärischen Kegelschnitte folgende Eigenschaft nachgewiesen:

Zieht man durch einen beliebigen Punkt n einer Ellipse in zwei Kreisen, welche dieselbe in je zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten m, m_1 und p, p_1 berühren, die kleinsten Halbsehnen, so ist die Summe oder Differenz der Längenzahlen dieser Bogen constant, je nachdem der Punkt n zwischen den Hauptbogen mm_1 und pp_1 liegt oder nicht.

§. 11.

Nach dem vorhergehenden § ist

$$\mathit{Sin}\, Lt = \pm \mathit{Sin}(\beta_1 - \psi_1) = \pm \mathit{Cos}\,\beta_1\, \mathit{Cos}\,\psi_1\,(\mathit{Tng}\,\beta_1 - \mathit{Tng}\,\psi_1)$$

oder

$$tng\, t = \pm \frac{\mathit{Cos}\,\beta_1\, \mathit{Cos}\,\psi_1 \sin e}{tng\, b}(y - y_1).$$

Wenn dazu auf den Hauptbogen, in welchem die beiden Berührungspunkte des Kreises K_1, nämlich $m = (x, y)$ und $m_1 = (x, y)$ liegen, von dem Punkte $n = (x_1 y_1)$ eine Senkrechte s gefällt wird, so ist diese nach §. 13 der analytischen Sphärik durch die Gleichung

$$\sin s = \pm \frac{y - y_1}{\sqrt{1+y^2}\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}} = \pm \frac{\cos a\, \mathit{Cos}\,\psi_1}{\sqrt{1+y^2}} \cdot (y - y_1)$$

bestimmt. Durch die Verbindung dieser Gleichungen entsteht

$$\frac{tng\, t}{\sin s} = \frac{\sin e\, \mathit{Cos}\,\beta_1}{tng\, b \cos a}\sqrt{1+y^2},$$

oder weil

$$\frac{\sin e}{tng\, b \cos a} = \frac{tng\, e}{\sin b} \text{ und } \mathit{Cos}\,\beta_1 = \frac{tng\, b}{\sqrt{tng^2 b - y^2 \sin^2 e}},$$

$$41) \qquad \frac{tng\, t}{sin\, s} = \frac{tng\, e}{cos\, b} \sqrt{\frac{1 + y^2}{tng^2\, b - y^2 \, sin^2\, e}}.$$

Da in dieser Gleichung die rechte Seite von der Lage des Punktes $n = (x_1 y_1)$ unabhängig ist, so ergiebt sich daraus für die sphärischen Ellipsen folgender Satz:

Wird eine Ellipse von einem Kreise in zwei gegen die kleine Achse symmetrisch gelegenen Punkten m und m_1 berührt, durch einen beliebigen Punkt derselben in diesem Kreise eine kleinste Halbsehne gezogen und von demselben Punkte auf den Hauptbogen, in welchem die Berührungspunkte m, m_1 liegen, eine Senkrechte gefällt, so steht die Tangente der Halbsehne zu dem Sinus dieser Senkrechten in einem constanten Verhältnisse.

Auch dies Verhältniss ist von dem Halbmesser des doppelt berührenden Kreises abhängig, und der Zusammenhang tritt deutlich hervor, wenn man die Grösse y mittels des im §. 9 angegebenen Werthes aus der Gleichung 41) eliminirt. Dadurch erhält man:

$$\frac{tng\, t}{sin\, s} = \frac{tng\, e}{sin\, b} \cdot \sqrt{1 + \frac{tng^2\, \varrho_1 - tng^2\, a}{tng^2\, a - tng^2\, b} \cdot tng^2\, b}$$

und hiernach ist das Verhältniss $tng\, t : sin\, s$ desto grösser, je grösser der doppelt berührende Kreis ist. Es erreicht sein Minimum, wenn ϱ_1 am kleinsten oder

$$\varrho_1 = a,$$

und zwar ist unter dieser Voraussetzung

$$\frac{tng\, t}{sin\, s} = \frac{tng\, e}{sin\, b}.$$

Desgleichen ist für die beiden Kreise, welche die Ellipse 1) in einem Scheitel der kleinen Achse doppelt berühren, oder wenn

$$tng\, \varrho_1 = \frac{tng^2\, a}{tng\, b}$$

gesetzt wird,

$$\frac{tng\, t}{sin\, s} = \frac{tng\, e}{sin\, b} \cdot \frac{1}{cos\, a}.$$

Wenn endlich der doppelt berührende Kreis in einen Hauptkreis übergeht, so wird die kleinste Halbsehne $t = \frac{1}{2}\pi$ und das Verhältniss $tng\, t : sin\, s$ nach der vorstehenden Gleichung unendlich. Je nachdem nun

$$tng\, a < tng\, \varrho_1 < \frac{tng^2\, a}{tng\, b},$$

oder

$$\frac{tng^2\, a}{tng\, b} < tng\, \varrho_1 < \infty,$$

ist auch

$$\frac{tng\,e}{\sin b} < \frac{tng\,t}{\sin s} < \frac{tng\,e}{\sin b \cos a},$$

oder

$$\frac{tng\,e}{\sin b \cos a} < \frac{tng\,t}{\sin s} < \infty.$$

§. 12.

In dem zuletzt erwähnten besonderen Falle, wo der Halbmesser ϱ_1 des doppelt berührenden Kreises ein Quadrant ist, verlieren sowohl die Resultate des letzten §, als auch die des vorhergehenden ihre Bedeutung, indem mehrere darin vorkommenden Grössen unendlich werden. Dennoch sind die beiden Hauptkreise, welche die Ellipse 1) in zwei imaginären Punkten berühren, von besonderem Interesse. Bezeichnet man die Mittelpunkte derselben mit G und G_1 und die gleiche Entfernung beider vom Mittelpunkte C der Ellipse mit γ, so ist nach §. 9

$$tng\,\gamma = \frac{\sin e}{tng\,b},$$

folglich

42) $$\cos\gamma = \frac{\sin b}{\sin a} = \frac{\cos(\frac{1}{2}\pi - b)}{\cos(\frac{1}{2}\pi - a)},$$

und hiernach sind die Punkte G und G_1 die Brennpunkte des Kegelschnittes 26).

Werden also um die Brennpunkte eines Kegelschnittes Hauptkreise beschrieben, so berühren diese den reciproken Kegelschnitt in je zwei imaginären Punkten.

Mit Hilfe dieses Satzes kann man nun jeder Eigenschaft, welche sich auf die Brennpunkte eines sphärischen Kegelschnittes bezieht, sogleich eine andere, in welcher die denselben doppelt berührenden Hauptkreise vorkommen, gegenüber stellen. Ich glaube jedoch ein näheres Eingehen auf diese Eigenschaften dem Leser überlassen zu müssen, um so mehr, da die wichtigsten schon vor längerer Zeit (im zweiten Bande des Crelle'schen Journals) von Gudermann ausgesprochen und in seiner analytischen Sphärik §. 85 und 86 entwickelt und von Herrn Chasles in der *Géométrie superieure* C. 34 reproducirt worden sind. Dem letzteren verdankt man den Nachweis, dass die Hauptkreise um die Mittelpunkte G und G_1 die Stellung der beiden Ebenen-Scharen angeben, welche den Kegel, dessen Spitze im Mittelpunkte der Kugel liegt und dessen Mantel die Kugelfläche in der Ellipse 1) durchdringt, in Kreisen schneiden, oder dass die Punkte G und G_1 für den durch die Ellipse 1) dargestellten Kegel die Kreisschnittspole sind.

Aber die Grenzformen der doppelt berührenden Kreise, d. h. die Brennpunkte und die doppelt berührenden Hauptkreise, stehen nicht allein an den Kegelschnitten 1) und 26) in dem Zusammenhange der Reciprocität; diese zeigt sich vielmehr ganz allgemein. Wird die Ellipse 1) von einem

Kreise in zwei gegen die $\left\{ \begin{matrix} \text{grosse} \\ \text{kleine} \end{matrix} \right\}$ Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, so wird auch die reciproke Ellipse 26) von dem reciproken Kreise in zwei gegen die $\left\{ \begin{matrix} \text{kleine} \\ \text{grosse} \end{matrix} \right\}$ Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt.

Auch dieser Zusammenhang giebt nun wieder Gelegenheit dazu, die in dem Vorhergehenden entwickelten Eigenschaften der doppelt berührenden Kreise zu verdoppeln; doch auch diese Vervollständigung mag dem Leser überlassen bleiben. Nur eine Eigenschaft der Kreisschnittspole G und G_1 will ich hier noch hinzufügen.

Verbindet man einen beliebigen Punkt $n = (x_1 y_1)$ des Kegelschnittes 1) mit den Brennpunkten G und G_1 des reciproken Kegelschnittes 26), so ist

$$\cos n G = \frac{1 + \frac{\sin e}{\operatorname{tng} b} \cdot y_1}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2} \sqrt{1 + \frac{\sin^2 e}{\operatorname{tng}^2 b}}}$$

und hieraus ergiebt sich durch einige Umformungen

$$\cos n G = \frac{\sin b}{\operatorname{tng} a} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{tng} b + y_1 \sin e}{\operatorname{tng} b - y_1 \sin e}}.$$

Ebenso ist

$$\cos n G_1 = \frac{\sin b}{\operatorname{tng} a} \cdot \sqrt{\frac{\operatorname{tng} b - y_1 \sin e}{\operatorname{tng} b + y_1 \sin e}},$$

folglich

$$\cos n G \,.\, \cos n G_1 = \frac{\sin^2 b}{\operatorname{tng}^2 a};$$

oder: Verbindet man einen beliebigen Punkt eines Kegelschnittes mit den Brennpunkten des reciproken Kegelschnittes, so ist das Produkt aus den Cosinus dieser Verbindungslinien constant.

Auch das Verhältniss dieser Cosinus nimmt eine einfache Form an, denn es ist

$$\frac{\cos n G}{\cos n G_1} = \frac{\operatorname{tng} b + y_1 \sin e}{\operatorname{tng} b - y_1 \sin e}$$

und da

$$\frac{\sin e}{\operatorname{tng} b} y_1 = \operatorname{Tng} \psi_1,$$

so ist

$$\frac{\cos n G}{\cos n G_1} = \frac{1 + \operatorname{Tng} \psi_1}{1 - \operatorname{Tng} \psi} = \frac{\operatorname{Cos} \psi_1 + \operatorname{Sin} \psi_1}{\operatorname{Cos} \psi_1 - \operatorname{Sin} \psi_1}$$

oder

44) $$\frac{\cos n G}{\cos n G_1} = e^{2\psi},$$

wo e, wie gewöhnlich, die Basis des natürlichen Logarithmensystems und 2ψ die imaginäre Achse der confocalen Hyperbel, welche durch den Punkt $(x_1 y_1)$ geht, bezeichnet.

§. 13.

Der Kegelschnitt 1), welcher bisher als sphärische Ellipse den Gegenstand der Untersuchung bildete, erscheint als sphärische Hyperbel, wenn man sich auf die Punkte beschränkt, welche in einer Halbkugelfläche um den Mittelpunkt D oder E (Fig. 2 Taf. IV) liegen. Bei dieser Auffassung giebt es dann ausser den beiden Kreisscharen, welche den Kegelschnitt 1) in zwei gegen die grosse oder kleine reale Achse symmetrisch gelegenen Punkten berühren, noch eine dritte Schar von doppelt berührenden Kreisen und jeder von diesen berührt denselben in zwei Punkten, welche gegen die dritte Achse DE symmetrisch liegen. Beschreibt man z. B. um den Punkt R, wo die Normale des Punktes $m = (xy)$ in die dritte Achse einschneidet, mit dem Halbmesser mR einen Kreis K_2, so berührt dieser den Kegelschnitt 1) in dem Punkte $m = (xy)$ und in einem Punkte m_1, welcher mit m gegen diese Achse symmetrisch liegt.

Der Halbmesser ϱ_2 dieses Kreises ist nach §. 2 durch die Gleichung

$$45)\qquad tng\,\varrho_2 = \frac{tng\,\mu}{tng\,a\;tng\,b}$$

zu bestimmen. Durch Anwendung dieses Werthes erhält man für die Halbachsen des confocalen Kegelschnittes 2) und für die Coordinaten des Punktes, wo dieser den ursprünglichen Kegelschnitt schneidet, folgende Ausdrücke:

$$tng\,a_1 = tng\,a\,.\sqrt{\frac{1-tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}{1+tng^2 a\;tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}},\quad tng\,b_1 = tng\,b\,.\sqrt{\frac{1-tng^2 a\;tng^2 \varrho_2}{1+tng^2 a\;tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}},$$

$$x = \pm\frac{tng^2 a}{tng\,e}\,.\sqrt{\frac{1-tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}{1+tng^2 a\;tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}},\quad y = \pm\frac{tng^2 b}{sin\,e}\,.\sqrt{\frac{tng^2 a\;tng^2 \varrho_2 - 1}{1+tng^2 a\;tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}}.$$

Um nun auch den Bogen, welcher durch den Mittelpunkt R des doppelt berührenden Kreises K_2 auf der Achse DE begrenzt wird, auszudrücken, denke ich mir von einem beliebigen Punkte (uv) auf die Achse CD eine Senkrechte l gefällt, und setze nach §. 13 der analytischen Sphärik

$$sin\,l = \frac{v}{\sqrt{1+u^2+v^2}},\quad tng\,l = \frac{v}{\sqrt{1+u^2}}.$$

Wenn aber der Punkt (uv) in der Achse DE liegt, so ist $u = \infty$ und $v = \infty$, mithin geht $tng\,l$ in den Grenzwerth von $\frac{v}{u}$ über. Hier soll nun R der Punkt (uv) sein, und für diesen ergiebt sich nach der Gleichung 8) in §. 2 an der Grenze, wo v und u unendlich sind, der Werth

$$\frac{v}{u} = \frac{y\,sin^2 a}{x\,sin^2 b};$$

mithin ist

$$46)\qquad tng\,DR = cos\,e\,.\sqrt{\frac{tng^2 a\;tng^2 \varrho_2 - 1}{1-tng^2 b\;tng^2 \varrho_2}}.$$

In derselben Weise erhält man für den Bogen DJ, welcher durch den Hauptkreis Cm, oder

$$\frac{u}{x} - \frac{v}{y} = 0$$

auf der Achse DE abgeschnitten wird, die Gleichung

$$47)\qquad tng\, DJ = \frac{tng^2 b}{tng^2 a \cos e} \cdot \sqrt{\frac{tng^2 a\, tng^2 \varrho_2 - 1}{1 - tng^2 b\, tng^2 \varrho_2}}.$$

Durch die Verbindung dieser Werthe entsteht

$$tng\, DR \,.\, tng\, DJ = \frac{tng^2 b}{tng^2 a} \cdot \frac{tng^2 a\, tng^2 \varrho_2 - 1}{1 - tng^2 b\, tng^2 \varrho_2} = - \frac{tng^2 b_1}{tng^2 a_1}.$$

Setzt man nun noch

$$\frac{tng^2 b_1}{tng^2 a_1} = - tng^2 c_1,$$

so ist

$$48)\qquad tng\, DR \,.\, tng\, DJ = tng^2 c_1;$$

dazu ist nach §. 76 der analytischen Sphärik c_1 die kleine reale Halbachse des Kegelschnittes 2) bezogen auf die Coordinatenachsen DC und DE. Mithin haben auch diese doppelt berührenden Kreise, deren Mittelpunkte in der dritten Achse liegen, folgende Eigenschaft:

Der Mittelpunkt eines Kreises, welcher einen sphärischen Kegelschnitt in zwei gegen die imaginäre Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, ist in Bezug auf den confocalen Kegelschnitt, welcher durch die Berührungspunkte geht, der Pol des Hauptkreises, in welchem die Berührungspunkte liegen.

Aus dem oben für $tng\, DR$ entwickelten Werthe erkennt man ferner, dass von dem kleinsten Kreise, welcher den Kegelschnitt 1) in zwei gegen die imaginäre Achse symmetrisch gelegenen Punkten berührt, der Halbmesser

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{2}\pi - a.$$

Zugleich ist dann

$$a_1 = e,\ b_1 = 0,\ x = \pm\, tng\, a,\ y = 0$$
$$DR = 0,\ DJ = 0;$$

der confocale Kegelschnitt 2) besteht also aus den beiden Brennpunkten des ursprünglichen, der Mittelpunkt des berührenden Kreises ist D und der eine Berührungspunkt desselben der Scheitel A.

Vor dem grössten doppelt berührenden Kreise dagegen ist der Halbmesser

$$\varrho_2 = \tfrac{1}{2}\pi - b,$$

mithin

$$a_1 = 0,\ tng\, b_1 = \sin e \,.\, \sqrt{-1},\ x = 0,\ y = \pm\, tng\, b$$
$$DR = \tfrac{1}{2}\pi,\ DJ = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Hiernach fällt der confocale Kegelschnitt 2) unter dieser Voraussetzung mit den imaginären Brennpunkten des Kegelschnittes 1) zusammen, der Mittelpunkt des berührenden Kreises ist E und der Scheitel B der eine Berührungspunkt.

Wenn nun

$$\tfrac{1}{2}\pi - a < \varrho_2 < \tfrac{1}{2}\pi - b,$$

so findet zwischen dem berührenden Kreise K_2 und dem Kegelschnitt 1) eine Berührung in zwei realen Punkten statt; wenn dagegen

$$\varrho_2 < \tfrac{1}{2}\pi - a \text{ oder } \varrho_2 > \tfrac{1}{2}\pi - b,$$

so werden die Berührungspunkte und auch der Mittelpunkt des doppelt berührenden Kreises imaginär.

Jeder Punkt des Hauptkreises DE kann als Mittelpunkt eines doppelt berührenden Kreises angesehen werden, während in der grossen Achse des Kegelschnittes 1) der Mittelpunkt des doppelt berührenden Kreises sich nur um die Excentricität des Kegelschnittes 1) und in der kleinen Achse nur um die Excentricität des reciproken Kegelschnittes 26) von dem Mittelpunkte entfernen kann.

§. 14.

Verbindet man einen beliebigen Punkt $n = (x_1 y_1)$ des Kegelschnittes 1) mit dem Punkte $R = (uv)$ durch den Hauptbogen $nR = r_2$, so ist

$$\cos r_2 = \frac{1 + u x_1 + v y_1}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}\sqrt{1 + u^2 + v^2}}.$$

Wenn aber der Punkt R in der dritten Achse DE liegt, so ist $u = \infty$ und $v = \infty$, mithin

$$\frac{1 + u x_1 + v y_1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} = \frac{x_1 + \frac{v}{u} \cdot y_1}{\sqrt{1 + \frac{v^2}{u^2}}}.$$

Ausserdem ist aber R auch ein Punkt der Normale 8) und daher zunächst

$$\frac{v}{u} = \frac{y \sin^2 a}{x \sin^2 b},$$

also

$$\frac{1 + u x_1 + v y_1}{\sqrt{1 + u^2 + v^2}} = \frac{x x_1 \sin^2 b + y y_1 \sin^2 a}{\sqrt{x^2 \sin^4 b + y^2 \sin^4 a}}.$$

Wenn man noch hinzunimmt, dass

$$1 + x_1^2 + y_1^2 = \frac{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}{\sin^2 a \sin^2 b},$$

so entsteht

$$\cos r_2 = \frac{\sin a \sin b\,(x x_1 \sin^2 b + y y_1 \sin^2 a)}{\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}\sqrt{x^2 \sin^4 b + y^2 \sin^4 a}}.$$

In dem speciellen Falle, wo der Punkt $n = (x_1 y_1)$ mit dem Punkte $m = (xy)$ zusammenfällt, geht der Bogen r_2 in den Halbmesser ϱ_2 des doppelt berührenden Kreises K_2 über und für $\cos \varrho_2$ entsteht die Gleichung

$$\cos \varrho_2 = \sin a \sin b \cdot \sqrt{\frac{x^2 \sin^2 b + y^2 \sin^2 a}{x^2 \sin^4 b + y^2 \sin^4 a}}.$$

Hiernach ist nun

$$\frac{\cos r_2}{\cos \varrho_2} = \frac{x x_1 \sin^2 b + y y_1 \sin^2 a}{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2 \sin^2 a}\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}};$$

dazu ist aber nach dem vorhergehenden § für die kleine reale Halbachse c_1 des Kegelschnittes 2)

$$tng\, c_1 = \frac{y \sin a}{x \sin b},$$

folglich auch

$$\sin c_1 = \frac{y \sin a}{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2 \sin^2 a}},\quad \cos c_1 = \frac{x \sin b}{\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2 \sin^2 a}}.$$

Nach Analogie dieser Ausdrücke setze man

$$tng\, \chi_1 = \frac{y_1 \sin a}{x_1 \sin b},$$

$$\sin \chi_1 = \frac{y_1 \sin a}{\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}},\quad \cos \chi_1 = \frac{x_1 \sin b}{\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}},$$

indem man die kleine reale Halbachse des Kegelschnittes, welcher mit dem Kegelschnitte 1) confocal ist und durch den Punkt $n = (x_1 y_1)$ geht, mit χ_1 bezeichnet.

Wenn man nun noch von dem Punkte $n = (x_1 y_1)$ an den Kreis K_2 eine Berührende t zieht und beachtet, dass

$$\cos t = \frac{\cos r_2}{\cos \varrho_2},$$

und die vorstehenden Werthe in die obige Gleichung einsetzt, so erhält man

$$\cos t = \cos c_1 \cos \chi_1 + \sin c_1 \sin \chi_1,$$

oder

49) $$t = \pm (c_1 - \chi_1).$$

Diese Gleichung zeigt, dass auch in Bezug auf die dritte Schar von doppelt berührenden Kreisen die sphärischen Kegelschnitte dieselben Eigenschaften haben, welche im §. 7 für die erste Schar aus den Gleichungen 31) und 32) sich ergaben, und es mag deshalb hier genügen, auf die dort ausgesprochenen Sätze zu verweisen.

§. 15.

Es ist noch übrig, auch für die doppelt einen Kegelschnitt berührenden Kreise, deren Mittelpunkte in der dritten Achse liegen, die Eigenschaften zu ermitteln, welche den im §. 8 und 11 entwickelten Sätzen entsprechen.

Nach dem vorigen §. ist

$$\sin t = \pm (\sin c_1 \cos \chi_1 - \cos c_1 \sin \chi_1)$$
$$= \pm \frac{(x_1 y - x y_1) \sin a \sin b}{\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}\sqrt{x^2 \sin^2 b + y^2 \sin^2 a}}.$$

Wird nun von dem Punkte $n = (x_1 y_1)$ auf den Hauptbogen Cm, dessen Gleichung

$$\frac{u}{x}=\frac{v}{y}$$

ist, eine Senkrechte s gefällt, so ist nach der schon mehrmals benutzten Formel

$$\sin s = \pm \frac{x_1 y - x y_1}{\sqrt{1+x_1^2+y_1^2}\sqrt{x^2+y^2}}$$
$$= \pm \frac{(x_1 y - x y_1)\sin a \sin b)}{\sqrt{x_1^2 \sin^2 b + y_1^2 \sin^2 a}\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Durch die Vergleichung dieser Werthe von $\sin t$ und $\sin s$ entsteht sogleich

50) $$\frac{\sin t}{\sin s}=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{x^2\sin^2 b + y^2 \sin^2 a}}.$$

Auch hier ist wieder das Verhältniss $\sin t : \sin s$ von der Lage des Punktes $n=(x_1 y_1)$ unabhängig eben so, wie es die Gleichungen 33) und 41) für die Kreise der beiden ersten Scharen angeben, und abhängig von der Lage des Berührungspunktes des doppelt berührenden Kreises oder seines Halbmessers.

Um diesen Zusammenhang deutlicher zu erkennen, setze man in die vorstehende Gleichung für x und y die im vorigen §. angegebenen Werthe ein. Dadurch entsteht

$$\frac{\sin t}{\sin s}=\sqrt{1+\cot^2 a+\cot^2 b-\operatorname{tng}^2 \varrho_2},$$

und mithin ist das Verhältniss $\sin t : \sin s$ desto grösser, je kleiner ϱ_2 ist.

Wenn insbesondere der Halbmesser ϱ_2 seinen grössten Werth, d. i. $\frac{1}{2}\pi - b$ annimmt, so ist

$$\frac{\sin t}{\sin s}=\frac{1}{\sin a};$$

und wenn dagegen ϱ_2 am kleinsten oder gleich $\frac{1}{2}\pi - a$ ist, so erreicht $\sin t : \sin s$ sein Maximum oder

$$\frac{\sin t}{\sin s}=\frac{1}{\sin b}.$$

Diese Grenzwerthe und eben so die allgemeine Gleichung zeigen, dass für alle doppelt berührenden Kreise, welche zu der dritten Schar gehören, die von einem Punkte des Kegelschnittes an dieselben gezogene Berührende grösser ist, als die Entfernung desselben Punktes von dem Hauptkreise, welcher durch die beiden Berührungspunkte geht.

VIII.

Ueber Magnetismus.

Von Gustav Roch,
Stud. mathem. in Leipzig.

(Fortsetzung von Nr. XIII, Jahrg. 1859.)

---

22. Einige der in dem angeführten Aufsatze entwickelten Gesetze gelten, wie auch schon angegeben wurde, nicht unter allen Umständen. Ist k das Verhältniss des von den magnetischen Strömen wirklich umschlossenen Volumens zu dem ganzen Volumen, so stand zunächst der Fall $k=1$ als Ausnahmefall da. Die Gleichungen 11) sind zwar auch dann vermöge der Schlussbemerkung von Nr. 21 als begründet anzusehen*), aber die für die Lösung der Bedingungsgleichung des Gleichgewichts so nöthige Gleichung 16) ist als unbegründet anzusehen. Wohl aber bleiben wieder die Gleichungen 18) in Richtigkeit, wenn nicht in 17) $C=0$ angenommen wird. Es müssen daher die Gleichungen 20) ihre Richtigkeit behalten, es wird also die Intensität der Ströme constant sein im Verlaufe jeder von den Stromebenen umhüllten Fläche. Dann hat u den Werth

35) $$u = -4\pi k i_1 + C, \quad k=1.$$

Ueber die Vertheilung der Intensität aber ist gar keine Regel vorläufig aufzustellen, wenn das magnetische Gleichgewicht eintritt, welches $C=0$ macht in 17) oder 35). Ist nicht $k=1$, so ist dies ganz einflusslos auf die Lösung der Aufgaben. Da die Gleichung 16) nicht giltig ist für $k=1$, so ist auch keine Reihenentwickelung von φ vermöge der Formeln 33) und 34) möglich; ausserdem ist der Werth von 9) dann zusammengesetzt aus einem Doppelintegrale und einem dreifachen Integrale [s. 8) und 9)]. Ich will daher zunächst eine andere Form für 9) entwickeln, die unter allen Umständen nur aus einem Doppelintegral und zwar von äusserst einfacher Form besteht. Nach Nr. 8) ist

---

*) Anstatt der Worte: „wenn nicht eben $k=1$", in p. 431, Zeile 8 v. o. Jahrg. 1859, ist zu lesen: „selbst wenn $k=1$".

$$q = -k \iiint \left(i\alpha \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x} + i\beta \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} \right) dx\, dy\, dz.$$

Oder

$$q = +k \iiint \left(i\alpha \frac{\partial r}{\partial x} + i\beta \frac{\partial r}{\partial y} + i\gamma \frac{\partial r}{\partial z} \right) \frac{1}{r^2}\, dx\, dy\, dz.$$

Sieht man nun die Coordinaten x, y, z als Functionen an von r und den Polarwinkeln ψ und ϑ, so dass

$$x - x_1 = r \cos \varphi; \; y - y_1 = r \sin \psi \cos \vartheta; \; z - z_1 = r \sin \psi \sin \vartheta,$$

so sind die drei Grössen

$$\frac{\partial x}{\partial r}, \; \frac{\partial y}{\partial r}, \; \frac{\partial z}{\partial r}$$

identisch mit den im letzten Ausdrucke für q vorkommenden Differentialquotienten

$$\frac{\partial r}{\partial x}, \; \frac{\partial r}{\partial y}, \; \frac{\partial r}{\partial z}.$$

Berücksichtigt man nun Gleichung 11), so folgt:

$$q = +k \int \frac{\partial \varphi}{\partial r} \cdot \frac{1}{r^2}\, dm,$$

wo dm das Volumenelement. Setzt man $dm = r^2 \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta\, dr$, so lässt sich die eine Integration ausführen und man erhält:

36) $$q = k \iint \varphi \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta - 4\pi k \varphi_1,$$

wo φ_1 der Werth von φ im Punkte $x_1\, y_1\, z_1$ ist. Der erste Theil von q kann möglicherweise aus mehreren Gliedern bestehen; wenn nämlich der Radius r die Oberfläche in verschiedenen Punkten 1, 2, 3 . . schneidet, so kommt

37) $$\begin{cases} q = k \Big(\iint \varphi^{I} \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta + \iint \varphi^{III} \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta + \dots \\ \qquad - \iint \varphi^{II} \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta - \iint \varphi^{IV} \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta \dots \Big) \\ \qquad - 4\pi k \varphi_1. \end{cases}$$

Ist der Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ ein äusserer Punkt, so ist $\varphi_1 = 0$, und es müssen eine gerade Anzahl von Durchschnittspunkten vorhanden sein. Liegt der Punkt $x_1\, y_1\, z_1$ in der Masse des Magneten, so sind eine ungerade Anzahl von Durchschnittspunkten vorhanden.

23. Wäre die Theorie der Kugelfunctionen so weit, als es wohl wünschenswerth ist, erschöpft, so müsste die Gleichung 36) am allereinfachsten zu benutzen sein, um die Aufgabe der Berechnung der magnetisehen Vertheilung sehr allgemein zu lösen. Bei dem Integrale

$$Q_1 = \iint \varphi \sin \psi\, d\psi\, d\vartheta$$

muss man sich offenbar φ direct als Function von ψ und ϑ denken, und zwar gehen nur die auf die Oberfläche bezüglichen Werthe in dasselbe ein.

Diese Abhängigkeit aber wird je nach der Lage von $x_1\ y_1\ z_1$ eine ganz verschiedene sein können. Nehmen wir im Inneren der Fläche, auf welche sich Q_1 bezieht, einen festen Punkt O als Coordinatenanfang, so schliesse $M_1 P_1$ mit den Achsen die Winkel ψ und ϑ ein, während ψ' und ϑ' die Richtungswinkel von OP_1 sein mögen. Man denke sich nun das φ im Punkte P_1 als Function von ψ' und ϑ' oder allgemeiner, das φ jedes Punktes der Oberfläche ausgedrückt durch seine Lage gegen O, so erlangt Q_1 die Form

$$\int\int\varphi(\psi',\vartheta')\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta;$$

ist φ bekannt, so kennt man auch seine Reihenentwickelung nach den Laplace'schen Functionen, etwa:

$$\varphi(\psi',\vartheta') = \Psi'^{(0)} + \Phi'^{(1)} + \Phi'^{(2)} + \ldots.$$

Offenbar kennt man die Gestalt der Oberfläche, und es ist daher stets möglich, ψ', ϑ' auszudrücken durch ψ, ϑ und r_1, ψ_1, ϑ_1, die Coordinaten von M_1, und setzt man dies in die Reihenentwickelung von $\varphi(\psi', \vartheta')$, so erhielte man φ als Function von ψ und ϑ. In das Integral Q_1 aber geht nur das Glied von der Ordnung 0 nach ψ und ϑ ein, und es wäre daher die Aufgabe nun die, dieses Glied zu finden. Man hat aber für die Lösung dieser Aufgabe noch keine Formeln.

Denkt man sich um M_1 eine Kugel mit dem Halbmesser 1 beschrieben, so ist $\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta$ das Element derselben, 4π die ganze Oberfläche, die durch die Theilung der Kugel in die gleich grossen Elemente ds in n Theile zerfalle. Offenbar ist Q_1 identisch mit

$$\int\varphi\, ds = 4\pi\frac{\int\varphi\, ds}{4\pi} = 4\pi\frac{\varphi' + \varphi'' + \varphi''' + \ldots + \varphi^{(n)}}{n},$$

wenn $\varphi', \varphi'' \ldots$ die Werthe von φ in den Oberflächenpunkten sind, denen die verschiedenen ds entsprechen. Es ist also Q_1 gleich 4π mal einem gewissen mittleren Werthe aller auf der Oberfläche vorhandenen φ. —

24. Da es nicht möglich ist, bis jetzt die Lösung in der in Nr. 23 angedeuteten Art und Weise vorzunehmen, so muss der Ausdruck 36) auf einen festen Punkt als Coordinatenanfang transformirt werden, und man kann so sehr verschiedene Formen für das Doppelintegral

$$37)\qquad Q_1 = k\int\int\varphi\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta$$

erhalten: Ich will diesen Ausdruck zunächst in rechtwinklige Coordinaten umsetzen und dabei ein Verfahren gebrauchen, was schon von Laplace in seiner *Mécanique céleste* angewendet worden ist zur Transformation dreifacher Integrale. Setzt man $-\cos\psi = \mu$, so ist

$$Q_1 = k\int\int\varphi\, d\mu\, d\vartheta.$$

Es soll nun das Element $dy\, dz$ hereinkommen, so kann man setzen:

$$\mu = f(y,\vartheta),\ d\mu = \frac{\partial f}{\partial y}dy.$$

Durch Einsetzen dieses Werthes wird μ eliminirt und es sind ϑ und y vorhanden. Man setzt nun

$$\vartheta = f'(y, z),\ d\vartheta = \frac{\partial f'}{\partial z}dz,$$

so ist auch ϑ eliminirt, man braucht nur f' und f zu kennen. Man trennt nun aber μ und ϑ als Functionen von y, z, indem x aus der Gleichung der Fläche durch y und z ausgedrückt erhalten werden kann, so dass der Ausdruck für $d\vartheta$ schon die richtige Form hat. Hingegen ist

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial y}dy + \frac{\partial \mu}{\partial z}dz.$$

Hier ist $\frac{\partial \mu}{\partial y}$ nicht identisch mit $\frac{\partial f}{\partial y}$, da durch Einführung von ϑ in $\mu = f(y, \vartheta)$ noch andere y hereinkommen können. Wohl aber ist $d\mu$ so genommen, dass $d\vartheta = 0$, denn eigentlich müsste sein

$$d\mu = \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial \vartheta}d\vartheta;$$

es ist also

$$d\vartheta = \frac{\partial \vartheta}{\partial y}dy + \frac{\partial \vartheta}{\partial z}dz = 0$$

einzuführen, woraus dz als Function von dy folgt

$$dz = -\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}}dy,$$

und dies ist in $d\mu$ einzuführen:

$$d\mu = \frac{\partial \mu}{\partial y}dy - \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\frac{\partial \vartheta}{\partial y}}{\frac{\partial \vartheta}{\partial z}}dy,$$

und die gesuchte Transformation ist:

$$Q_1 = k\int\int \varphi\left(\frac{\partial \mu}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial z} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\frac{\partial \vartheta}{\partial y}\right)dy\,dz.$$

In unserem Falle ist:

$$d\mu = -\frac{x - x_1}{r};\ \vartheta = Arctan\frac{z - z_1}{y - y_1}.$$

Nach Ausführung der Rechnung erhält man:

39) $$Q_1 = k\int\int\frac{\varphi}{r^3}\left[(x - x_1) - (y - y_1)\frac{\partial x}{\partial y} - (z - z_1)\frac{\partial x}{\partial z}\right]dy\,dz.$$

Ebenso hätte man erhalten können:

$$Q_1 = k\int\int\frac{\varphi}{r^3}\left[(y - y_1) - (z - z_1)\frac{\partial y}{\partial z} - (x - x_1)\frac{\partial y}{\partial x}\right]dz\,dx$$

$$Q_1 = k\int\int\frac{\varphi}{r^3}\left[(z - z_1) - (x - x_1)\frac{\partial z}{\partial x} - (y - y_1)\frac{\partial z}{\partial y}\right]dx\,dy.$$

Diese drei Formen sind auch identisch; wenn man bedenkt, dass $dx\,dy$, $dz\,dx$, $dy\,dz$ die Projectionen des Oberflächenelementes auf die Coordinatenebenen sind, so lassen sie sich zusammenziehen in

$$Q_1 = k\int\!\!\int \frac{\varphi}{r^3}\Big[(x-x_1)\,dy\,dz + (y-y_1)\,dz\,dx + (z-z_1)\,dx\,dy\Big],$$

oder einfacher in

$$40)\qquad Q_1 = k\int\!\!\int \frac{\varphi}{r^2}\cos(Nr)\,.\,dw.$$

Wäre der Körper massiv, und M_1 läge ausserhalb, so würden die partiellen Differentialquotienten dieses Q_1 die Componenten der Wirkung sein, die der Magnet auf ein in M_1 befindliches magnetisches Theilchen (ob nord- oder südmagnetisch kann nicht ohne Weiteres angegeben werden) ausüben würde. Eine ganz ähnliche Form existirt für die gewöhnliche Massenanziehung. Das Potential ist dann $\frac{k}{2}\int\!\!\int \cos(Nr)\,dw$ und (Nr) in beiden Fällen der Winkel der nach Aussen gerichteten Normale mit r.

Man kann aus 40) aber noch eine andere Form herleiten. Es ist nämlich:

$$\frac{1}{r^2}\cos Nr = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial r}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial N}\right),$$

oder

$$+\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1}\frac{\partial x}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y_1}\frac{\partial y}{\partial N} + \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1}\frac{\partial z}{\partial N}.$$

Nun ist sowohl φ unabhängig von x_1, y_1, z_1 als die Richtung der Normale, und es ist daher erlaubt zu schreiben:

$$\begin{aligned} Q_1 = &\frac{\partial}{\partial x_1} k\int\!\!\int \frac{\varphi}{r}\cos(Nx)\,dw \\ &+ \frac{\partial}{\partial y_1} k\int\!\!\int \frac{\varphi}{r}\cos(Ny)\,dw \\ &+ \frac{\partial}{\partial z_1} k\int\!\!\int \frac{\varphi}{r}\cos(Nz)\,dw. \end{aligned}$$

Es soll nun r mit R vertauscht werden und es mögen r und r_1 die Radienvectoren der Oberflächenpunkte und M_1 sein. Dann ist

$$dw = \frac{r^2 \sin\psi\,d\psi\,d\vartheta}{\cos(Nr)},$$

womit Q_1 übergeht in

$$41)\qquad \begin{cases} Q_1 = \dfrac{\partial}{\partial x_1} k\displaystyle\int\!\!\int \varphi\,\frac{r^2\cos(Nx)}{\cos(Nr)}\,\frac{1}{R}\sin\psi\,d\psi\,d\vartheta \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial y_1} k\displaystyle\int\!\!\int \varphi\,\frac{r^2\cos(Ny)}{\cos(Nr)}\,\frac{1}{R}\sin\psi\,d\psi\,d\vartheta \\ \quad + \dfrac{\partial}{\partial z_1} k\displaystyle\int\!\!\int \varphi\,\frac{r^2\cos(Nz)}{\cos(Nr)}\,\frac{1}{R}\sin\psi\,d\psi\,d\vartheta. \end{cases}$$

Eine andere, aber bei Weitem nicht so symmetrische Form für Q_1 kann man noch auf folgende Weise erhalten. Es ist:

$$\left[z-z_1-(x-x_1)\frac{\partial z}{\partial x}-(y-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}\right]dx\,dy$$

$$=r^2 \sin\psi\,d\psi\,d\vartheta\left[(z-z_1)-(x-x_1)\frac{\partial z}{\partial x}-(y-y_1)\frac{\partial z}{\partial y}\right]\frac{\cos Nz}{\cos Nr}$$

$$=r^2 \sin\psi\,d\psi\,d\vartheta\,\frac{(z-z_1)\frac{\partial f}{\partial z}+(y-y_1)\frac{\partial f}{\partial y}+(x-x_1)\frac{\partial f}{\partial x}}{\frac{\partial f}{\partial r}},$$

wenn man die Gleichung der Fläche, auf die sich Q_1 bezieht, schreibt

$$f(x, y, z)=0.$$

Diese letzte Form aber ist einfacher:

$$r^2 \sin\psi\,d\psi\,d\vartheta\left(1-\frac{x_1\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+z_1\frac{\partial f}{\partial z}}{x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}}\right)$$

$$=r^2 \sin\psi\,d\psi\,d\vartheta\left(1-\frac{r_1 \cos Nr_1}{r \cos Nr}\right);$$

wodurch Q_1 übergeht in:

42) $$Q_1=+k\int\!\!\int\frac{\varphi r^2}{R^3}\left(1-\frac{r_1 \cos Nr_1}{r \cos Nr}\right)\sin\psi\,d\psi\,d\vartheta.$$

Hat in Figur 3 Taf. IV OP die durch ψ und ϑ repräsentirte Richtung, so ist in allen den jetzt entwickelten Formen für φ der dem Punkte P zugehörige Werth einzuführen.

25. Wir haben bisjetzt die Transformation von Q_1 in 38) in der Weise ausgeführt, dass das Element der um M_1 in Fig. 3 Taf. IV concentrischen Kugel ausgedrückt wurde durch das Element der um O concentrischen (s. Nr. 23). Nimmt man O im Innern der Fläche an, so sind 0, π und 0, 2π die Grenzen für ψ und ϑ in dem transformirten Ausdrucke. Ist M_1 ein innerer Punkt, so gelten dieselben Grenzen auch für die Form 38). Anders ist es, wenn M_1 ein äusserer Punkt. Dann sind die Grenzen in 38) gegeben durch die Gestalt des von M_1 an die Fläche legbaren Tangentialkegels.

Man kann nun den Ausdruck 38) sich auch auf eine andere Art transformirt denken. Es sei OP (Fig. 3 Taf. IV) parallel mit M_1P_1, die durch ψ und ϑ gegebene Richtung OP_1 habe die Richtung $\psi'\,\vartheta'$, so ist:

$$Q_1=k\int\!\!\int\varphi(\psi', \vartheta')\sin\psi\,d\psi\,d\vartheta.$$

Für den Fall eines inneren Punktes sind 0, π und 0, 2π die Grenzen, für einen äusseren sind sie wieder durch den Tangentenkegel gegeben. Das $\varphi(\psi', \vartheta')$ kann man sich ausgedrückt denken durch $\varphi\,.\,x$, wo x ein bestimmter, von der Stellung von M_1 und von ψ, ϑ abhängiger Factor

$$Q_1 = k \int\int x\varphi \sin\psi \, d\psi \, d\vartheta,$$

worin φ den Werth im Punkte P bezeichnet. Für einen inneren Punkt M_1 sind nun die Grenzen dieses Integrales dieselben, wie die der in 24) entwickelten Formen von Q_1, und es wird daher für die Ausrechnung des Doppelintegrales gerechtfertigt sein, x zu identificiren mit dem Factor von $\varphi \sin\psi \, d\psi \, d\vartheta$ einer dieser Formen.

Hierin liegt jedoch noch eine Ungenauigkeit. $\sin\psi \, d\psi \, d\vartheta$ ist nämlich das dem Oberflächenelement in P entsprechende Element ds der um O concentrischen Kugel, und es muss daher dies ds noch mit einem Factor multiplicirt werden, wodurch dasselbe in das Element $d\sigma_1$ der um M_1 concentrischen Kugel übergeht, welches dem in P_1 liegenden Oberflächenelement entspricht. Offenbar ist $\frac{d\sigma_1}{ds}$ dieser Factor, und es ist derselbe nur abhängig von der Gestalt der Fläche und der Lage von M_1. Man erhält daher für innere Punkte ein richtiges Q, wenn man setzt:

$$\varphi(P)\, x \frac{ds}{d\sigma_1} = \varphi(P_1),$$

denn dann ist

$$\int_0^\pi\int_0^{2\pi} \varphi(P_1) \frac{d\sigma_1}{ds} ds = \int_0^\pi\int_0^{2\pi} \varphi(P)\, x \, ds,$$

wo x der Factor von $\varphi \sin\psi \, d\psi \, d\vartheta$ in einer der für Q in Nr. 24 entwickelten Formen.

Obgleich ich bisjetzt noch keine Anwendung dieses Satzes habe finden können bezüglich der Ausführung der Integration, so habe ich ihn doch angeführt, weil er eben einen Unterschied zeigt zwischen dem Q_1 für innere und für äussere Punkte.

Einen ähnlichen Unterschied lässt auch schon die einfache Form 38) erkennen; denn nur für innere Punkte gelten die in 23) gegebenen Bemerkungen, da nur für die Grenzen 0, π und 0, 2π die Formel gilt

$$\int\int Ym \,.\, Zn = 0, \; m \gtrless n.$$

26. Für $k = 1$ reduciren sich die drei Gleichungen 12^b) des Gleichgewichts auf

43) $$q' + Q_1 + \text{etc.} + C\chi_1 = 0,$$

worin $Q_1 + \text{\&c}$ die Summe aller in 37) vorkommenden Glieder von der Form wie Q_1 bedeuten soll. Ich setze nur einen massiven Körper jetzt voraus, so ist einfacher

44) $$q' + Q_1 + C\chi_1 = 0,$$

wo dann:

45) $$\frac{\partial\chi_1}{\partial x_1} = \alpha_1, \quad \frac{\partial\chi_1}{\partial y_1} = \beta_1, \quad \frac{\partial\chi_1}{\partial z_1} = \gamma_1.$$

Dem durch diese Bedingungen gegebenen Gleichgewicht kommt die Eigenthümlichkeit zu, dass die Intensität des Magnetismus constant ist auf jeder von den Stromebenen umhüllten Fläche, und zwar muss man zugeben, dass dies Resultat bedeutend fester begründet ist, als die Formeln 23) für den allgemeineren Fall $k < 1$, welche für diesen Fall ein ganz constantes i ausdrücken.

Durch Benutzung des Werthes 41) für Q_1 kann die Gleichung 44) in drei von einfacherer Form zerlegt werden, die so symmetrisch sind, dass nur eine von ihnen untersucht zu werden braucht.

Rührt die Induction des Magnetismus her von magnetischen Kräften, so kann dieselbe stets ersetzt werden durch eine von geschlossenen elektrischen Strömen herrührende. Da jeder solcher Strom in geschlossene Elementarströme zerlegt werden kann, so wird $\mathfrak{y}'$ aus einer Summe von Gliedern von der Form q in 1) bestehen; man kann dies auch verändern in:

$$q' = \Sigma\left[v'i'\left(\alpha'\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial x_1} + i'\beta'\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial y_1} + i'\gamma'\frac{\partial\frac{1}{R}}{\partial z_1}\right)\right],$$

wo v', i', α'.. für die inducirenden Ströme dieselbe Bedeutung haben, wie v, i, α.. für Molecularströme des Magneten. Diese Form kann man umsetzen in

$$46)\qquad q' = \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_1}{\partial y_1} + \frac{\partial N_1}{\partial z_1},$$

wenn man

$$47)\qquad L_1 = \Sigma\left(\frac{v'i'\alpha'}{R}\right);\quad M_1 = \Sigma\left(\frac{v'i'\beta'}{R}\right);\quad N_1 = \Sigma\left(\frac{v'i'\gamma'}{R}\right)$$

macht. Durch Betrachtung der Gleichungen 41) und 44) folgt hieraus, dass sich auch χ_1 in einer ähnlichen Form schreiben lassen wird:

$$48)\qquad \chi_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1},$$

und es erhält nun durch die Substitution dieses Werthes von χ_1 die Gleichung 44) die sehr symmetrische Form:

$$49)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{L_1 + \iint \varphi \frac{r^2 \cos(Nx)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + Cu_1\right\} \\ &+\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{M_1 + \iint \varphi \frac{r^2 \cos(Ny)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + Cv_1\right\} \\ &+\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{N_1 + \iint \varphi \frac{r^2 \cos(Nz)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + Cw_1\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Eine Verwechslung der beiden Bedeutungen von N (als Normale und als Glied von q') ist nicht gut möglich. Die Gleichung 49) muss gelten, welche Richtung der Achsen man auch voraussetzt. Denken wir uns diese Gleichung einmal ersetzt durch

$$\frac{\partial l}{\partial x_1} + \frac{\partial m}{\partial y_1} = \frac{\partial n}{\partial z_1} = 0,$$

und bezeichnen mit λ, μ, ν Grössen, die sich auf drei rechtwinklige Achsen ξ, η, ζ genau in der Weise beziehen, wie l, m, n auf x, y, z. Man hat nach den bekannten Transformationsformeln für rechtwinklige Coordinaten:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l}{\partial x_1}+\frac{\partial m}{\partial y_1}+\frac{\partial n}{\partial z_1}= a\frac{\partial l}{\partial \xi_1}&+b\frac{\partial l}{\partial \eta_1}+c\frac{\partial l}{\partial \zeta_1}\\ +a_1\frac{\partial m}{\partial \xi_1}&+b_1\frac{\partial m}{\partial \eta_1}+c_1\frac{\partial m}{\partial \zeta_1}\\ +a_2\frac{\partial n}{\partial \xi_1}&+b_2\frac{\partial n}{\partial \eta_1}+c_2\frac{\partial n}{\partial \zeta_1},\end{aligned}$$

und es muss dies gleich

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \xi_1}+\frac{\partial \mu}{\partial \eta_1}+\frac{\partial \nu}{\partial \zeta_1}$$

sein. Dies ist offenbar dann, wenn:

$$\begin{aligned}\lambda &= al+a_1 m+a_2 n\\ \mu &= bl+b_1 m+b_2 n\\ \nu &= cl+c_1 m+c_2 n,\end{aligned}$$

d. h. wenn die drei Grössen l, m, n so transformirt werden dürfen, wie die x, y, z selbst. Die Werthe L_1, M_1, N_1 und die drei Integrale in 49) genügen offenbar dieser Bedingung, wie man sich leicht überzeugt. Es müssen daher auch die drei Werthe u_1, v_1, w_1 von ähnlicher Form sein. Dass dies wirklich der Fall ist, folgt noch aus einem anderen Grunde: Es sei eine Gerade gegeben, die mit den Achsen Winkel einschliesse, deren Cosinus a, b, c seien. Dann ist der Winkel, den die durch die Winkel α_1, β_1, γ_1 gegebene Gerade mit dieser einschliesst:

$$\cos e = a\alpha_1+b\beta_1+c\gamma_1 = a\frac{\partial \chi_1}{\partial x_1}+b\frac{\partial \chi_1}{\partial y_1}+c\frac{\partial \chi_1}{\partial z_1},$$

oder wenn p_1 die Richtung dieser Geraden:

$$\cos e = \frac{\partial \chi_1}{\partial p_1}.$$

Bezieht man jetzt χ_1 auf ein System ξ, η, ζ von Achsen und setzt dann

$$\chi_1 = \frac{\partial u'}{\partial \xi_1}+\frac{\partial v'}{\partial \eta_1}+\frac{\partial w'}{\partial \zeta_1},$$

so erhält man die Winkel, die die Gerade α_1 β_1 γ_1 mit jeder dieser drei Achsen einschliesst, durch Differentiation dieses Ausdruckes nach diesen Achsen; nach der eben gemachten Bemerkung müsste auch der alte Werth von χ_1 nämlich dieselben Werthe liefern; es müsste also sein:

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}=\frac{\partial u'}{\partial \xi_1}+\frac{\partial v'}{\partial \eta_1}+\frac{\partial w'}{\partial \zeta_1},$$

woraus wie früher folgt, dass u_1, v_1, w_1 durch die gewöhnlichen Formeln transformirt werden dürfen.

Die Gleichung 49) soll zur Bestimmung einer einzigen Function φ verwandt werden; man kann sie aber in drei zerlegen, wenn man dafür noch

zwei neue unbekannte Functionen hereinbringt. Wir zerlegen also die Gleichung

$$\frac{\partial l}{\partial x_1}+\frac{\partial m}{\partial y_1}\frac{\partial n}{\partial z_1}=0$$

in

$$\frac{\partial l}{\partial x_1}+F(x, y, z)=0;\ \frac{\partial m}{\partial y_1}+F_1(x, y, z)=0;\ \frac{\partial n}{\partial z_1}+F_2(x, y, z)=0,$$

wobei nur

$$F(x, y, z)+F_1(x, y, z)+F_2(x, y, z)=0$$

zu sein beruht. Man würde hieraus finden:

$$C\frac{\partial u_1}{\partial x_1}=-\frac{\partial L_1}{\partial x_1}-\frac{\partial}{\partial x_1}\int\int\varphi\frac{r^2\cos(Nx)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta-F$$

und ebenso $\frac{\partial u_1}{\partial y_1}$ und $\frac{\partial w_1}{\partial z_1}$; nun sind eigentlich die Grössen u_1, v_1, w_1 gar nicht für uns zu wissen nöthig, sondern es wird nur verlangt

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_1}{\partial y_1}+\frac{\partial w_1}{\partial z_1}$$

zu kennen; dies wird sich aber nicht ändern, welche Beschaffenheit man auch F, F_1, F_2 giebt, da ja stets $F+F_1+F_2=0$ ist. Man braucht dasselbe daher gar nicht zu berücksichtigen und erhält so die drei Gleichungen:

$$\frac{\partial l}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial m}{\partial y_1}=0,\ \frac{\partial n}{\partial z_1}=0.$$

Dies kann von den Differentialen befreit werden, nämlich:

$$l+f(y_1, z_1)=0;\ m+f_1(z_1, x_1)=0;\ n+f_2(x_1, y_1)=0.$$

Nun folgt aus den anfänglichen Bemerkungen in dieser Nummer, dass, damit diese Grössen für alle Achsenrichtungen identisch gleich Null seien, dass die drei Grössen linker Hand durch die Coordinatentransformationsformeln transformirt werden dürfen. Man müsste haben:

$$a f(y_1, z_1)+b f_1(z_1, x_1)+c f_2(x_1, y_1)=f'(\eta, \zeta)$$
$$a_1 f(y_1, z_1)+b_1 f_1(z_1, x_1)+c_1 f_2(x_1, y_1)=f_1'(\zeta, \xi)$$
$$a_2 f(y_1, z_1)+b_2 f_1(z_1, x_1)+c_2 f_2(x_1, y_1)=f_2'(\xi, \eta),$$

und dies ist allgemein (d. h. für jedes System a, b, c) nur möglich, wenn $f=f_1=f_2=0$. Man darf daher die Gleichung 49) in die drei anderen zerlegen:

$$50)\quad\begin{cases} L_1+\int\int\varphi\frac{r^2\cos(Nx)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta+Cu_1=0\\ M_1+\int\int\varphi\frac{r^2\cos(Ny)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta+Cv_1=0\\ N_1+\int\int\varphi\frac{r^2\cos(Nz)}{\cos(Nr)}\cdot\frac{1}{R}\sin\psi\, d\psi\, d\vartheta+Cw_1=0.\end{cases}$$

Aus diesen drei Gleichungen kann man u_1, v_1, w_1 berechnen, ausgedrückt durch L_1, M_1, N_1 und φ, und es ist dann φ so einzurichten, dass

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} + \frac{\partial w_1}{\partial z_1}$$

den Bedingungen genügt, denen es vermöge seines Zusammenhanges mit φ genügen muss.

Es müssen aber auch diese drei Gleichungen vollkommen ausreichen zur Bestimmung von φ_1, u_1, v_1, w_1, denn von χ_1 kennt man schon die Bedingung, dass $\alpha_1 d\alpha_1 + \beta_1 d\beta_1 + \gamma_1 d\gamma_1 = 0$. Ist φ gegeben, so sind daher, obgleich C willkürlich ist im Allgemeinen, dennoch u_1, v_1, w_1 eindeutig bestimmt. Man kann also aus den drei Gleichungen 50) φ und χ bestimmen; diese müssen dann noch so beschaffen sein, dass ihre partiellen Differentialquotienten einander proportional sind, und φ muss ausserdem noch der Gleichung 20) genügen.

Anders ist der Fall zu behandeln, dass $C = 0$; dann dürfen die willkürlichen Functionen F, F_1, F_2 nicht wegfallen, sondern man müsste schreiben, etwa:

$$F = \frac{\partial f}{\partial x_1},\quad F_1 = \frac{\partial f_1}{\partial y_1},\quad F_2 = \frac{\partial f_2}{\partial z_1},$$

wodurch die Gleichungen übergingen in:

$$51)\quad \begin{cases} L_1 + \int\int \varphi \dfrac{r^2 \cos(Nx)}{\cos(Nr)} \dfrac{1}{R} \sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + f(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ M_1 + \int\int \varphi \dfrac{r^2 \cos(Ny)}{\cos(Nr)} \dfrac{1}{R} \sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + f_1(x_1, y_1, z_1) = 0 \\ N_1 + \int\int \varphi \dfrac{r^2 \cos(Nz)}{\cos(Nr)} \dfrac{1}{R} \sin\psi\, d\psi\, d\vartheta + f_2(x_1, y_1, z_1) = 0, \end{cases}$$

wozu noch kommt:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f_1}{\partial y_1} + \frac{\partial f_2}{\partial z_1} = 0,$$

aus welchen vier Gleichungen φ, f, f_1, f_2 zu bestimmen sind.

27. Ich will diese Formeln nun einmal anwenden auf die Berechnung der Vertheilung in einer Kugel und dann andeuten, wie dieselbe ausgeführt werden könnte bei beliebigen anderen Flächen. Dabei wird sich ergeben, dass die Formel 20) nicht dienen kann, um die Richtigkeit der Theorie zu prüfen, sondern dass dieselbe nothwendig ist, um überhaupt die Lösung vollständig zu machen. Es wird sich zeigen, dass man, um diese Lösung zu finden, gar nicht nöthig hat, die Gleichung für das magnetische Gleichgewicht in drei zu zerlegen.

Es sollen zunächst die Gleichungen angewendet werden auf eine massive Kugel; in ganz analoger Weise wird man, wie gezeigt werden soll, auch bei Kugeln mit concentrischer Hölung verfahren. Es sei a der Radius der Kugel, r_1, ψ, ϑ die Polarcoordinaten des Punktes, für den die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden, und r, ψ, ϑ, also a, ψ, ϑ die eines beliebigen Oberflächenpunktes. Dann ist, da stets $r_1 < a$:

$$\frac{1}{R} = \frac{P_0}{a} + \frac{r_1}{a^2} P_1 + \frac{r_1^2}{a^3} P_2 + \ldots + \frac{r_1^n}{a^{n+1}} P_n + \text{etc.}$$

$cos(Nr) = 1$, $cos(Nx) = cos\,\psi$, $cos(Ny) = sin\,\psi\, cos\,\vartheta$, $cos(Nz) = sin\,\psi\, sin\,\vartheta$.

Es muss darauf aufmerksam gemacht werden, dass Functionen von x_1, y_1, z_1, die der Gleichung

$$a)\qquad \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z_1^2} = 0$$

genügen, sich in Reihen entwickeln lassen, deren Coefficienten der Differentialgleichung der Kugelfunctionen genügen, G_n und H_n von der Form

$$F = \Sigma G_n r_1^n + \Sigma \frac{H_n}{r_1^{n+1}}.$$

Der Beweis dafür, den Poisson lieferte und der ganz einfach auf der Umsetzung der Gleichung a) in Polarcoordinaten beruht, befindet sich in Nr. 19 p. 428 des vorigen Jahrganges. Bei uns sind χ_1 und q' solche Functionen, und zwar müssen bei einer massiven Kugel alle H_n verschwinden, indem sonst diese Grössen und ihre Differentialquotienten erst recht im Kugelmittelpunkte (denselben als Anfang genommen) unendlich werden müssten.

28. Für eine massive Kugel geht die Gleichung 49) über in:

$$53)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{L_1 + a^2 \int\!\!\int \varphi\, cos\,\psi\, \Sigma\left(\frac{r_1^n P_n}{a^{n+1}}\right) sin\,\psi\, d\psi\, d\vartheta + C u_1\right\} \\ + &\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{M_1 + a^2 \int\!\!\int \varphi\, sin\,\psi\, cos\,\vartheta\, \Sigma\left(\frac{r_1^n P_n}{a^{n+1}}\right) sin\,\psi\, d\psi\, d\vartheta + C v_1\right\} \\ + &\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{N_1 + a^2 \int\!\!\int \varphi\, sin\,\psi\, sin\,\vartheta\, \Sigma\left(\frac{r_1^n P_n}{a^{n+1}}\right) sin\,\psi\, d\psi\, d\vartheta + C w_1\right\} \end{aligned}\right\} = 0.$$

Die drei Integrale können entwickelt werden, wenn man sich die $\varphi\, cos\,\psi$, $\varphi\, sin\,\psi\, cos\,\vartheta$, $\varphi\, sin\,\psi\, sin\,\vartheta$, die sich ja nur auf die Oberfläche beziehen, in nach den Gesetzen der Kugelfunctionen fortschreitende Reihen verwandelt. Aus demselben Grunde, wie der Ende der vorigen Nummer angegebene, muss es auch erlaubt sein, L_1, M_1, N_1 in Reihen zu entwickeln, in denen z. B. das allgemeine Glied der ersten ist:

$$L_1^{(n)} r_1^n,$$

wobei es jetzt ganz gleichgültig ist, ob die $L_1^{(n)} \ldots$ der Differentialgleichung der Kugelfunctionen genügen oder nicht. Ebenso mögen u_1, v_1, w_1 in Reihen entwickelt werden, deren allgemeine Glieder

$$U_1^{(n)} r_1^n,\quad V_1^{(n)} r_1^n,\quad W_1^{(n)} r_1^n$$

sein mögen.

Man kann so die Gleichung 3) in unendlich viele zerlegen, indem man die mit verschiedenen Potenzen von r_1 behafteten Glieder einzeln gleich Null setzt. Wir werden später bei Ausführung der Differentiationen sehen, dass dies darauf hinauskommt, für $n = 0$, $n = 1 \ldots$ bis $n = \infty$ die Gleichungen zu befriedigen:

$$54)\left\{\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{L_1^{(n)}r_1^n+\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r_1^n}{a^{n-1}}(\varphi\cos\psi)^{(n)}+CU_1^{(n)}r_1^n\right\}\\&+\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{M_1^{(n)}r_1^n+\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r_1^n}{a^{n-1}}(\varphi\sin\psi\cos\vartheta)^{(n)}+CV_1^{(n)}r_1^n\right\}\\&+\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{N_1^{(n)}r_1^n+\frac{4\pi}{2n+1}\frac{r_1^n}{a^{n-1}}(\varphi\sin\psi\sin\vartheta)^{(n)}+CW_1^{(n)}r_1^n\right\}\end{aligned}\right\}=0.$$

Dass diese Zerlegung die richtige ist, lässt sich nicht ohne Weiteres erkennen, da durch Differentiation z.B. von $L_1^{(n)}r_1^n$ zwei Glieder entstehen:

$$r_1^n\frac{\partial L_1^{(n)}}{\partial x_1}+nr_1^{n-1}L_1^{(n)}\frac{\partial r_1}{\partial x_1},$$

die also mit verschiedenen Potenzen von r_1 behaftet sind. Man kann diese Gleichung mit $(2n+1)a^n$ multipliciren, und dann $L_1^{(n)}a^n$, $U_1^{(n)}a^n$ etc. als die Werthe von $L_1^{(n)}r_1^n$ ansehen, die dem in der Richtung $\psi_1\,\vartheta_1$ gelegenen Oberflächenpunkte entsprechen. Die Differentiation lässt sich nun etwas weiter ausführen und giebt:

$$55)\left\{\begin{aligned}&r_1^{(n)}\left[\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{(2n+1)a^nL_1^{(n)}+4\pi\frac{a^n}{a^{n-1}}(\varphi\cos\psi)^{(n)}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+CU_1^{(n)}(2n+1)a_n\right\}+\ldots\right]\\&+nr_1^{n-1}\left[\left\{(2n+1)a^nL_1^{(n)}+4\pi\frac{a^n}{a^{n-1}}(\varphi\cos\psi)^{(n)}\right.\right.\\&\qquad\left.\left.+CU_1^{(n)}(2n+1)a^n\right\}\frac{\partial r_1}{\partial x_1}+\ldots\right]\end{aligned}\right\}=0.$$

Es ist nun nicht schwer, sämmtliche Glieder mit L_1, U_1 etc. so zu schreiben, dass die Summe derselben für die verschiedenen n eine endliche Form erhält. Es ist

$$(2n+1)a^nL_1^{(n)}=a^nL_1^{(n)}+2a\frac{\partial(a^nL_1^{(n)})}{\partial a},$$

also die Summe

$$L_1+2a\frac{\partial L_1}{\partial a};$$

ebenso für U_1, M_1, V_1, N_1, W_1. Lässt man also in der vorigen Gleichung den Factor r_1^n weg, so giebt die Summe aller so entstehenden Gleichungen in der ersten Reihe, mit Ausnahme der Glieder mit φ:

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\left\{\left(L_1+2a\frac{\partial L_1}{\partial a}\right)+C\left(U_1+2a\frac{\partial U_1}{\partial a}\right)\right\}\\&+\frac{\partial}{\partial y_1}\left\{\left(M_1+2a\frac{\partial L_1}{\partial a}\right)+C\left(V_1+2a\frac{\partial V_1}{\partial a}\right)\right\}\\&+\frac{\partial}{\partial z_1}\left\{\left(N_1+2a\frac{\partial N_1}{\partial a}\right)+C\left(W_1+2a\frac{\partial W_1}{\partial a}\right)\right\};\end{aligned}$$

doch haben hier L_1, M_1, N_1, U_1, V_1, W_1 nicht die früheren Werthe, sondern *es sind die* analogen Ausdrücke, wie die früheren, aber für den in der

Richtung ψ_1 ϑ_1 gelegenen Oberflächenpunkt, und es sollen daher, um dies anzudeuten, die Indices 1 weggelassen werden. Die zweite Reihe hat noch den Factor n, und es kann derselbe durch Differentiation der ersten nach a entstanden gedacht werden:

$$n(2n+1)\,a^n L_1^{(n)} = \frac{\partial}{\partial a}\left(a^n L_1^{(n)} + 2a\,\frac{\partial\,(a^n L_1^{(n)})}{\partial a}\right).a;$$

ebenso für M, N, U, V, W. Wir kommen nun zur Betrachtung der Glieder mit φ.

Es ist mit Absicht $\frac{a^n}{a^{n-1}}$ nicht gehoben worden; während nämlich das a^n als der specielle Fall des variablen r_1^n angesehen werden muss und also nach diesem nöthigenfalls differentiirt werden darf, ist a^{n-1} die Potenz $n-1$ vom constant gegebenen Kugelradius, und wollte man nach a differentiiren und auch dieses als variabel ansehen, so erhielte man die Aenderung des Integrales für einen Oberflächenpunkt, wenn der Kugelradius sich ändert. Die magnetische Vertheilung wird ausser von q' (der inducirenden Kraft) auch von der Grösse von a abhängen, und es ist daher sehr wahrscheinlich, dass auch U, V, W (d. h. die Werthe von U_1, V_1, W_1) für den Oberflächenpunkt a implicite enthalten. Offenbar aber ist es, dass die Gleichungen 54) und 55) für jedes beliebige a gelten und es müsste daher jede der unendlich vielen zu befriedigenden Gleichungen 54) oder 55) sich wieder in unendlich viele nach den Potenzen von a zerlegen lassen. Da aber die Glieder L, M, N nur a^n als Factor enthalten (denn diese hängen nur von der inducirenden Kraft ab), so muss dies auch bei den übrigen der Fall sein; es werden daher U, V, W nicht mit a behaftet sein und

$$\frac{a^n}{a^{n-1}}(\varphi\cos\psi)^n = a\,(\varphi\cos\psi)^{(n)} \text{ etc.}$$

werden den Factor a^n haben, wo a als constanter Kugelradius gilt. Differentiirt man nun nach dieser Dimension, so ist dies in den Gliedern L, M, N identisch mit den nach r_1 genommenen Differentialquotienten, wenn schliesslich a statt r_1 eingeführt wird; der Factor n der zweiten Reihe in 55) aber kann demnach durch Differentiation nach a entstanden gedacht werden und es ist daher die Summe aller mit φ behafteten Glieder für $n=0$ bis $n=\infty$

$$r_1^n\,4\pi\left[\frac{\partial}{\partial x_1}(a\,\varphi\cos\psi) + \frac{\partial}{\partial y_1}(a\,\varphi\sin\psi\cos\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z_1}(a\,\varphi\sin\psi\sin\vartheta)\right]$$
$$+\,a\frac{\partial}{\partial a}r_1^{n-1}\,4\pi\left[\frac{\partial r_1}{\partial x_1}(a\,\varphi\cos\psi) + \frac{\partial r_1}{\partial y_1}(a\,\varphi\sin\psi\cos\vartheta) + \frac{\partial r_1}{\partial z_1}(a\,\varphi\sin\psi\sin\vartheta)\right]$$

Für die Glieder U, V, W ist der früher entwickelte Ausdruck richtig, denn da U, V, W, wie gezeigt worden ist, den Kugelradius nicht enthalten, so ist es auch erlaubt, sich die Differentiation von $a^n U^{(n)}\ldots$ nach a als specieller Fall der Differentiation nach r, oder als solche nach a als Kugelhalbmesser zu denken.

Die Gleichgewichtsbedingung ist daher in eine endliche Differentialgleichung verwandelt, und es ist nun noch nöthig, die eigenthümlichen Differentialquotienten nach x_1, y_1, z_1 so weit als möglich zu reduciren und auf solche nach x, y, z (den Coordinaten des dem x_1, y_1, z_1 entsprechenden Oberflächenpunktes) zurückzubringen.

29. Man hat:

$$x = a\frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};\quad y = a\frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}};\quad z = a\frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}$$

$$\cos\psi = \frac{x_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},\quad \sin\psi\cos\vartheta = \frac{y_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}},$$

$$\sin\psi\sin\vartheta = \frac{z_1}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}}.$$

Da a und da ganz unabhängig von x_1, y_1, z_1 sind, so kann man die Differentiationen nach a und nach x_1 oder y_1 oder z_1 in der Reihenfolge umkehren und hat daher, um die Glieder mit L, M, N zu vereinigen, nur nöthig

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial M}{\partial y_1} + \frac{\partial N}{\partial z_1}$$

auszurechnen. Man hat nun z. B.:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial L}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}.$$

Man findet so durch Benutzung der oben stehenden Werthe für x, y, z, wenn man nach Ausführung der Differentiationen wieder x_1, y_1, z_1 durch Einführung der Polarcoordinaten r_1, ψ_1, ϑ_1 eliminirt:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} + \frac{\partial M}{\partial y_1} + \frac{\partial N}{\partial z_1} + \frac{\partial}{\partial a}(L\cos\psi + M\sin\psi\cos\vartheta + N\sin\psi\sin\vartheta)\,.\,\frac{a}{r_1}$$

$$= \frac{a}{r_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z}\right) = \frac{a}{r_1}\,.\,q',$$

und daher die Gesammtheit der mit L, M, N behafteten Glieder:

$$\frac{a}{r_1}q' + 2a\frac{\partial\frac{a}{r_1}q'}{\partial a} = \frac{3a}{r_1}q' + \frac{2a^2}{r_1}\frac{\partial q'}{\partial a}.$$

Ganz denselben Ausdruck muss man für die U, V, W enthaltenden Glieder entwickeln können, und wir wenden uns daher zur Ausrechnung von

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(\varphi\cos\psi) + \frac{\partial}{\partial y_1}(\varphi\sin\psi\cos\vartheta) + \frac{\partial}{\partial z_1}(\varphi\sin\psi\sin\vartheta)$$

$$= \cos\psi\,.\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x_1} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x_1}\right) + \varphi\left(\frac{\partial\cos\psi}{\partial x_1}\right) + \text{etc.}$$

Setzt man die früheren Werthe für $x, y, z, \cos\psi$ etc. ein, so erhält man hieraus: $\frac{2\varphi}{r_1}$. Einfacher lässt sich der Werth des zweiten Theiles

der mit φ behafteten Glieder berechnen. Da $\frac{\partial r_1}{\partial x_1} = \cos\psi$ etc. unabhängig von a sind, so erhält man:

$$\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial r_1}{\partial x_1}(a\,\varphi\cos\psi) + \frac{\partial r_1}{\partial y_1}(a\,\varphi\sin\psi\cos\vartheta) + \frac{\partial r_1}{\partial z_1}(a\,\varphi\sin\psi\sin\vartheta)\right]$$
$$= \frac{\partial}{\partial a}(a\varphi) = \varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial a},$$

und die Summe aller beider Theile ist daher nach Aushebung des Factors $r_1^{\,n}$:

$$\frac{3\varphi a}{r_1} + \frac{a^2}{r_1}\frac{\partial\varphi}{\partial a},$$

so dass die Gleichgewichtsbedingung die endliche Form erlangt hat:

$$56)\quad 3q' + 2a\frac{\partial q'}{\partial a} + C\left(3\chi + 2a\frac{\partial\chi}{\partial a}\right) + \left(3\varphi + a\frac{\partial\varphi}{\partial a}\right)4\pi = 0,$$

und ich mache nochmals darauf aufmerksam, dass es erlaubt ist, in den Gliedern mit q' und χ die Differentialquotienten nach a als die Werthe der nach r_1 genommenen zu betrachten, wenn dann $r_1 = a$ gesetzt wird, dass aber $\frac{\partial\varphi}{\partial a}$ ausdrückt, wie sich φ für einen Oberflächenpunkt ψ, ϑ ändert, wenn der Radius der Kugel um da grösser wird.

30. Aus dem Satze, dass diese beiden Auffassungsweisen für χ auf dasselbe hinauskommen, folgt, dass der analytische Ausdruck für χ derselbe sein muss, welchen Radius auch die Kugel hat. Denn es sei derselbe a, so kann man sich die Function χ für den ganzen unendlichen Raum construirt denken, und es hat dann $\frac{\partial\chi}{\partial a}$ auch für positive da einen bestimmten Werth. Wird nun die Kugel um da grösser, so ändert sich die Vertheilung des Magnetismus, und zwar wird das χ sich von einem Punkte der ersten Oberfläche zum andern um $d\chi$ ändern, welches nach dem Früheren mit der Aenderung der ersten Function χ nach a identisch sein wird, und es wird daher der für den ganzen unendlichen Raum berechnete Ausdruck des ersten χ auch die Oberflächenwerthe für die zweite Kugel ergeben; von dieser kann man zu einer dritten übergehen u. s. f., wodurch die ausgesprochene Behauptung bewiesen ist. φ hingegen braucht diese Eigenthümlichkeit nicht zu haben. Eine derartige Eigenthümlichkeit muss auch bekannt sein, damit aus der Gleichung 56), die sich ja nur auf die Oberfläche bezieht, ein Schluss auf die magnetischen Zustände im ganzen Volumen der Kugel gemacht werden kann. Ich werde später nochmals darauf zurückkommen.

31. Wir wenden uns nun zur Untersuchung des allgemeinen Falles einer concentrisch ausgehöhlten Kugel. In diesem Falle werden die Entwickelungen von Q_1, q', χ_1 auch negative Potenzen von r_1 enthalten können. Die Rechnung wird aber wieder eine ganz analoge werden, wie die vorige,

nur werden noch einmal so viel einzelne Gleichungen entstehen. Ist die Kugel hohl, so können inducirende Kräfte auch im Inneren ihren Sitz haben, und diese werden ein q' liefern, welches in Reihen entwickelt nach absteigenden Potenzen von r_1 geordnet sein muss, da r_1 grösser ist, als die Entfernung dieser inducirenden Ursachen vom Mittelpunkte. Es soll daher geschrieben werden:

$$q' = \Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[L_1^{(n)} r_1^n + \frac{L_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y_1}\left[M_1^{(n)} r_1^n + \frac{M_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\left[N_1^{(n)} r_1^n + \frac{N_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] \right\}.$$

Ebenso kann χ_1 gedacht werden, als:

$$\chi_1 = \Sigma \left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}\left[U_1^{(n)} r_1^n + \frac{U_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] + \frac{\partial}{\partial y_1}\left[V_1^{(n)} r_1^n + \frac{V_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial z_1}\left[W_1^{(n)} r_1^n + \frac{W_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] \right\}.$$

An die Stelle des früheren Q tritt jetzt die Differenz zweier, die auch das eine positive, das andere negative Potenzen von r_1 enthält vermöge der Entwickelungen von $\frac{1}{R}$ für äussere oder innere Oberfläche. Man wird nun wieder die Glieder mit denselben Potenzen von r_1 einzeln Null setzen und es wird sich zeigen, dass wie vorher auch hier einfach nach den Indices (n) geschieden werden kann; jedem (n) aber werden zwei Gleichungen zugehören, die einzeln zu behandeln sind und die sich in zwei endliche Differentialgleichungen werden vereinigen lassen.

Das Q der äusseren Oberfläche hat genau den nämlichen Ausdruck, wie früher, aber das der inneren muss mit einem $\frac{1}{R}$ berechnet werden, dessen Entwickelung, wenn b der Radius der Höhlung, ist:

$$\frac{1}{R} = \frac{P_0}{r_1} + \frac{b}{r_1^2} P_1 + \ldots + \frac{b^n}{r_1^{n+1}} P_n + \ldots$$

Die erstere Bedingungsgleichung wird genau die frühere sein, die innere aber ist:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_1}\left[L_1^{(n)} \frac{1}{r_1^{n+1}} - \frac{b^{n+2}}{r_1^{n+1}} \int\int \varphi \cos l P_n \sin\psi \, d\psi \, d\vartheta + C \frac{U_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}\right] \\ + \frac{\partial}{\partial y_1} \ldots \end{array} \right\} = 0,$$

$\varphi \cos l$ auf die innere Oberfläche bezogen. Dies giebt:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{1}{r_1^{n+1}} \left\{ \frac{\partial L_1^{(n)}}{\partial x_1} - \frac{4\pi}{2n+1} b^{n+2} \frac{\partial (\varphi \cos l)^{(n)}}{\partial x_1} + C \frac{\partial U_1^{(n)}}{\partial x_1} \right\} \\ - (n+1) \left\{ L_1^{(n)} - \frac{4\pi}{2n+1} b^{n+2} (\varphi \cos l)^{(n)} + C U_1^{(n)} \right\} \frac{1}{r_1^{n+2}} \frac{\partial r_1}{\partial x_1} \end{array} \right\} = 0$$

+ etc.

Das *etc.* bezieht sich auf die ganz ähnlich gestalteten Glieder mit den Differentialquotienten nach y_1, z_1. Man wird nun diese Gleichung mit $\frac{2n+1}{b^{n+1}}$ multipliciren und ganz wie früher $\frac{L^{(n)}}{b^{n+1}}$ als den Oberflächenwerth von $\frac{L_1^{(n)}}{r_1^{n+1}}$ für dasselbe $\psi_1\,\vartheta_1$ ansehen. Da nun $L_1^{(n)}$ vollständig unabhängig von b ist und ferner diese Gleichungen für jedes beliebige b gelten müssen, so wird man genau wie früher schliessen, dass die so entstehenden Glieder

$$b\,(\varphi\cos l)^{(n)} \text{ und } \frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}}$$

wirklich nur den Factor

$$\frac{1}{b^{n+1}}$$

enthalten, weshalb ganz wie früher das $(n+1)$ im zweiten Theile der letzten Gleichung durch Differentiation nach b, und zwar nach b als Kugeldimension entstanden gedacht werden kann. Für die Glieder mit L_1 und U_1 kommt dies auf dasselbe hinaus, als ob man einfach nach r_1 differentiirt und dann $r_1 = b$ setzt; für L_1 versteht sich das von selbst, für U_1, V_1, W_1 aber sieht man es sofort ein, da ja $\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}}$ kein b ausser $\frac{1}{b^{n+1}}$ enthalten soll, so dass also $U_1^{(n)}$ den eigentlich constant gegebenen Radius b nicht enthält. Der Factor $(2n+1)$ nun kann auf ganz ähnliche Weise gedeutet werden, wie der frühere $2n+1$, nämlich:

$$2n+1 = 2(n+1) - 1,$$

also:

$$(2n+1)\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}} = -2b\frac{\partial\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}}}{\partial b} - \frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}},$$

so dass alle Vorzeichen Minus werden. Es geht also die letzte Gleichung über in:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}} + 2b\frac{\partial\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}}}{\partial b}\right) + 4\pi b\,(\varphi\cos l)^{(n)}\\ &\quad + C\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}} + 2b\frac{\partial\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}}}{\partial b}\right)\\ &+ b\frac{\partial}{\partial b}\left\{\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}} + 2b\frac{\partial\frac{L_1^{(n)}}{b^{n+1}}}{\partial b} + 4\pi b\,(\varphi\cos l)^{(n)}\right.\\ &\quad \left. + C\left(\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}} + 2b\frac{\partial\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}}}{\partial b}\right)\right\}\frac{1}{r_1}\cdot\frac{\partial r_1}{\partial x_1}\\ &\quad + \ldots,\end{aligned}\right\} = 0$$

und die Summe dieser Gleichungen giebt ganz dasselbe, wie die Bedingung für die äussere Oberfläche. Es ist nicht nöthig, sie erst hinzuschreiben, man braucht nur U an die Stelle von $\frac{U_1^{(n)}}{b^{n+1}}$ zu setzen u. s. f. und es kann dann die Differentialgleichung wieder transformirt werden, indem man anstatt die Differentialquotienten nach x_1, y_1, z_1 die nach x, y, z, d. h. nach den Coordinaten des Oberflächenpunktes in der Richtung von r_1 einführt. Man erhält dann als Gleichung für die innere Oberfläche:

$$57)\qquad 3q' + 2b\frac{\partial q'}{\partial b} + C\left(3\chi + 2b\frac{\partial \chi}{\partial b}\right) + 4\pi\left(3\varphi + b\frac{\partial \varphi}{\partial b}\right) = 0.$$

Hieraus ergiebt sich das ganze auf der inneren Oberfläche vorhandene φ und der Theil von χ, der sich nach den absteigenden Potenzen von r_1 entwickelt.

32. Diese Transformation der Gleichgewichtsbedingungen gründet sich wesentlich darauf, dass angenommen wurde, das χ enthielte in Gleichung 56) kein a und in 57) kein b weiter, als dass das Glied von der n. Ordnung bei der Reihenentwickelung nach den Kugelfunctionen a^n und $\frac{1}{b^{n+1}}$ als Factor hätte. Der Beweis dafür ist in der Schlussnummer geführt, und es handelt sich nun nur noch um die genaue Darstellung der Gleichungen, denen die Functionen genügen müssen. Die Functionen φ und χ müssen gewissen Bedingungen genügen. Diese bestehen wesentlich darin, dass

$$58)\qquad \frac{\partial \varphi}{\partial x}:\frac{\partial \varphi}{\partial y}:\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \chi}{\partial x}:\frac{\partial \chi}{\partial y}:\frac{\partial \chi}{\partial z}.$$

Diese lässt sich in andere Formen bringen. Geht man von jedem Molekul nach allen Seiten in den Richtungen fort, die in der Ebene des betreffenden Molekularstromes liegen, so erhält man lauter einzelne Flächen, und ist s eine beliebige in einer solchen liegende Linie, so muss $\frac{\partial \chi}{\partial s} = 0$ sein, ebenso $\frac{\partial \varphi}{\partial s}$, und es sind daher auf jeder solchen Fläche χ und φ constant. Den beiden Gleichungen 58) müssen die Functionen φ und χ genügen; aber da in den Gleichungen 57) und 58) nur die χ und φ auftreten, die auf den Oberflächen stattfinden, so reducirt sich die Bedingung 58) auf eine, und die zweite der aus diesen zu entwickelnden Forderungen wird nöthig sein, um das φ für die inneren Massenpunkte zu entwickeln.

Für eine massive Kugel sind die Verhältnisse hierdurch äusserst einfach gemacht. Da dann gar keine Gleichung 57) existirt, indem gar keine innere Oberfläche vorhanden ist, so ist das in 56) auftretende χ der Gesammtwerth der Function. Denkt man sich nun auf der Oberfläche die Linien gezogen, in denen q' constant ist, so muss in diesen auch φ und χ *constant* bleiben. Da nun χ der Gleichung

$$\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \chi}{\partial z^2}=0$$

genügt, so ist χ auch für jeden inneren Punkt bekannt und wegen 58) auch φ; man sieht also die Möglichkeit der Lösung ein.

Wenn aber eine Hohlkugel gegeben ist, so werden die in 56) eingehenden φ und χ b und die in 57) eingehenden a enthalten können; diese Gleichungen einzeln würden also noch unbestimmte Werthe der Functionen liefern. Es müssen aber diese Werthe in gewissen gegenseitigen Beziehungen stehen, welche die Lösung vervollständigen müssen.

Wir haben vier unbekannte Functionen: das φ der äusseren Oberfläche und das der inneren, welches φ' sein soll. Ferner der Theil von χ, der sich nach den aufsteigenden, und der Theil, der sich nach den absteigenden Potenzen von r_1 entwickelt. Der erstere sei $\chi(r_1)$, der zweite $\chi'(r_1)$. Die beiden Gleichgewichtsbedingungen sind dann, wenn auch q der nach aufsteigenden Potenzen, q' der nach absteigenden Potenzen zu entwickelnden Theil der früher mit q' allein bezeichneten Function ist:

$$3q+2a\frac{\partial q}{\partial a}+C\left(3\chi(a)+2a\frac{\partial \chi(a)}{\partial a}\right)+4\pi\left(3\varphi+a\frac{\partial \varphi}{\partial a}\right)=0$$

$$3q'+2b\frac{\partial q'}{\partial b}+C\left(3\chi'(b)+2b\frac{\partial \chi'(b)}{\partial b}\right)+4\pi\left(3\varphi'+b\frac{\partial \varphi'}{\partial b}\right)=0$$

und dazu kommen die beiden Bedingungsgleichungen für die zwei Oberflächen:

$$59)\quad \left\{\begin{aligned}\frac{\partial \varphi}{\partial \psi}:\frac{\partial \varphi}{\partial \vartheta}&=\frac{\partial\{\chi(a)+\chi'(a)\}}{\partial \psi}:\frac{\partial\{\chi(a)+\chi'(a)\}}{\partial \vartheta}\\ \frac{\partial \varphi'}{\partial \psi}:\frac{\partial \varphi'}{\partial \vartheta}&=\frac{\partial\{\chi(b)+\chi'(b)\}}{\partial \psi}:\frac{\partial\{\chi(b)+\chi'(b)\}}{\partial \vartheta}\end{aligned}\right.$$

da die Differentialquotienten von φ und $\chi+\chi'$ nach zwei rechtwinkligen Richtungen einander proportional sein müssen.

Es scheint zunächst, als ob diese vier Gleichungen eine zu viel wären, indem wenn χ, χ', φ bekannt sind, φ' schon aus der Bemerkung folgt, dass φ constant ist, durch die ganze Masse, so lange $\chi+\chi'$ constant ist. Man könnte aber sich φ' aus den vier Gleichungen eliminirt denken, χ, χ', φ berechnet und dann müsste φ' aus dieser Bemerkung folgern. Offenbar müsste dies φ' der zweiten Gleichung genügen, es muss sich also auch umgekehrt aus diesen vier Gleichungen χ, χ', φ, φ' so bestimmen lassen, dass dieser Bedingung Genüge geleistet wird.

33. Wir kommen nun zu einem der wichtigsten Punkte dieser Theorie, auf welchem die vorige Verwandlung in endliche Differentialgleichungen beruht, dass nämlich der analytische Ausdruck von χ unabhängig von a, der von χ' unabhängig von b ist. Wir betrachten χ, da die Entwickelungen für χ' ganz ähnlich sind. Gehen wir auf Nr. 26 zurück, so ist dort bewiesen, dass es erlaubt ist, die ursprüngliche Gleichung in drei zu verwandeln. Die *erstere derselben lautet*:

$$(2n+1)\, L^{(n)} a^n + 4\pi a\, (\varphi \cos \psi)^{(n)} + C\, (2n+1)\, U^{(n)} a^n = 0.$$

Die Summe aller für $n = 0$ bis $n = \infty$ giebt:

$$L + 2a \frac{\partial L}{\partial a} + 4\pi a\, \varphi \cos \psi + C\left(u + 2a \frac{\partial u}{\partial a}\right) = 0.$$

Aehnliche Gleichungen bestehen noch zwei und es folgt aus ihnen:

$$L + 2a \frac{\partial L}{\partial a} + C\left(u + 2a \frac{\partial u}{\partial a}\right) : M + 2a \frac{\partial M}{\partial a} + C\left(v + 2a \frac{\partial v}{\partial a}\right)$$

$$: N + 2a \frac{\partial N}{\partial a} + C\left(w + 2a \frac{\partial w}{\partial a}\right) = \cos \psi : \sin \psi \cos \vartheta : \sin \psi \sin \vartheta.$$

Nennt man nun L, M, N, u, v, w die Componenten von q' und χ, so sieht man hieraus, dass die Componenten nach den Richtungen ψ und ϑ verschwinden. Die nach der Richtung von a von der Summe $q' + C\chi$ ist, wie in 26) bewiesen ist:

$$L \cos \psi + M \sin \psi \cos \vartheta + N \sin \psi \sin \vartheta,$$
$$+ C\, (u \cos \psi + v \sin \psi \cos \vartheta + w \sin \psi \sin \vartheta)$$

und es ist daher:

60) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial a}\{L \cos \psi + \ldots + C(u \cos \psi + \ldots)\} = \dfrac{\partial}{\partial x}(L + Cu) + \dfrac{\partial}{\partial y}(M + Cv) \\ \qquad\qquad + \dfrac{\partial}{\partial z}(N + Cw). \end{cases}$$

Daraus folgt zunächst auch, dass

61) $$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\left[\dfrac{\partial (L + Cu)}{\partial a}\right] + \dfrac{\partial}{\partial y}\left[\dfrac{\partial (M + Cv)}{\partial a}\right] + \dfrac{\partial}{\partial z}\left[\dfrac{\partial (N + Cw)}{\partial a}\right] = \\ \dfrac{\partial}{\partial a}\left[\dfrac{\partial (L + Cu)}{\partial x} + \dfrac{\partial (M + Cv)}{\partial y} + \dfrac{\partial (M + Cw)}{\partial z}\right] = \dfrac{\partial}{\partial a}[q' + C\chi], \end{cases}$$

wobei jedoch bemerkt werden muss, dass die Differentialquotienten nach x, y, z z. B. von $U^{(n)} a^n$, $V^{(n)} a^n$, $W^{(n)} a^n$ nicht auf die in $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ enthaltenen a ausgedehnt werden dürfen, da sonst nicht

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = q'$$

gesetzt werden dürfte.

Die Gleichung 61) folgt sofort aus der Bemerkung, dass L, M, N, u, v, w ebenso transformirt werden, wie

$$\frac{\partial L}{\partial a}, \frac{\partial M}{\partial a} \text{ etc.}$$

Aus 60) folgt daher, wenn die Differentialquotienten in der eben angegebenen Weise genommen werden:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(L + 2a \frac{\partial L}{\partial a}\right) + C \frac{\partial}{\partial x}\left(u + 2a \frac{\partial u}{\partial a}\right) + \ldots$$
$$= 3q' + 2a \frac{\partial q'}{\partial a} + C\left(3\chi + 2a \frac{\partial \chi}{\partial a}\right).$$

Dehnt man die Differentialquotienten aber auch auf die in $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ enthaltenen a aus, so ist dieser Ausdruck:

$$62)\quad 3q' + 2a\frac{\partial q'}{\partial a} + C\left\{3\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right] + 2a\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right]\right\},$$

indem man von $L^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ bestimmt weiss, dass sie kein a enthalten. Nur wenn die Induction von a abhängig ist, wenn sich mehrere Kugeln gegenüber stehen, ist dies nicht der Fall, und dann ist in dem letzten Ausdrucke auch q' zu ersetzen durch

$$\frac{\partial L}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial z},$$

welches dann verschieden von q' ist; denn die Gleichungen 60) und 61) gelten auch dann noch. Die Differentialquotienten nach a in 62) sind nur auf die Factoren a^n von $L^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$, $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ auszudehnen.

Wir kommen nun zum eigentlichen Beweis.

Es ist evident, dass

$$\frac{\partial L_1^{(n)} r_1^n}{\partial x_1} = L^{(n-1)} r_1^{n-1} = \left(\frac{\partial L_1}{\partial x_1}\right)^{(n-1)} r_1^{n-1},$$

also die Summe:

$$\Sigma(2n+1)\frac{\partial L_1^{(n)} r_1^n}{\partial x_1} = 2r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\partial L}{\partial x_1}\right) + 3\frac{\partial L_1}{\partial x_1},$$

oder vielmehr genauer:

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\Sigma(2n+1)L_1^{(n)} r_1^n + \frac{\partial}{\partial y_1}\Sigma(2n+1)M_1^{(n)} r_1^n + \frac{\partial}{\partial z_1}\Sigma(2n+1)N_1^{(n)} r_1^n$$
$$= 2r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left[\frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_1}{\partial y_1} + \frac{\partial N_1}{\partial z_1}\right] + 3\left[\frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial M_1}{\partial y_1} + \frac{\partial N_1}{\partial z_1}\right]$$

ist, und dass $L^{(n-1)}$ eine Kugelfunction von der Ordnung $n-1$ ist, wenn $L_1^{(n-1)}$ kein r_1 enthält. Sobald dies aber wäre, ist auch nicht mehr die letzte Gleichung richtig. Schreibt man x, y, z statt x_1, y_1, z_1, so kommt a an die Stelle von r_1, die Indices 1 fallen weg. Umgekehrt, gilt die letzte Gleichung, so muss $L_1^{(n)}$, $M_1^{(n)}$, $N_1^{(n)}$ unabhängig von r_1, oder $L^{(n)}$, $M^{(n)}$, $N^{(n)}$ unabhängig von a sein. Aus 62) folgt daher, dass

$$L^{(n)},\ M^{(n)},\ N^{(n)},\ U^{(n)},\ V^{(n)},\ W^{(n)}$$

so beschaffen sein müssen, dass stets

$$L^{(n)} + CU^{(n)},\ M^{(n)} + CV^{(n)},\ N^{(n)} + CW^{(n)}$$

unabhängig von a sind. Für den Fall einer einzigen gegebenen Kugel sind also $U^{(n)}$, $V^{(n)}$, $W^{(n)}$ unabhängig von a, der Ausdruck χ also auch.

Es ist daher für jeden Fall erlaubt:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[L + 2a\frac{\partial L}{\partial a} + C\left(u + 2a\frac{\partial u}{\partial a}\right)\right] + \frac{\partial}{\partial y}\text{ etc.} = 3q' + 2a\frac{\partial q'}{\partial a} + C\left(3\chi + 2a\frac{\partial \chi}{\partial a}\right)$$

zu setzen; für den Fall einer einzigen Kugel ist es dann gleich, wie die Differentiation nach a genommen wird; aber sind mehrere gegeben, so ist mit $\frac{\partial q}{\partial a}$ und $\frac{\partial \chi}{\partial a}$ die Veränderung von q und χ in der Nähe der Oberfläche einer Kugel vom festen gegebenen Radius a gemeint, denn diese Differentiation schreibt sich *vom Factor n* her.

Aus 59) folgt das χ eines inneren Massenpunktes noch mit einer willkürlichen Function, die so zu bestimmen ist, dass

$$\left(\frac{\partial \chi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \chi}{\partial z}\right)^2 = 1\ (= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)$$

(unter χ hier die ganze Function, also eigentlich $\chi + \chi'$ verstanden).

Dies kann Alles nur als Andeutung des Weges zur Lösung betrachtet werden. Die Hauptsache ist immer nur die Herleitung dieser allgemeinen Eigenthümlichkeiten der Function χ und χ'.

Ist die Oberfläche anders als kuglich, so ist die Aufgabe ungleich verwickelter. Dann ist $\frac{1}{R}$ auch für innere Punkte in eine Reihe von der Form $\Sigma \frac{P_n}{r_1^{n+1}}$ oder $\Sigma P_n r_1^n$ zu entwickeln, je nachdem $r_1 >$ oder $< r$. Man würde dann lieber $\frac{1}{R}$ nach den Potenzen des Parameters entwickeln, der jedem inneren Punkte zukommt, wenn man concentrische Flächen zur Oberfläche legt, wie dies von Neumann für Rotationsellipsoide gezeigt worden ist.

Kleinere Mittheilungen.

XIV. Ueber einige Integralformeln. Wir betrachten im Folgenden das bestimmte Integral

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\lambda+\mu x)^n\,dx,$$

wobei λ, μ, n, p, q beliebige Constanten bezeichnen mögen. Um dasselbe zu transformiren, setzen wir

$$\frac{(\lambda+\mu)x}{\lambda+\mu x}=y,$$

woraus folgt

$$x=\frac{\lambda y}{\lambda+\mu-\mu y},\quad 1-x=\frac{(\lambda+\mu)(1-y)}{\lambda+\mu-\mu y},$$
$$\lambda+\mu x=\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu-\mu y},\qquad dx=\frac{\lambda(\lambda+\mu)}{\lambda+\mu-\mu y}dy,$$

und erhalten

$$1)\quad \left\{\begin{aligned}&\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}(\lambda+\mu x)^n\,dx\\ &=\lambda^{p+n}(\lambda+\mu)^{q+n}\int_0^1\frac{y^{p-1}(1-y)^{q-1}\,dy}{(\lambda+\mu-\mu y)^{p+q+n}}.\end{aligned}\right.$$

In dem speciellen Falle $n=-(p+q)$ führt diese Formel zu dem bekannten Resultate

$$\int_0^1\frac{x^{p-1}(1-x)^{q-1}}{(\lambda+\mu x)^{p+q}}dx=\frac{1}{\lambda^q(\lambda+\mu)^p}\cdot\frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

dagegen scheinen andere Fälle unbeachtet geblieben zu sein, obschon dieselben sehr brauchbare Relationen liefern. So hat man z. B. für $p=\frac{1}{2}$, $n=m-\frac{1}{2}$

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}(1-x)^{q-1}(\lambda+\mu x)^{m-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lambda^m(\lambda+\mu)^{q+m-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{y}}\,\frac{(1-y)^{q-1}}{(\lambda+\mu-\mu y)^{q+m}},$$

oder für $x = t^2$ und $y = u^2$:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 (1-t^2)^{q-1}(\lambda+\mu t^2)^{m-\frac{1}{2}}\,dt \\ &= \lambda^m(\lambda+\mu)^{q+m-\frac{1}{2}}\int_0^1 \frac{(1-u^2)^{q-1}\,du}{(\lambda+\mu-\mu u^2)^{q+m}}. \end{aligned}\right.$$

Sind nun q und m positive oder negative ganze Zahlen, so ist das stehende Integral irrational, das rechter Hand befindliche dagegen nal, z. E.:

$$3)\quad \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{\lambda+mt^2}} = \sqrt{\lambda+\mu}\int_0^1 \frac{du}{\lambda+\mu-\mu u^2},$$

$$4)\quad \int_0^1 \sqrt{\lambda+\mu t^2}\,dt = \lambda\sqrt{(\lambda+\mu)^3}\int_0^1 \frac{du}{(\lambda+\mu-\mu u^2)^2},$$

oder auch:

$$5)\quad \int_0^1 \sqrt{\lambda+mt^2}\,dt = \frac{\sqrt{\lambda+\mu}}{2}\left\{1+\lambda\int_0^1 \frac{du}{\lambda+\mu-\mu u^2}\right\},$$

$$6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int_0^1 \sqrt{(\lambda+\mu t^2)^3}\,dt = \lambda^2\sqrt{(\lambda+\mu)^5}\int_0^1 \frac{du}{(\lambda+\mu-\mu u^2)^3} \\ &= \frac{\sqrt{\lambda+\mu}}{8}\left\{2(\lambda+\mu)+3\lambda+3\lambda^2\int_0^1 \frac{du}{\lambda+\mu-\mu u^2}\right\} \end{aligned}\right.$$

u. s. w.

Diese Formeln leisten bei der Reduction mancher doppelten und fachen Integrale gute Dienste, denn man hat in ihnen ein Mittel, u wisse irrationale Integrale durch gleichgeltende rationale Integrale setzen, was begreiflicherweise für die weitere Rechnung ein Vorth Einige Beispiele mögen dies zeigen.

Die Oberfläche des Ellipsoides mit den Halbachsen a, b, c wi kanntlich durch folgendes Doppelintegral ausgedrückt:

$$\Omega = 8ab\int_0^1\int_0^{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi\, d\eta \sqrt{\frac{1-\alpha^2\xi^2-\beta^2\eta^2}{1-\xi^2-\eta^2}},$$

$$\alpha=\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},\quad \beta=\frac{\sqrt{b^2-c^2}}{b},$$

welches nach Einführung von Polarcoordinaten ($\xi = r\cos\omega$, $\eta = r\sin\omega$) übergeht in

$$\Omega = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 r\, d\omega\, dr \sqrt{\frac{1-(\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\sin^2\omega)\,r^2}{1-r^2}}.$$

Benutzt man die Substitutionen

$$\sqrt{1-r^2}=t,$$

$$\lambda = 1-\alpha^2\cos^2\omega-\beta^2\sin^2\omega,\quad \mu=\alpha^2\cos^2\omega+\beta^2\sin^2\omega,$$

so erhält man

$$7)\qquad \Omega = 8ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{\lambda+\mu t^2}\, d\omega\, dt,$$

und hier kann man eine der Formeln 4) oder 5) anwenden. Die letztere giebt

$$\Omega = 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\omega\left\{1+\lambda\int_0^1\frac{du}{\lambda+\mu-\mu u^2}\right\}$$

$$= 4ab\left[\frac{\pi}{2}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1\frac{\lambda\, d\omega\, du}{\lambda+\mu-\mu u^2}\right];$$

durch umgekehrte Anordnung der Integrationen und Restitution der Werthe von λ und μ wird hieraus

$$\Omega = 4ab\left[\frac{\pi}{2}+\int_0^1 dt\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\alpha^2)\cos^2\omega+(1-\beta^2)\sin^2\omega}{(1-\alpha^2u^2)\cos^2\omega+(1-\beta^2u^2)\sin^2\omega}\, d\omega\right],$$

d. i. wenn die auf ω bezügliche Integration ausgeführt wird

$$8)\qquad \Omega = 2\pi ab\left[1+\int_0^1\left\{\frac{1-u^2}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}}\right\}\frac{du}{u^2}\right].$$

Durch partielle Integration lässt sich diese Formel in die folgende überführen

$$9)\quad \Omega = 2\pi ab\int_0^1\left\{\frac{1-\alpha^2}{1-\alpha^2u^2}+\frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}\right\}\frac{du}{\sqrt{(1-\alpha^2u^2)(1-\beta^2u^2)}},$$

die man gleichfalls erhält, wenn man in Nr. 7) die Formel 4) benutzt. — Projicirt man den Mittelpunkt eines dreiachsigen Ellipsoides auf alle Berührungsebenen des letzteren, so bilden die Projectionen eine bekannte Fläche, deren Gleichung ist:

$$(x^2+y^2+z^2)^2 = a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2,$$

oder in Polarcoordinaten:

$$r^2 = a^2 \cos^2\vartheta + b^2 \sin^2\vartheta \cos^2\omega + c^2 \sin^2\vartheta \sin^2\omega;$$

für

$$\lambda = b^2\cos^2\omega + c^2\sin^2\omega, \quad \mu = a^2 - b^2\cos^2\omega - c^2\sin^2\omega$$

ist einfacher

$$r^2 = \lambda + \mu\cos^2\vartheta.$$

Das von der Fläche umschlossene Volumen bestimmt sich durch das Doppelintegral

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\lambda + \mu\cos^2\vartheta)^{\frac{3}{2}} \sin\vartheta \, d\omega \, d\vartheta,$$

welches für $\cos\vartheta = t$ folgende Gestalt annimmt:

$$V = \frac{8}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \sqrt{(\lambda+\mu t^2)^3}\, d\omega\, dt,$$

d. i. nach Nr. 6)

$$V = \frac{8}{3}\sqrt{(\lambda+\mu)^5}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{\lambda^2\, d\omega\, du}{(\lambda+\mu-\mu u^2)^3}.$$

Setzt man zur Abkürzung

10) $$\beta = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}, \quad \gamma = \frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a},$$

so erhält man bei umgekehrter Anordnung der Integrationen und vermöge der Werthe von λ und μ:

$$V = \frac{8}{3}a^3\int_0^1 du\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{[(1-\beta^2)\cos^2\omega + (1-\gamma^2)\sin^2\omega]^2}{[(1-\beta^2u^2)\cos^2\omega + (1-\gamma^2u^2)\sin^2\omega]^3}\, d\omega,$$

wo nun die Ausführung der auf ω bezüglichen Integration keine Schwierigkeiten hat. Um das Resultat kurz darstellen zu können, setzen wir

11) $$U_\beta = \frac{1-\beta^2}{1-\beta^2u^2}, \quad U_\gamma = \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma^2u^2},$$

und haben dann

12) $$V = \frac{\pi}{6}\frac{a^5}{bc}\int_0^1 (3U_\beta^2 + 2U_\beta U_\gamma + 3U_\gamma^2)\sqrt{U_\beta U_\gamma}\, du.$$

Auf gleiche Weise lässt sich die Cubatur aller Flächen bewerkstelligen, deren Gleichungen von der Form

$$(x^2+y^2+z^2)^{2m+2}=(Ax^2+By^2+Cz^2)^{2m-1}$$

sind. Durch Einführung von Polarcoordinaten erhält man nämlich

$$r^3=(A\cos^2\vartheta+B\sin^2\vartheta\cos^2\omega+C\sin^2\vartheta\sin^2\omega)^{m-\frac{1}{2}}$$

oder

$$r^3=(\lambda+\mu\cos^2\vartheta)^{m-\frac{1}{2}},$$

wobei

$$\lambda=B\cos^2\omega+C\sin^2\omega,\quad \mu=A-B\cos^2\omega-C\sin^2\omega$$

gesetzt worden ist. Für das Volumen

$$V=\tfrac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}r^3\sin\vartheta\,d\omega\,d\vartheta$$

ergiebt sich zufolge des Werthes von r und durch Substitution von $\cos\vartheta=t$

$$V=\tfrac{1}{3}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{1}(\lambda+\mu t^2)^{m-\frac{1}{2}}$$

und nach Anwendung von Formel 2) kann die auf ω bezügliche Integration immer ausgeführt werden. Schlömilch.

XV. Ueber einige algebraische Curven, von denen die Lemniscate ein specieller Fall ist. Von Prof. Barnaba Tortolini.

1. Nehmen wir zwei rechtwinklige Achsen der x und der y, und wählen wir den Coordinatenanfang zum Pol einer gewissen Curve. Ist r der Radiusvector und u der Winkel, welchen r mit der Achse der x einschliesst, so haben wir für die beiden Coordinaten x und y die Werthe

$$x=r\cos u$$
$$y=r\sin u.$$

Wenn wir nun die Neigung der Curve im Punkte (x,y) mit φ bezeichnen, so ist

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{dy}{dx},$$

woraus man durch Differentiation der vorstehenden Werthe von x und y findet

$$\operatorname{tang}\varphi=\frac{\sin u\,dr+r\cos u\,du}{\cos u\,dr-r\sin u\,du}.$$

Wenn man in diesem Ausdrucke Zähler und Nenner mit $\cos u$ und mit dr dividirt, so erhält man leicht

$$\frac{r\,du}{dr}=\frac{\operatorname{tang}\varphi-\operatorname{tang}u}{1+\operatorname{tang}\varphi\operatorname{taug}u}=\operatorname{tang}(\varphi-u)$$

oder auch

$$\cot(\varphi - u) = \frac{dr}{r\,du}.$$

Wie bekannt, ist $\varphi - u$ der Winkel, welchen die Tangente im Punkte (x,y) mit dem Radius r einschliesst. Es sei nun φ_1 die Neigung der Normalen gegen die Abscissenachse; dann hat man

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2} + \varphi,$$

folglich:

$$\cot(\varphi_1 - u) = -\frac{1}{\cot(\varphi - u)},$$

woraus sich

$$\tang(\varphi_1 - u) = -\frac{dr}{r\,du}$$

oder auch

$$\frac{dr}{r} = -du \tang(\varphi_1 - u)$$

ergiebt. Die linke Seite dieser Gleichung lässt sich integriren und auch die rechte Seite wird sich auf eine Quadratur zurückführen lassen, so oft φ_1 als Function von u gegeben ist.

2. Um eine recht einfache Anwendung davon zu machen, nehmen wir an, dass der Winkel φ_1 ein ungerades Vielfaches des Polwinkels u sei, setzen also

$$\varphi_1 = (2n+1)\,u$$

und erhalten dann

$$\frac{dr}{r} = -du \tang 2nu = \frac{d\cos 2nu}{2n\cos 2nu}$$

und daraus durch Integration

$$2n \log r = \log(\cos 2nu) + C.$$

Man bestimme die Constante in der Weise, dass $r = a$ wird, wenn $u = 0$ ist; dies liefert $C = 2n \log a$, und wenn man daher vom Logarithmus auf den Numerus zurückgeht, findet man schliesslich

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2nu.$$

Die algebraischen Curven, welche in dieser Gleichung enthalten sind, wurden — nicht allein für eine gerade Zahl $2n$, sondern auch für eine ungerade Zahl — von den Mathematikern studirt und besonders von Serret behandelt in mehreren Noten, welche im 7. und 8. Bande des Journals von Liouville stehen; wenn man ihre Gleichung unter der allgemeinen Form

$$r^m = a^m \cos mu$$

darstellt, so besitzt sie die Eigenthümlichkeit, dass das Product aus den m Entfernungen irgend eines ihrer Punkte von m fixen Punkten constant ist. Wie Jedermann sieht, erhält man für $n = 1$ oder $m = 2$ die *Lemniscate*.

Bleiben wir bei dem Falle eines geraden Exponenten $2n$ stehen, so hat ebenfalls Serret gezeigt, dass die Perimeter dieser Curven alle ausgedrückt werden können durch die Euler'schen Integrale zweiter Gattung, oder durch die Function Γ von Legendre.

3. Die bisjetzt erwähnten Curven waren bereits Gegenstand vieler analytischen Untersuchungen von Fagnano in seinen *Producioni matematiche* Bd. 2, *schediasma* 1 und folgende Seite 375, woselbst er sich vornimmt, „jene Curven zu finden, bei denen der Winkel, welchen eine der sämmtlich „von einem und demselben Punkte ausgehenden Sehnen mit der Achse ein„schliesst, in dem gegebenen Verhältnisse zweier Zahlen zu dem Winkel „steht, welchen die Normale*) zu der Curve mit derselben Achse ein„schliesst." So hat man für $n=1$ die Lemniscate, bei welcher der von den Normalen mit der Achse $2a$ gebildete Winkel das Dreifache des von der Sehne gebildeten Winkels beträgt, und als algebraische Gleichung erhält man

$$(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2).$$

Fagnano findet noch eine andere Curve von derselben Eigenschaft, welche der x Axe ihre convexe Seite zukehrt. Für $n=2$ erhält man die Curve von der Polargleichung

$$r^4=a^4\cos 4u.$$

Am Coordinatenanfang sind die Tangenten gegen die Achse unter dem Winkel $\frac{\pi}{8}$ geneigt, da für $r=0$ sich $4u=\frac{\pi}{2}$ ergiebt**). Die algebraische Gleichung ist vom 8. Grade; durch die Einführung der Sinus und Cosinus der einfachen Winkel bekommt man nämlich

$$r^4=a^4(\cos^4 u-6\sin^2 u\cos^2 u+\sin^4 u),$$

woraus wegen der Werthe von r, $\sin u$ und $\cos u$ die Gleichung

$$(x^2+y^2)^4=a^4(x^4-6x^2y^2+y^4)$$

fliesst, welche Fagnano gleichfalls an der angeführten Stelle Seite 384 gefunden hat. Bei dieser Curve ist der Winkel, welchen die Normale mit der Achse einschliesst, das Fünffache von dem Polwinkel u. Wenn wir von der allgemeinen Form der Polargleichung vom Grade $2n$ zu der algebraischen Gleichung für x und y übergehen wollen, so steigt der Grad der neuen Gleichung auf $4n$, und, wenn wir uns der Formeln mit anscheinend imaginären Grössen bedienen, dann nimmt ihre algebraische Gleichung

---

*) Offenbar ist die Normale am Endpunkte der Sehne gemeint, während der Anfangspunkt der Sehnen unter 1) als Coordinatenanfang benutzt war.

**) Also wie die Sehnen selbst; es ist $\varphi=\varphi_1-\frac{\pi}{2}=(2n+1)u-\frac{\pi}{2}$, in dem vorliegenden Falle $n=2$, demnach $\varphi=5u-\frac{\pi}{2}$ und endlich für $r=0$ wird $u=\frac{\pi}{8}$ und $\varphi=5\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{8}$.

eine sehr einfache Form an; wir haben nämlich nach dem Moivre'schen Satze

$$2 \cos 2nu = (\cos u + i \sin u)^{2n} + (\cos u - i \sin u)^{2n},$$

worin $i = \sqrt{-1}$ ist, und setzen wir auf der rechten Seite

$$\cos u = \frac{x}{r},$$

$$\sin u = \frac{y}{r},$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

so findet sich

$$\cos 2nu = \frac{1}{2} \frac{(x+iy)^{2n} + (x-iy)^{2n}}{r^{2n}}$$

und demnach wird die algebraische Gleichung der Curve sein:

$$(x^2 + y^2)^{2n} = \frac{a^{2n}}{2}\left((x+iy)^{2n} + (x+iy)^{2n}\right).$$

Die Annahme $n = 1$, $n = 2$ liefert wieder die oben betrachteten Curven, und wenn man weiter $n = 3$ nehmen will, erhält man folgende Gleichung vom 12. Grade:

$$(x^2 + y^2)^6 = a^6 (x^6 - 15 x^4 y^2 + 15 x^2 y^4 - y^6).$$

In derselben Weise wird man für andere Werthe von n algebraische Curven von noch höherem Grade bekommen.

4. Die allgemeine Rectification dieser Familie von Curven hängt ab von einer particularen Form der Euler'schen Integrale erster Gattung, welche, wie Legendre nachgewiesen hat, in einigen besonderen Fällen auf transcendente elliptische erster Gattung sich zurückführen lassen. Rechnen wir den Werth von

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 du^2}$$

für die Rectification der Curven aus für den Fall, dass

$$r^{2n} = a^{2n} \cos 2nu$$

ist, so hat man ohne Schwierigkeit

$$ds = \frac{a^{2n}\, dr}{\sqrt{a^{4n} - r^{4n}}}$$

oder

$$s = a^{2n} \int \frac{dr}{\sqrt{a^{4n} - r^{4n}}}.$$

Setzt man $r = az$, $dr = a\,dz$ und integrirt zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = 1$, so hat man für den vierten Theil des ganzen Umfangs:

$$s = a \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1 - z^{4n}}}.$$

In den speciellen Fällen $n = 1$, $n = 2$ und $n = 3$ werden die Integrale, *wie Legendre* gezeigt hat, transcendente elliptische der ersten Gattung;

sie lassen sich nach Serret auch durch die ΓIntegrale von Legendre oder durch das Euler'sche Integral zweiter Gattung ausdrücken.

(*Annali di Matematica pura ed applicata.* Nr. 3. S. 178.)

XVI. Bedingung der Stabilität eines auf dem Gipfel einer Fläche ruhenden Körpers. Von Dr. R. Hoppe.

Das Gleichgewicht eines Körpers, der bei horizontaler Berührungsebene auf einer Fläche ruht, erfordert, dass sein Schwerpunkt auf der gemeinsamen Normale liegt. Die Oberfläche des Körpers sei mit der unterliegenden Fläche in gleichem Sinne genommen, so dass gleiche Vorzeichen der Krümmung einer Berührung von innen, ungleiche einer Berührung der convexen Seiten von aussen entsprechen.

Wird nun der Körper aus der Gleichgewichtslage um unendlich wenig zur Seite gewälzt, so hebt sich der anfängliche Unterstützungspunkt P und gelangt nach P_1, während der Berührungspunkt als solcher um das Bogenelement ds in beliebiger Richtung längs der Fläche nach P_0 rückt. Sei nun dv der Winkel zwischen den Normalen, $d\tau$ der Winkel zwischen den Tangenten in P und P_0, so dass $\frac{d\tau}{ds}$ die Krümmung von ds ausdrückt, dann sind die Cosinus der Richtungswinkel der Normale in P gegen die Normale, Tangente und ihr gemeinschaftliches Loth in P_0 folgende:

$$\cos dv;\quad d\tau;\quad \sqrt{dv^2 - d\tau^2}.$$

Bezeichnet ferner a die halbe Summe, b die halbe Differenz der Hauptkrümmungen in P, und φ den Winkel zwischen ds und der Tangente der grössten Krümmung, so ist nach bekannten Formeln

$$d\tau = (a + b\cos 2\varphi)\, ds,$$

$$dv = ds\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos 2\varphi},$$

woraus

$$\sqrt{dv^2 - d\tau^2} = b\sin 2\varphi\, ds,$$

$$\cos dv = 1 - \tfrac{1}{2}dv^2 = 1 - \left(\frac{a^2+b^2}{2} + ab\cos 2\varphi\right) ds^2.$$

Demnach haben die Cosinus der Richtungswinkel der Normale in P folgende Werthe:

$$1 - \left(\frac{a^2+b^2}{2} + ab\cos 2\varphi\right) ds^2,$$

$$(a + b\cos 2\varphi)\, ds,$$

$$b\sin 2\varphi\, ds.$$

Die Cosinus der Richtungswinkel der Normale in P_1 ergeben sich hieraus, indem man für a, b, φ die analogen Grössen a_1, b_1, φ_1 setzt. Aus beiden Systemen erhält man auf bekannte Weise den Cosinus des Winkels zwischen beiden Normalen. Dieser ist von der Form

$$1 - M\, ds^2,$$

wo

$$M=\frac{a^2+b^2+a_1^2+b_1^2}{2}-aa_1\pm(a-a_1)(b\cos 2\varphi-b_1\cos 2\varphi_1)$$
$$-bb_1\cos 2(\varphi-\varphi_1),$$

oder, wenn man

$$\alpha=\varphi-\varphi_1;\ \vartheta=\varphi+\varphi_1,$$
$$C=(b-b_1)\cos\alpha\cos\vartheta-(b+b_1)\sin\alpha\sin\vartheta$$

setzt,

$$M=\frac{(a-a_1)^2+b^2+b_1^2}{2}-bb_1\cos 2\alpha\pm C(a-a_1).$$

Ist nun h der Abstand des Schwerpunktes von P_1, so erhält man die Höhe desselben in der geneigten Stellung, indem man zur Projection dieses Abstandes auf die Verticale

$$h(1-M\,ds^2)$$

den Verticalabstand der Punkte P_1 und P addirt. Letzterer lässt sich als gleich dem vollen Abstande rechnen, weil die Bewegung des Punktes P_1 vertical beginnt, und der Abstand selbst unendlich klein von zweiter Ordnung ist; und ist somit die Differenz der Abstände beider Punkte von der Berührungsebene, d. i.

$$=\frac{d\tau-d\tau_1}{2}ds,$$
$$=\tfrac{1}{2}(a+b\cos 2\varphi-a_1-b_1\cos 2\varphi_1)\,ds^2,$$
$$=\tfrac{1}{2}(a-a_1+C)\,ds^2,$$

daher die Höhe des Schwerpunktes über P

$$=h+\tfrac{1}{2}\Big\{a-a_1+C-\big((a-a_1)^2+b^2+b_1^2-2bb_1\cos 2\alpha$$
$$+2C(a-a_1)\big)h\Big\}ds^2.$$

Die Lage des Körpers ist stabil, wenn der Coefficient von ds^2 für jeden Werth von ϑ positiv ist. Das Minimum desselben entspricht einem Maximum oder Minimum von C, welches stattfindet für

$$tg\,\vartheta=-\frac{b+b_1}{b-b_1}\,tg\,\alpha.$$

Nach Einführung dieses Werthes wird

$$C=\pm\sqrt{b^2+b_1^2-2bb_1\cos 2\alpha}.$$

daher ist die Bedingung der Stabilität

$$a-a_1+C-(a-a_1+C)^2h>0.$$

Diese Grösse kann nur positiv sein, wenn es der von h freie Theil ist, oder wenn $h<0$; jedenfalls wird die Bedingung

[illegible] $+C$ [illegible]

das ist fü[illegible]tives h

[illegible] $a-a_1$ [illegible] $b_1\cos 2\alpha.$

Hieraus ist ersichtlich, dass die Stabilität am grössten ist, wenn die gleichnamigen Hauptnormalschnitte auf einander fallen, am kleinsten, wenn der Schnitt von grösster Krümmung in der einen Fläche der von kleinster in der anderen ist. Lässt man also den Körper sich um die Verticale drehen, so hört die Stabilität nie auf, wenn

$$\frac{1}{h} > a - a_1 + b + b_1,$$

es tritt bei irgend einer Drehung Stabilität ein, wenn

$$\frac{1}{h} > a - a_1 + \sqrt{(b - b_1)^2}$$

und die Grenze der Stabilität findet statt für

$$\cos 2\alpha = \frac{b^2 + b_1^2 - \left(a - a_1 - \frac{1}{h}\right)^2}{2bb_1}.$$

XVI. Wärmeleitungsfähigkeit des Wasserstoffgases. Nach einer vorläufigen Mittheilung von Magnus (Ber. d. k. preuss. Akad. d. W. 1860, S. 485) ist das Wasserstoffgas ein guter Wärmeleiter. Bisher hatte man bei Gasen die Wärmefortpflanzung ausser ihrer Diathermansie der leichten Beweglichkeit ihrer Theilchen zugeschrieben. Da nun weder im Ausdehnungscoefficienten noch in der relativen Wärme des Wasserstoffgases eine Ursache zu einer grösseren Beweglichkeit der Wasserstofftheilchen, anderen Gasen gegenüber, zu finden ist, so vermuthete Magnus eine gute Leitungsfähigkeit bei diesem Gase. Er fand diese Vermuthung bei seinen Experimenten mit einem Apparate bestätigt, bei welchem eine auf der Temperatur von 100° C. erhaltene Platte von oben Wärme auf die Kugel eines Thermometers strahlte, welches in einem unter der Platte befindlichen Raume befestigt war. Die Temperatur, welche von diesem Thermometer angezeigt wurde, war am höchsten, wenn der Raum mit Wasserstoffgas angefüllt war, höher, als wenn der Raum mit irgend einem anderen Gase gefüllt oder luftleer war, die Temperatur des Thermometers war übrigens um so höher, je dichter das angewendete Wasserstoffgas war. In allen übrigen Gasen ist die Temperatur niedriger, als im leeren Raume und um so niedriger, je dichter sie angewendet werden. — Nicht nur die Wärme, sondern auch die Elektricität wird von Wasserstoffgas besser, als von allen übrigen Gasen geleitet.

Dieses Verhalten des Wasserstoffgases gegen die Wärme erklärt nun auch die Beobachtung von Grove, wonach ein Platindraht durch den galvanischen Strom schwerer zum Glühen gebracht wird, wenn er von Wasserstoff, als wenn er von einer anderen Gasart umgeben ist.

XVII. Verbesserung eines Elektroskops. Von Dr. F. Dellmann. Das von Dr. Kohlrausch unter meinem Namen bekannt gemachte Elektrometer wurde von mir zuerst nur als Elektroskop gebraucht. In meiner Hauptabhandlung darüber im Programm des Kreuznacher Gymnasiums vom Jahre 1842 sprach ich am Schlusse die Hoffnung aus, das Instrument zu Messungen brauchbar machen zu können, da seine Construction zu dieser Hoffnung berechtigte. Andere naturwissenschaftliche Studien aber, zu denen die interessante, mir damals noch neue Gegend mich verleitete, liessen mich diese Hoffnung nicht verwirklichen, und erst die vortrefflichen Abhandlungen von Kohlrausch gaben mich der Physik zurück, der ich acht Jahre untreu gewesen. In der ersten neuen Abhandlung vom Jahre 1852 (Pogg. Annalen Bd. 86, S. 524 ff.), in der ich die Reconstruction des Messinstrumentes beschrieb, glaubte ich darauf aufmerksam machen zu müssen, dass es zweckmässig sei, fortan mein Elektrometer vom Elektroskop zu unterscheiden, weil das letztere eine wesentlich einfache Construction*), aber doch auch einen Theil hat, welcher dem Elektrometer fehlt. Ich wusste damals keine Hauptverbesserung des Elektroskops anzugeben, und jetzt, nach jahrelangem häufigen Gebrauche des Elektrometers hat dieses mich zu einer bedeutenden Verbesserung des Elektroskops gebracht, welche ich im Nachfolgenden beschreiben will. Die Verbesserung trifft eben jenen Theil, welchen das Elektrometer nicht hat, den ich aber schon in der ersten Abhandlung: „Ueber das Oersted'sche Elektrometer" (Pogg. Annalen Bd. 55, S. 307) beschrieb, und den Andriessen damals zur Erhöhung der Empfindlichkeit auch des Goldblatt-Elektroskops benutzte. Ich habe ihn den Querdrath genannt, weil er quer unter dem Streifchen her- und dann an der Seite in die Höhe und isolirt durch den Deckel, oder auch unten von der Seite durch das Glas geht. Er soll eine Nachahmung des Princips des Säulen-Elektroskops vermitteln, nämlich einen leichten Körper, welcher von 2 Kräften bereits von entgegengesetzten Seiten afficirt wird, durch Unterstützung einer der beiden zur Bewegung zu bringen. Und in der That entsprach der Erfolg ganz der Erwartung, da das Instrument durch den Querdrath bedeutend an Empfindlichkeit gewonnen hatte.

*) In ein cylindrisches Trinkglas, durch dessen hölzernen Deckel in der Mitte ein Korkstöpsel geht mit einem ein paar Zoll langen Dräthchen in der Richtung der Achse, an dessen unterem Ende mit Schellack ein Coconfaden befestigt ist, welcher unten ein plattgeklopftes, ganz dünnes Dräthchen (Messing-Saite Nr. 12) trägt mit einer solchen Biegung, dass es an die beiden Seiten eines isolirt horizontal ausgespannten Streifchens (von etwa 2 Zoll Länge und 1 Linie Breite) von Metallpapier oder dünnem Metallblech mit seinen beiden Hälften anschlagen kann — in dies Glas führt von aussen mit Schellack eingeklebt ein kurzer (von 2 bis 4 Zoll Länge nach der Einrichtung des Ganzen) etwas dickerer Drath, dessen inneres Ende mit einer feinen Säge eingeschnitten ist zur Aufnahme des Streifchens. Dies ist der Zuleitungsdrath und er dient dazu, dem Inneren des Apparates die Elektricität zuzuführen. Man kann ihn durch den Deckel leiten und dann bleibt er gerade, oder durch das Glas, welches zu diesem Zwecke in der Nähe des Bodens durchbohrt ist, und dann wird er am inneren Ende aufwärts gebogen.

Mit einem abgeriebenen Pfenning konnte man recht gut den Volta'schen Fundamental-Versuch machen. Wenn man den Querdrath elektrisirt, so wirkt dessen Elektricität vertheilend auf Streifchen und Wagebalken, bindet in beiden die entgegengesetzte Elektricität, während dem die gleichnamige durch Auflegung des Fingers auf den Zuleitungsdrath abgeleitet wird. Durch die gebundene Elektricität wird der Wagebalken abgestossen, der aber auch durch die entgegengesetzte des Querdraths angezogen wird und so zwischen beiden schwebt, während die Torsion möglichst klein dabei gehalten werden muss. Der Zug vom Querdrath wirkt aber gar zu leicht störend; denn ist er zu stark, so stellt sich der Wagebalken parallel über den Querdrath und ist dann nur zurückzuholen durch dessen Entladung. Auch verliert der Querdrath in feuchter Luft zu schnell seine Elektricität, und die etwas lästige Ladung desselben muss dann ebenfalls auf's Neue vollzogen werden.

Diesen Uebeln wird abgeholfen durch Umformung des Querdraths in eine Querplatte von 1½ bis 2 Zoll Durchmesser. Unter dem Streifchen, in 1 bis 2 Linien Entfernung von demselben, sitzt jetzt eine kreisförmige Metallplatte, entweder an einen aufwärts durch den Deckel gehenden Drath gelöthet, oder an einen seitwärts durch das Glas geleiteten. Die Platte ist eine Nachbildung des unteren Theilkreises meines Elektrometers. Wie dieser die Ursache ist, dass das Messinstrument nach meiner Construction die Elektricität so gut festhält, dass nach der Ladung ein Zurückgehen des Wagebalkens gewöhnlich erst nach Stunden merklich wird, so wollte ich durch die Platte beim Elektroskop zunächst auch dem öfteren Laden dieses Hilfsapparates vorbeugen, habe aber weit mehr erreicht; denn das lästige Herumschlagens ist dadurch auch vollständig beseitigt, ohne dass die Empfindlichkeit gelitten hätte. Jetzt sind es also hauptsächlich die 2 Kräfte, nämlich die gebundene Elektricität und die Torsion, welche den Wagebalken nach entgegengesetzten Richtungen treiben. In dieser Form liefert das Instrument beim Gebrauche auch einen reinen Beweis für die Biot'sche Theorie der Vertheilung auf einem isolirten Leiter. Die Ladung des Hilfsapparates ist ebenfalls durch die neue Einrichtung erleichtert worden, und bei der Anwendung ist das ganze Instrument bequemer dadurch, dass man jetzt den Wagebalken kann unbesorgt gehen lassen, wogegen man früher, wenn er sich vom Streifchen entfernte, schnell den Finger auf den Zuleitungsdrath legen musste, damit er nicht zu weit ging bis zur Parallel-Stellung mit dem Querdrath. Der Versuch mit dem Pfenning ist jetzt jeden Augenblick auch in der feuchtesten Luft zu machen. Ja die dreizöllige Zinkplatte, auf welche ich ihn stelle, zeigt noch ganz deutlich die + Elektricität. In diesem Zustande ist das Instrument ganz besonders geeignet zur Darstellung des Volta'schen Fundamentalversuchs, und überhaupt zu allen Experimenten, in denen sehr geringe Elektricitäten zur Anschauung gebracht werden sollen. Eine Kupfer- oder Zinkplatte nur eben auf die

Hand gedrückt, zeigen sich schon ziemlich stark — elektrisch, von ebenem Holz nur aufgehoben, ebenfalls; ebenso Kork, welcher auf Holz gelegen.

Will man den Apparat noch weiter treiben in der Bequemlichkeit seines Gebrauches, so elektrisire man die Querplatte andauernd mit dem Pol einer Säule. Zu elektrischen Versuchen, besonders zu Messungen, ist eine kleine Wasserbatterie (Zink und Kupfer) von 50 bis 100 Elementen so wesentlich, dass man zu der Zeit, wo man überhaupt elektrische Versuche macht, dieselbe öfter brauchen muss, weshalb man wohl thut, sie gleich anfangs einzustellen und stehen zu lassen. Bekanntlich kann sie Monate lang stehen, ohne ihre Dienste zu versagen. So kann man denn auch beim Gebrauche des Elektroskops dieselbe zweckmässig zur Elektrisirung der Querplatte verwenden. Uebrigens hält diese, wenn die Isolirung frisch ist, die Elektricität jetzt so gut, dass man in einer Stunde das Elektrisiren derselben nicht zu wiederholen braucht; und ist die Isolation nicht mehr gut, so ist ja ein einmaliges Erhitzen des Drathes, an den die Querplatte gelöthet worden, in der Spirituslampe hinreichend, das Uebel zu beseitigen.

Auf welche Weise man die Querplatte auch elektrisiren möge, man muss nie unterlassen, während der Zeit dies stattfindet, den Finger auf dem Zuleitungsdrathe zu halten, um so die freie Elektricität abzuleiten. Ist die im Streifchen und Wagebalken gebundene Elektricität + Elektricität, hat man also z. B. die Querplatte mit Kork, welcher auf Tuch gerieben worden, elektrisirt, so wird der Wagebalken durch + Elektricität zum weiteren Abstossen, durch — Elektricität zum Annähern gebracht. Durch Entziehung der dem Zuleitungsdrathe mitgetheilten Elektricität geht der Wagebalken wieder an seine ursprüngliche Stelle zurück. Das Elektroskop ist erst brauchbar zu Versuchen, wenn bei der Auflegung des Fingers auf den Zuleitungsdrath der Wagebalken keine Bewegung, aber bei der Annäherung oder Berührung mit entgegengesetzt elektrischen Körpern entgegengesetzte Bewegungen macht.

Es sind mir Abbildungen des Apparates zu Gesicht gekommen, welche auf dem Deckel ein Glasrohr zeigen zur Verlängerung des Coconfadens. So wesentlich dies Rohr beim Elektrometer zu dem angedeuteten Zwecke ist, so schädlich ist es beim Elektroskop. Ein Coconfaden von 3 bis 4 Zoll Länge ist vollkommen ausreichend und ein längerer schadet nur, insofern er die Bewegungen des Wagebalkens verlangsamt, also weniger deutlich hervortreten lässt. Drei Exemplare des Instrumentes, welche die oben angegebenen Erscheinungen fast gleich deutlich zeigen, stehen vor mir und haben alle einen Faden von höchstens 3 Zoll Länge. Sie sind aber alle drei verschieden construirt. Bei dem einen gehen beide, Zuleitungsdrath und Querplatten-Halter, durch den Deckel hinunter, bei dem anderen geht der Zuleitungsdrath von oben, der andere Drath aber unten von der Seite hinein, beim dritten ist es umgekehrt. Ich ziehe das zweite vor, weil seine Einrichtung gestattet, Zuleitungsdrath und Querplatten-

Halter jeden beliebigen Winkel mit einander bilden zu lassen. Dadurch hat man es also in seiner Gewalt, seine Einwirkung zu steigern und zu schwächen. Richtet man ihn dem Zuleitungsdrathe gerade entgegen, so schwächt man die Empfindlichkeit des Apparetes, was natürlich ist, da die eine Hälfte des Wagebalkens, welche dann über dem Halter schwebt, von entgegengesetzten Kräften nach derselben Seite gezogen wird. Uebrigens hat es auch eine kleine Unbequemlichkeit, das äussere Ende des Zuleitungsdrathes oben zu haben, wo in geringer Entfernung auch der Drath steckt, an dem der Coconfaden hängt. Man muss dann genauer zusehen, dass man beim Elektrisiren beide Dräthe nicht verwechselt.

Mechaniker und Herausgeber physikalischer Lehrbücher bitte ich, von dem Vorstehenden Notiz nehmen zu wollen, insbesondere aber auch Lehrer der Physik, wenn es ihnen darum zu thun ist, ihren Schülern eine Menge elektrischer Versuche ohne Zeitverlust zu zeigen und mit möglichst geringen Kosten. In der neuen Form ist das Instrument jedenfalls das bequemste, empfindlichste, sicherste und billigste Elektroskop. Die vielseitige Anwendung desselben habe ich schon in der erwähnten Programm-Abhandlung vom Jahr 1842 gezeigt.

Ueber das Elektrometer weiss ich seit der Zeit, wo ich Wagebalken und Streifchen ganz gerade gelassen (Pogg. Annalen Bd. 89, S. 269) von keiner erheblichen Verbesserung zu berichten. Ich habe es vor ein paar Jahren versucht, dem Instrumente eine Einrichtung zu geben, dass man es statt des Sinus-Elektrometers gebrauchen kann. Vom Wagebalken geht in der Mitte vertical ein feiner Platindrath herunter, welcher in ein kleines Näpfchen mit einer gut leitenden Flüssigkeit taucht. Zwei Flügel des Näpfchens, nach entgegengesetzten Seiten gerichtet, vertreten das Streifchen. Für schwere Wagebalken, wie sie zur Messung bedeutender Quantitäten erforderlich sind, ist die Einrichtung ganz passend; ich sehe indess aus den Berliner Berichten (Jahrgang 14, S. 379), dass schon 1858 in einem Briefe an Volpicelli W. Thomson denselben Vorschlag gemacht hat. Auch habe ich das Instrument transportabel gemacht in ähnlicher Weise, wie Herr Prof. Hankel zu demselben Zwecke sein Instrument einrichtete. Es gehen nämlich von entgegengesetzten Seiten zwei dicke Dräthe mit breiten Köpfen im Inneren in das Messinggefäss hinein; sie können durch Stellschrauben festgeklemmt werden. Die Köpfe fassen den Wagebalken und halten ihn beim Transport fest. Papierschäufelchen sind unten an den Rand der Köpfe geklebt zur Aufnahme des Wagebalkens. Den Glasfaden schraubt man etwas herunter nach dem Festklammern des Wagebalkens. Vor zwei Jahren schon sind zwei Instrumente mit dieser Vorrichtung nach Amerika abgegangen, das eine an die *Smithsonian Institution*, das andere an Herrn Dr. Wislicenus in St. Louis.

XIX. Ueber ein neues, dem Kalium nahe stehendes Metall. (Berichte der k. preuss. Akad. d. Wissenschaften 1860, S. 221.) Bunsen und Kirchhoff haben durch die Spectralanalyse nicht nur gezeigt, dass das Lithium ein sehr verbreitetes Metall ist, sondern es hat sich auch ihre Vermuthung bestätigt, dass sich bei Anwendung dieser analytischen Methode vielleicht neue, bis jetzt noch nicht bekannte Metalle durch die Eigenthümlichkeit ihres Spectrums zu erkennen geben würden. Sie fanden nämlich in der Mutterlauge verschiedener Soolwässer noch ein viertes Alkalimetall, dessen Dasein sie zunächst auf Grund ihrer spectral-analytischen Versuche vermuthen konnten. Das Chlorid des neuen Metalles, welches nur in sehr geringer Menge in den Mutterlaugen gewisser Soolwässer vorkommt, giebt mit Chlorplatinlösung ebenso wie Chlorkalium einen gelben Niederschlag, allein das salpetersaure Salz des neuen Metalles ist in Alkohol löslich, während Salpeter darin unlöslich ist.

IX.

Das Sehnenviereck in der Ebene und auf der Kugel als besonderer Fall des allgemeinen Vierecks.

Von Prof. C. W. Baur,
an der königl. polytechnischen Schule zu Stuttgart.

Unter XII der kleineren Mittheilungen im 4. Jahrgange dieser Zeitschrift habe ich eine Gruppe von Beziehungen zwischen den Seiten, Diagonalen und Winkeln des ebenen Vierecks veröffentlicht, welche die Verallgemeinerung der Hauptsätze vom ebenen Sehnenvierecke in sich schliesst.

In Folgendem beabsichtige ich, eine weitere Verallgemeinerung dieser Art aus jenen Beziehungen abzuleiten, sodann aber die sphärischen Analogieen der letzteren aufzustellen.

Bezeichnet man, wie dort geschehen, mit a und a', b und b' die zwei Paare von Gegenseiten, mit c und c' die Diagonalen, oder allgemeiner gesagt, mit a und a', b und b', c und c' die drei Paare von Gegenseiten des ebenen Vierecks in solcher Auswahl, dass c einen hohlen Winkel (a, b) zwischen a und b theilt, a', b', c' aber ein Dreieck bilden, so lauten jene Beziehungen, wenn nur ausspringende Winkel angenommen werden:

$$1)\quad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\sin\{(b,c')-(b',c)\}}{aa'} = \frac{\sin\{(b',c')-(b,c)\}}{aa'} \\ &= \frac{\sin\{(a,c')-(a',c)\}}{bb'} = \frac{\sin\{(a',c')-(a,c)\}}{bb'} \\ &= \frac{\sin\{(a,b)+(a',b')\}}{cc'} = -\frac{\sin\{(a,b')+(a',b)\}}{cc'}. \end{aligned} \right.$$

Ich erlaube mir, den Satz, durch welchen ich diese Gleichungen in Worten darstellte, weil er am angeführten Orte durch einen sinnstörenden Druckfehler entstellt war, hier zu wiederholen:

Beschreibt man die sechs Kreise um je drei Ecken eines Vierecks, so sind die drei positiven Quotienten aus dem Product zweier Gegenseiten und dem Sinus des Unterschieds

zweier Peripheriewinkel, welche auf einer von beiden in zwei nicht von ihr getrennten Bögen stehen, einander gleich.

Wichtiger aber erscheint für jetzt folgende Deutung der Gleichheit zwischen den drei vorderen Quotienten:

Setzen wir der Kürze halber:

$$(b,c') - (b',c) = \delta,\ (a,c') - (a',c) = \varepsilon,\ (a,b) + (a',b') = \eta,$$

so giebt die aus der Figur leicht ersichtliche Beziehung:

$$\delta + \varepsilon + \eta = 180^0$$

in Verbindung mit

$$\frac{aa'}{\sin\delta} = \frac{bb'}{\sin\varepsilon} = \frac{cc'}{\sin\eta}$$

die Winkel δ, ε, η als diejenigen eines Dreiecks zu erkennen, in welchem die Gegenseiten den Producten aa', bb', cc' proportionirt sind.

Von diesem Gesichtspunkt aus erscheint die früher angegebene Verallgemeinerung des Ptolemäischen Satzes:

$$cc' = aa' \cos\varepsilon + bb' \cos\delta$$

lediglich als das Ergebniss der Anwendung der trigonometrischen Formel

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha$$

auf das besagte Dreieck.

2. Die Anwendung der Formel

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

liefert ferner die folgenden drei Gleichungen:

$$a^2a'^2 = b^2b'^2 + c^2c'^2 - 2bb' \,.\, cc' \,.\, \cos\delta$$
$$b^2b'^2 = c^2c'^2 + a^2a'^2 - 2cc' \,.\, aa' \,.\, \cos\varepsilon$$
$$c^2c'^2 = a^2a'^2 + b^2b'^2 - 2aa' \,.\, bb' \,.\, \cos\eta.$$

Aus diesen ergiebt sich

$$2bb'\,.\,cc'\,(a^2+a'^2)\cos\delta + 2cc'\,.\,aa'\,(b^2+b'^2)\cos\varepsilon + 2aa'\,.\,bb'\,(c^2+c'^2)\cos\eta$$
$$= (a^2+a'^2)(b^2b'^2+c^2c'^2-a^2a'^2) + (b^2+b'^2)(c^2c'^2+a^2a'^2-b^2b'^2)$$
$$+ (c^2+c'^2)(a^2a'^2+b^2b'^2-c^2c'^2).$$

Vermöge der Beziehung, welche zwischen den sechs Seiten des Vierecks, d. h. zwischen den Abständen a, b, c eines Punktes von den Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a', b', c' und letzteren besteht*), geht die rechte Seite der vorigen Gleichung über in:

$$a'^2b'^2c'^2 + a'^2b^2c^2 + a^2b'^2c + a^2b^2c'^2.$$

Durch Division der ganzen Gleichung mit $abc\,.\,a'b'c'$ erhält man daher:

$$2)\quad \left\{\begin{aligned} &2\left(\frac{a}{a'}+\frac{a'}{a}\right)\cos\delta + 2\left(\frac{b}{b'}+\frac{b'}{b}\right)\cos\varepsilon + 2\left(\frac{c}{c'}+\frac{c'}{c}\right)\cos\eta \\ &= \frac{a'}{a}\cdot\frac{b'}{b}\cdot\frac{c'}{c} + \frac{a'}{a}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c}{c'} + \frac{a}{a'}\cdot\frac{b'}{b}\cdot\frac{c}{c'} + \frac{a}{a'}\cdot\frac{b}{b'}\cdot\frac{c'}{c}. \end{aligned}\right.$$

Im Sehnenviereck ist $\delta = 0$, $\varepsilon = 0$, $\eta = 180^0$, somit:

*) Mention führt dieselbe unter dem Namen *relation tétragonométrique de Goldbach* an.

$$0=\left(\sqrt{\frac{a'b'c'}{abc}}-\sqrt{\frac{a'bc}{ab'c'}}-\sqrt{\frac{ab'c}{a'bc'}}+\sqrt{\frac{abc'}{a'b'c}}\right)^2$$

oder

$$\frac{c'}{c}=\frac{a'b+ab'}{ab+a'b'}.$$

Zu diesem bekannten Satze vom Sehnenvierecke bietet also unsere Gleichung 2) die Verallgemeinerung dar.

3. Die sphärischen Analogien der Gleichungen 1) müssen sich von diesen hauptsächlich dadurch unterscheiden, dass nicht mehr sechs gleiche Quotienten auftreten können, weil die für das ebene Viereck giltigen Gleichungen

$$(b,c')-(b',c)=(b',c')-(b,c),\quad (a,c')-(a',c)=(a',c')-(a,c),$$
$$(a,b)+(a',b')=360^0-(a,b')-(a',b)$$

im sphärischen Vierecke nicht stattfinden. Es liegt nun aber der Gedanke nahe, dass anstatt der sechs gleichen Quotienten deren nur drei vorkommen werden, welche die Sinus folgender Winkel-Ausdrücke enthalten:

$$\frac{(b,c')-(b',c)+(b',c')-(b,c)}{2},\quad \frac{(a,c')-(a',c)+(a',c')-(a,c)}{2},$$
$$\frac{(a,b)+(a',b')+360^0-(a,b')-(a',b)}{2},$$

die wir nun in der Folge mit δ, ε, η bezeichnen werden. Diese sind es in der That, von welchen im sphärischen Sehnenvierecke die zwei ersteren verschwinden, der dritte aber in 180^0 übergeht, weil z. B.

$$(b,c')-(b',c)+(b',c')-(b,c)=(b,c')-(b',c)+(a,b')-(a,c')-(a,b)+(a,c)$$
$$=\{(a,b')+(a,c)-(b',c)\}-\{(a,b)+(a,c')-(b,c')\}.$$

Die zwei Glieder der letzteren Differenz nämlich sind vermöge eines bekannten Satzes über zwei auf einerlei Grundlinie in denselben Kugelkreis beschriebene Dreiecke einander gleich.

Zum Zweck der Entwickelung der fraglichen Analogien müssen vorerst zwei Formeln der sphärischen Trigonometrie aufgestellt werden, unter denen meines Wissens bisjetzt nur die zweite und zwar von Schmeisser als eine seiner Fundamentalformeln bekannt gemacht worden ist. (Crelle, X, S. 146.)

4. Sind a, b, c die Seiten, α, β, γ die gegenüberliegenden Winkel eines sphärischen Dreiecks, so findet sich unter Anwendung der Gauss'schen Gleichungen:

$$3)\begin{cases}\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}-\sin\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\\ \qquad=\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}-\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}\\ \qquad=\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}-\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\cdot\cos\alpha.\end{cases}$$

$$4)\quad\left\{\begin{aligned}\sin\frac{a}{2}\,.\cos\frac{\alpha-\beta+\gamma}{2} &= \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}\\ &= \sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}\\ &= \sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin\alpha.\end{aligned}\right.$$

Man bemerkt, dass beim Uebergang vom sphärischen Dreiecke auf das ebene durch Annahme eines unendlich grossen Kugelhalbmessers die zwei obigen Gleichungen sich als Correlate der zwei folgenden der ebenen Trigonometrie herausstellen:

$$a\cos\beta = c - b\cos\alpha,\quad a\sin\beta = b\sin\alpha.$$

Erinnert man sich ferner, dass bei der Entwickelung der Gleichung 1) eben diese Formeln vorzugsweise in Anwendung kamen, so kann über den Gang, der bei der Auffindung der fraglichen sphärischen Analogieen einzuschlagen ist, kein Zweifel mehr obwalten.

5. Es seien nun a und a', b und b', c und c' die drei Paare von Gegenseiten eines sphärischen Vierecks, in welchem keiner der Winkel (a,b), (b,a'), (a',b'), (b',a) und eben deshalb auch keine jener sechs Seiten 180° überschreitet, ferner c den Winkel (a,b) theilt, a', b', c' aber ein Dreieck bilden, so hat man vermöge der in 3. mit δ vorgenommenen Zerlegung und der Formeln 3) und 4):

$$\begin{aligned}&\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\delta\\ &\quad= \sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\left\{\frac{(a,b')+(a,c)-(b',c)}{2}-\frac{(a,b)+(a,c')-(b,c')}{2}\right\}\\ &\quad= \sin\frac{b'}{2}\sin\frac{(a,b')+(a,c)-(b',c)}{2}\,.\sin\frac{c'}{2}\cos\frac{(a,b)+(a,c')-(b,c')}{2}\\ &\qquad-\sin\frac{b'}{2}\,.\cos\frac{(a,b')+(a,c)-(b',c)}{2}\,.\sin\frac{c'}{2}\sin\frac{(a,b)+(a,c')-(b,c')}{2}\\ &\quad= \left\{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}-\sin\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\cos(a,c)\right\}.\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\sin(a,b)\\ &\qquad-\sin\frac{a}{2}\cos\frac{c}{2}\sin(a,c)\,.\left\{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}-\sin\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos(a,b)\right\}\\ &\quad= \sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\left\{\cos\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin(a,b)-\sin\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\sin(a,c)\right\}\\ &\qquad-\sin^2\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}\left\{\sin(a,b)\cos(a,c)-\cos(a,b)\sin(a,c)\right\},\end{aligned}$$

$$\frac{\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c'}{2}}{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}\,.\sin\delta = \tang\frac{c}{2}\sin(a,b)-\tang\frac{b}{2}\sin(a,c)-\tang\frac{a}{2}\sin(b,c).$$

In Folge der stets zulässigen Vertauschung von a und a' mit b und b' ändert sich die rechte Seite nicht, dagegen geht die linke über in:

$$\frac{\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{c'}{2}}{\sin\frac{b}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.\sin\varepsilon.$$

Endlich ist

$$\begin{aligned}2\eta &= (a,b)+(a',b')+360^\circ-(a,b')-(a',b)\\ &= 360^\circ+\{(a,c)+(b',c)-(a,b')\}+\{(a',c)+(b,c)-(a',b)\},\end{aligned}$$

also:

$$\begin{aligned}&\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\eta\\ &= -\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{(a,c)+(b',c)-(a,b')}{2}.\sin\frac{a'}{2}\cos\frac{(a',c)+(b,c)-(a',b)}{2}\\ &\quad -\sin\frac{b'}{2}\cos\frac{(a,c)+(b',c)-(a,b')}{2}.\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{(a',c)+(b,c)-(a',b)}{2}\\ &= -\left\{\cos\frac{c}{2}\sin\frac{a}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos(a,c)\right\}.\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\sin(b,c)\\ &\quad -\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\sin(a,c).\left\{\cos\frac{c}{2}\sin\frac{b}{2}-\sin\frac{c}{2}\cos\frac{b}{2}\sin(b,c)\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b'}{2}}{\sin\frac{c}{2}\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}.\sin\eta &= \tan\!g\,\frac{c}{2}\sin(a,b)-\tan\!g\,\frac{b}{2}\sin(a,c)\\ &\quad -\tan\!g\,\frac{a}{2}\sin(b,c).\end{aligned}$$

Es zeigen sich jetzt also die Gleichungen

$$5)\qquad \frac{\sin\delta}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}}=\frac{\sin\eta}{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}}$$

dadurch gerechtfertigt, dass sich der Ausdruck

$$6)\qquad \frac{\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}}{\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c'}{2}}\left\{\tan\!g\,\frac{c}{2}\sin(a,b)-\tan\!g\,\frac{b}{2}\sin(a,c)-\tan\!g\,\frac{a}{2}\sin(b,c)\right\}$$

als der gemeinschaftliche Werth der drei obigen Quotienten herausgestellt hat.

6. In den Gleichungen 5) sind nun die sphärischen Analogieen unserer für das ebene Viereck aufgestellten Beziehungen 1) gefunden. Dass sie sich beim Uebergang von der Kugel auf die Ebene in die letzteren verwandeln, ist unmittelbar ersichtlich, desgleichen dass sie für das sphärische Sehnenviereck, weil der Zähler jedes der drei Quotienten und folglich auch der gemeinschaftliche Werth 6) der letzteren Null wird, den Satz liefern:

$$tang\,\frac{c}{2}\,sin\,(a,b) = tang\,\frac{a}{2}\,sin\,(b,c) + tang\,\frac{b}{2}\,sin\,(a,c),$$

welcher die sphärische Analogie darbietet zu dem für das ebene Sehnenviereck giltigen:

$$c\,sin\,(a,b) = a\,sin\,(b,c) + b\,sin\,(a,c).$$

Er dient zur Bestimmung einer Diagonale c aus zwei in einer Ecke mit ihr zusammenstossenden Seiten nebst den Theilen, in welche sie den von denselben eingeschlossenen Winkel zerlegt.

Endlich geben unsere Gleichungen 5) in Verbindung mit der aus der Figur leicht nachweisbaren Beziehung

$$\delta + \varepsilon + \eta = 180^{\circ}$$

diese drei Winkel als diejenigen eines ebenen Dreiecks zu erkennen, in welchem die gegenüber liegenden Seiten den Producten

$$sin\,\frac{a}{2}\,sin\,\frac{a'}{2},\quad sin\,\frac{b}{2}\,sin\,\frac{b'}{2},\quad sin\,\frac{c}{2}\,sin\,\frac{c'}{2}$$

proportional sind. Und hieraus folgt nun wieder ein erweiterter Ptolemäischer Lehrsatz für das allgemeine sphärische Viereck:

7) $$sin\,\frac{c}{2}\,sin\,\frac{c'}{2} = sin\,\frac{a}{2}\,sin\,\frac{a'}{2}\,.\,cos\,\varepsilon + sin\,\frac{b}{2}\,sin\,\frac{b'}{2}\,.\,cos\,\delta,$$

welcher sich mit $cos\,\delta = 1$, $cos\,\varepsilon = 1$ in den bekannten Ptolemäischen Lehrsatz für das sphärische Sehnenviereck verwandelt.

Bevor an die in Betreff der Winkel δ, ε, η gemachte Bemerkung weitere Folgen angeschlossen werden, sollen sich unsere Gleichungen 5) noch auf einem anderen Wege herstellen, welcher vermöge der nebenbei auftretenden Ergebnisse von Bedeutung ist.

7. Der eine Durchschnittspunkt der beiden Grosskreise, welchen die Seiten b und b' angehören, liegt als Ecke der Seite a eines sphärischen Dreiecks gegenüber, in welchem dieser Seite die Winkel (a,b) und (a,b') anliegen, und der dritte Winkel in jener Ecke mit (b,b') anzugeben ist. Bezeichnet man mit Y und y die sphärischen Entfernungen derselben von den Endpunkten der Seite b, mit Y' und y' diejenigen von den Endpunkten der Seite b' in solcher Auswahl, dass

8) $$Y - y = b,\quad Y' - y' = b',$$

so giebt das Dreieck (y, c', Y') vermöge der Gauss'schen Gleichungen:

$$sin\,\frac{c'}{2}\,sin\,\frac{(b,c')+(b',c')}{2} = sin\,\frac{c'}{2}\,cos\,\frac{180^{\circ}-(b,c')-(b',c')}{2} = sin\,\frac{(b,b')}{2}\,sin\,\frac{Y'+y}{2}$$

$$sin\,\frac{c'}{2}\,cos\,\frac{(b,c')+(b',c')}{2} = sin\,\frac{c'}{2}\,sin\,\frac{180^{\circ}-(b,c')-(b',c')}{2} = cos\,\frac{(b,b')}{2}\,sin\,\frac{Y'-y}{2},$$

das Dreieck (Y, c', y'):

$$sin\,\frac{c}{2}\,sin\,\frac{(b',c)+(b,c)}{2} = sin\,\frac{c}{2}\,cos\,\frac{180^{\circ}-(b',c)-(b,c)}{2} = sin\,\frac{(b,b')}{2}\,sin\,\frac{Y+y'}{2}$$

$$sin\,\frac{c}{2}\,cos\,\frac{(b',c)+(b,c)}{2} = sin\,\frac{c}{2}\,sin\,\frac{180^{\circ}-(b',c')-(b,c)}{2} = cos\,\frac{(b,b')}{2}\,sin\,\frac{Y-y'}{2},$$

also:

$$\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\delta$$
$$=\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\frac{(b,c')+(b',c')-(b',c)-(b,c)}{2}$$
$$=\sin\frac{(b,b')}{2}\cos\frac{(b,b')}{2}\left(\sin\frac{Y'+y}{2}\sin\frac{Y-y'}{2}-\sin\frac{Y'-y}{2}\sin\frac{Y+y'}{2}\right)$$

9) $$\begin{cases}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\delta\\ =\sin(b,b').\left(\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{Y'}{2}\cos\frac{y'}{2}-\sin\frac{Y'}{2}\sin\frac{y'}{2}.\cos\frac{Y}{2}\cos\frac{y}{2}\right),\end{cases}$$

das Dreieck (a, Y, Y'):

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{(a,b')-(a,b)}{2}=\cos\frac{(b,b')}{2}\sin\frac{Y-Y'}{2}$$
$$\sin\frac{a}{2}\cos\frac{(a,b')-(a,b)}{2}=\sin\frac{(b,b')}{2}\sin\frac{Y+Y'}{2},$$

das Dreieck (a', y, y'):

$$\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{(a',b)-(a',b')}{2}=\cos\frac{(b,b')}{2}\sin\frac{y-y'}{2}$$
$$\sin\frac{a'}{2}\cos\frac{(a',b)-(a',b')}{2}=\sin\frac{(b,b')}{2}\sin\frac{y+y'}{2},$$

also:

$$\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\eta$$
$$=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\left\{180^0-\frac{(a,b')-(a,b)+(a',b)-(a',b')}{2}\right\}$$
$$=\sin\frac{(b,b')}{2}\cos\frac{(b,b')}{2}\left(\sin\frac{Y-Y'}{2}\sin\frac{y+y'}{2}+\sin\frac{Y+Y'}{2}\sin\frac{y-y'}{2}\right)$$

10) $$\begin{cases}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\eta\\ =\sin(b,b').\left(\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{Y'}{2}\cos\frac{y'}{2}-\sin\frac{Y'}{2}.\sin\frac{y'}{2}\cos\frac{Y}{2}\cos\frac{y}{2}\right).\end{cases}$$

Es wird zur Rechtfertigung der zwei folgenden Gleichungen, sowie zur Erklärung der darin gebrauchten Zeichen nichts weiter gesagt werden müssen, als dass durchgängig a und a' und b und b' vertauscht worden und X, x, X', x' an die Stelle von Y, y, Y', y' getreten sind.

11) $$\begin{cases}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\varepsilon=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\eta\\ =\sin(a,a')\left(\sin\frac{X}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{X'}{2}\cos\frac{x'}{2}-\sin\frac{X'}{2}\sin\frac{x'}{2}\cos\frac{X}{2}\cos\frac{x}{2}\right).\end{cases}$$

Bezeichnet man endlich die Abschnitte, in welche die Seiten c, c' einander zerlegen, mit Z, z, Z', z' in solcher Auswahl, dass

$$Z+z=c,\ Z'+z'=c'$$

und b mit Z und Z' ein sphärisches Dreieck bildet, in welchem ihr der Winkel (c,c') gegenüber liegt, so giebt eben dieses Dreieck (b, Z, Z'):

$$\sin\frac{b}{2}\sin\frac{(b,c')-(b,c)}{2}=\cos\frac{(c,c')}{2}\sin\frac{Z-Z'}{2}$$

$$\sin\frac{b}{2}\cos\frac{(b,c')-(b,c)}{2}=\sin\frac{(c,c')}{2}\sin\frac{Z+Z'}{2},$$

das Dreieck (b', Z, Z'):

$$\sin\frac{b'}{2}.\sin\frac{(b',c)-(b',c')}{2}=\cos\frac{(c,c')}{2}\sin\frac{z'-z}{2}$$

$$\sin\frac{b'}{2}.\cos\frac{(b',c)-(b',c')}{2}=\sin\frac{(c,c')}{2}\sin\frac{z'+z}{2},$$

also:

$$12)\quad\begin{cases}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\delta\\ =\sin\frac{(c,c')}{2}\cos\frac{(c,c')}{2}\left(\sin\frac{Z-Z'}{2}\sin\frac{z'+z}{2}-\sin\frac{Z+Z'}{2}\sin\frac{z'-z}{2}\right)\end{cases}$$

$$=\sin(c,c')\left(\sin\frac{Z}{2}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{Z'}{2}\cos\frac{z'}{2}-\sin\frac{Z'}{2}\sin\frac{z'}{2}\cos\frac{Z}{2}\cos\frac{z}{2}\right).$$

Ebenso durch Vertauschung von a, a', z' mit b, b', Z':

$$13)\quad\begin{cases}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\varepsilon\\ =\sin(c,c')\left(\sin\frac{Z}{2}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{Z'}{2}\cos\frac{z'}{2}-\sin\frac{Z'}{2}\sin\frac{z'}{2}\cos\frac{Z}{2}\cos\frac{z}{2}\right).\end{cases}$$

Die Gleichungen 10), 11), 12), 13) lassen sich jetzt in folgender Gruppe zusammenstellen:

$$\frac{\sin\delta}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}}=\frac{\sin\varepsilon}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}}=\frac{\sin\eta}{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}}$$

$$=\frac{\sin(a,a')}{\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}}.\left(\sin\frac{X}{2}\sin\frac{x}{2}\cos\frac{X'}{2}\cos\frac{x'}{2}-\sin\frac{X'}{2}\sin\frac{x'}{2}\cos\frac{X}{2}\cos\frac{x}{2}\right)$$

$$=\frac{\sin(b,b')}{\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}}.\left(\sin\frac{Y}{2}\sin\frac{y}{2}\cos\frac{Y'}{2}\cos\frac{y'}{2}-\sin\frac{Y'}{2}\sin\frac{y'}{2}\cos\frac{Y}{2}\cos\frac{y}{2}\right)$$

$$=\frac{(\sin(c,c')}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}}.\left(\sin\frac{Z}{2}\sin\frac{z}{2}\cos\frac{Z'}{2}\cos\frac{z'}{2}-\sin\frac{Z'}{2}\sin\frac{z'}{2}\cos\frac{Z}{2}\cos\frac{z}{2}\right).$$

Diese Gleichungen geben den Zusammenhang an, welcher im allgemeinen sphärischen Vierecke zwischen solchen Grössen stattfindet, welche vermöge bekannter Sätze im Sehnenvierecke sämmtlich verschwinden.

8. Um von unseren Gleichungen 5) dieselbe Anwendung zu machen,

welche in 2. von den Gleichungen 1) gemacht wurde, mit anderen Worten: um die für das sphärische Sehnenviereck giltige Beziehung

$$\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{c'}{2}}=\frac{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}+\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b'}{2}}{\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b'}{2}+\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}}$$

für das allgemeine sphärische Viereck zu erweitern, muss erst die Beziehung zwischen den sechs Seiten des letzteren, oder zwischen den sphärischen Abständen a, b, c eines Punktes von den Ecken eines Dreiecks mit den Seiten a', b', c' und den letzteren hergestellt werden.

Die schon in 2. gebrauchte entsprechende Beziehung in der Ebene habe ich unter XXIV der Kl. Mitth. im 5. Jahrg. dieser Zeitschrift in folgender Form angegeben:

$$0=\begin{vmatrix} 2a^2, & a^2+b^2-c'^2, & a^2+c^2-b'^2 \\ a^2+b^2-c'^2, & 2b^2, & b^2+c^2-a'^2 \\ a^2+c^2-b'^2, & b^2+c^2-a'^2, & 2c^2 \end{vmatrix}.$$

Vermittelst eines dort mehrfach in Anwendung gekommenen Verfahrens lässt sich dieselbe auch so schreiben:

$$14)\qquad 0=\begin{vmatrix} 0, & +1, & +1, & +1, & +1 \\ +1, & 0, & a^2, & b^2, & c^2 \\ +1, & a^2, & 0, & c'^2, & b'^2 \\ +1, & b^2, & c'^2, & 0, & a'^2 \\ +1, & c^2, & b'^2, & a'^2, & 0 \end{vmatrix}.$$

Durch Ausführung der Determinante erhält man:

$$15)\quad \left\{\begin{aligned} 0= & \;2(a^2+a'^2)(-a^2a'^2+b^2b'^2+c^2c'^2) \\ & +2(b^2+b'^2)(+a^2a'^2-b^2b'^2+c^2c'^2) \\ & +2(c^2+c'^2)(+a^2a'^2+b^2b'^2-c^2c'^2) \\ & -2a'^2b'^2c'^2-2a'^2b^2c^2-2a^2b'^2c^2-2a^2b^2c'^2. \end{aligned}\right.$$

Die Beziehung zwischen den Cosinus der sechs hohlen Winkel, welche durch vier von einem Punkte im Raum ausgehende Geraden gebildet werden, oder zwischen den Cosinus der sechs Seiten des sphärischen Vierecks wurde dort zwar nicht angeschrieben, aber durch die Gleichungen 12) und 15) zu folgender Form vorbereitet:

$$0=\begin{vmatrix} 1, & \cos a, & \cos b, & \cos c \\ \cos a, & 1, & \cos c', & \cos b' \\ \cos b, & \cos c', & 1, & \cos a' \\ \cos c, & \cos b'; & \cos a', & 1 \end{vmatrix}.$$

Hieraus folgt auch:

$$0=\begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1, & 1 \\ 1, & 0, & 1-\cos a, & 1-\cos b, & 1-\cos c \\ 1, & 1-\cos a, & 0, & 1-\cos c', & 1-\cos b' \\ 1, & 1-\cos b, & 1-\cos c', & 0, & 1-\cos a' \\ 1, & 1-\cos c, & 1-\cos b', & 1-\cos a', & 0 \end{vmatrix},$$

oder:

$$0=\begin{vmatrix} +2, & +1, & +1, & +1, & +1 \\ +1, & 0, & \sin^2\frac{a}{2}, & \sin^2\frac{b}{2}, & \sin^2\frac{c}{2} \\ +1, & \sin^2\frac{a}{2}, & 0, & \sin^2\frac{c'}{2}, & \sin^2\frac{b'}{2} \\ +1, & \sin^2\frac{b}{2}, & \sin^2\frac{c'}{2}, & 0, & \sin^2\frac{a'}{2} \\ +1, & \sin^2\frac{c}{2}, & \sin^2\frac{b'}{2}, & \sin^2\frac{a'}{2}, & 0 \end{vmatrix}.$$

Bei Vergleichung dieser Determinante mit derjenigen in 14) findet sich, dass man, um aus der Gleichung 15) die entsprechende sphärische abzuleiten, nicht nur überall die Seiten des ebenen durch die Sinus der halben Seiten des sphärischen Vierecks zu ersetzen, sondern auch noch auf der Rechten folgendes Glied doppelt beizufügen hat:

$$16)\quad \begin{vmatrix} 0, & \sin^2\frac{a}{2}, & \sin^2\frac{b}{2}, & \sin^2\frac{c}{2} \\ \sin^2\frac{a}{2}, & 0, & \sin^2\frac{c'}{2}, & \sin^2\frac{b'}{2} \\ \sin^2\frac{b}{2}, & \sin^2\frac{c'}{2}, & 0, & \sin^2\frac{a'}{2} \\ \sin^2\frac{c}{2}, & \sin^2\frac{b'}{2}, & \sin^2\frac{a'}{2}, & 0 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}+\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}-\sin^2\frac{c}{2}\,.\,\sin^2\frac{c'}{2}\right)^2$$

$$-4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}.$$

Vermöge 5) und 7) wird aber der Minuend dieser Differenz:

$$\left\{\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}+\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}-\left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\cos\varepsilon+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\delta\right)^2\right\}^2$$

$$=\left\{\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\varepsilon+\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\delta\right.$$

$$\left.-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\delta\cos\varepsilon\right\}^2$$

$$=\left\{2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\delta\sin\varepsilon-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\delta\cos\varepsilon\right\}^2$$

$$=4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\cos^2(\delta+\varepsilon)=4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\cos^2\eta$$

und der ganze Ausdruck 16):

$$-4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\eta,$$

wofür auch

$$-4 \sin\frac{a}{2} \sin\frac{a'}{2} \sin\frac{b}{2} \sin\frac{b'}{2} \sin^2\frac{c}{2} \sin^2\frac{c'}{2} \sin\delta \sin\varepsilon$$

gesetzt werden könnte. Wird jetzt Gleichung 15) mit 2 durchdividirt und 16) nur einfach beigefügt, so stellt sich als gesuchte Beziehung zwischen den sechs Seiten des sphärischen Vierecks folgende dar:

$$17)\left\{\begin{aligned} 0 = &\left(\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a'}{2}\right)\left(-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2}\right)\\ &+\left(\sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{b'}{2}\right)\left(+\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} - \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2}\right)\\ &+\left(\sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{c'}{2}\right)\left(+\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} - \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2}\right)\\ &-\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\frac{c'}{2} - \sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2} - \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\frac{c}{2}\\ &-\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c'}{2} - 4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\eta. \end{aligned}\right.$$

Sollte der Zweck es erfordern, dass nur die Seiten ohne η vorkämen, so hätte man auf die ursprüngliche Form des Ausdruckes 16) zurückzugreifen. Dass beim Uebergang von der Kugel auf die Ebene Gleichung 17) wieder in Uebereinstimmung mit 15) kommt, weil ihr letztes Glied als eines vom achten Grade neben denen des sechsten verschwindet, ist leicht ersichtlich.

9. Schreiben wir jetzt vermöge der in 5. gemachten Bemerkung folgende der Gleichungen an:

$$\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} = \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} + \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{c} - 2\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\cos\delta$$

$$\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} = \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} - 2\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\cos\varepsilon$$

$$\sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2} = \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2} - 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\eta,$$

so geben diese vermöge 17):

$$\begin{aligned} &2\left(\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{a'}{2}\right)\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\cos\delta\\ &+2\left(\sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{b'}{2}\right)\sin\frac{c}{2}\sin\frac{c'}{2}\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\cos\varepsilon\\ &+2\left(\sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{c'}{2}\right)\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\eta\\ = &\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\frac{c'}{2} + \sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2} + \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\frac{c}{2}\\ &+\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{c'}{2} + 4\sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\eta. \end{aligned}$$

Die Division mit dem Product der sechs Sinus der halben Seiten giebt nach einer nahe liegenden Umwandlung, welche vermöge 5) mit dem letzten Glied vorgenommen wird:

$$18)\quad \left\{\begin{aligned} & 2\left(\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a'}{2}}+\frac{\sin\frac{a'}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\right)\cos\delta+2\left(\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{b'}{2}}+\frac{\sin\frac{b'}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\right)\cos\varepsilon \\ & \qquad +2\left(\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{c'}{2}}+\frac{\sin\frac{c'}{2}}{\sin\frac{c}{2}}\right)\cos\eta \\ = & \frac{\sin\frac{a'}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{b'}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{c'}{2}}{\sin\frac{c}{2}}+\frac{\sin\frac{a'}{2}}{\sin\frac{a}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{b'}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{c'}{2}}+\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a'}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{b'}{2}}{\sin\frac{b}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{c}{2}}{\sin\frac{c'}{2}} \\ & \qquad +\frac{\sin\frac{a}{2}}{\sin\frac{a'}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{b}{2}}{\sin\frac{b'}{2}}\cdot\frac{\sin\frac{c'}{2}}{\sin\frac{c}{2}}+4\sin\frac{c}{2}\cdot\sin\frac{c'}{2}\sin\delta\sin\varepsilon. \end{aligned}\right.$$

Wie diese Gleichung mit $\delta=0$, $\varepsilon=0$, $\eta=180^\circ$ in die oben für das Sehnenviereck angegebene übergeht, erhellt aus dem in 2. vorgekommenen entsprechenden Uebergang für das ebene Viereck.

10. Die Fläche des sphärischen Vierecks.

Bezeichnet man mit A und B die Flächen oder die in Theilen des Halbmessers ausgedrückten Excesse der Dreiecke (a', b, c) und (a, b', c), so geben bekannte Formeln:

$$\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{A}{2}=\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\cos(b,c),$$

$$\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{B}{2}=\cos\frac{a}{c}\cos\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\cos(a,c),$$

$$\cos\frac{a'}{2}\sin\frac{A}{2}=\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2}\sin(b,c),$$

$$\cos\frac{b'}{2}\sin\frac{B}{2}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{c}{2}\sin(a,c),$$

daher, wenn mit V die Fläche des sphärischen Vierecks bezeichnet wird:

$$\begin{aligned} \cos\frac{a'}{2}\,\mathrm{bos}\frac{b'}{2}\cos\frac{V}{2} &= \cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b'}{2}\left(\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}-\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\right) \\ &= \cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin^2\frac{c}{2}\cos(a,b) \\ &\quad +\sin\frac{c}{2}\cos\frac{c}{2}\left\{\cos\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\cos(b,c)+\cos\frac{b}{2}\sin\frac{a}{2}\cos(a,b)\right\} \end{aligned}$$

oder:

19)

$$\begin{aligned} 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{V}{2} &= 4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2}+\sin^2\frac{c}{2}.\sin a\sin b\cos(a,b) \\ &\quad +\cos^2\frac{a}{2}.\sin b\sin c\cos(b,c)+\cos^2\frac{b}{2}.\sin a\sin c\cos(a,c). \end{aligned}$$

Hier wird nun:

$$\sin a \sin b \cos(a,b) = \cos c' - \cos a \,.\, \cos b$$
$$= -2 \sin^2 \frac{c'}{2} + 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\cos^2\frac{b}{2} - 4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{b}{2}$$
$$\sin b \sin c \cos(b,c) = \cos a' - \cos b \cos c$$
$$= 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\cos^2\frac{b}{2} + 2\cos^2\frac{c}{2} - 4\cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{c}{2} - 2$$
$$\sin a \sin c \cos(a,c) = \cos b' - \cos a \cos c$$
$$= 2\cos^2\frac{a}{2} + 2\cos^2\frac{b}{2} + 2\cos^2\frac{c}{2} - 4\cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{c}{2} - 2.$$

Dadurch nimmt Gleichung 19) folgende einfache Gestalt an:

$$20)\quad \begin{cases} 2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos\frac{V}{2} = \cos^2\frac{a}{2}\cos^2\frac{a'}{2} + \cos^2\frac{b}{2}\cos^2\frac{b'}{2} \\ \qquad - \sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2}. \end{cases}$$

Gleichung 7) giebt aber:

$$\sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2} = \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2} + \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}$$
$$+ 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos\delta\cos\varepsilon$$
$$- \sin^2\frac{a}{2}\sin^2\frac{a'}{2}\sin^2\varepsilon - \sin^2\frac{b}{2}\sin^2\frac{b'}{2}\sin^2\delta,$$

oder, wenn die zwei letzten Glieder vermöge der Gleichung 5) in

$$-2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\sin\delta\sin\varepsilon$$

zusammengezogen werden:

$$\sin^2\frac{c}{2}\sin^2\frac{c'}{2}$$
$$= \left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\right)^2 - 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}(1 - \cos\delta\cos\varepsilon + \sin\delta\sin\varepsilon)$$
$$= \left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\right)^2 - 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}.$$

Die Addition beider Seiten der Gleichung 20) zu

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}$$

giebt daher

$$4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos^2\frac{V}{4} = 4\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}$$
$$+ \left(\cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2} + \cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\right)^2 - \left(\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2} + \sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\right)^2$$

oder

$$21)\quad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\cos^2\frac{V}{4}=\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}$$
$$+\cos\frac{a+a'+b+b'}{4}.\cos\frac{a+a'-b-b'}{4}.\cos\frac{a-a'+b-b'}{4}$$
$$.\cos\frac{a-a'-b+b'}{4}.$$

Die Subtraction statt der Addition liefert:

$$22)\quad \cos\frac{a}{2}\cos\frac{a'}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{b'}{2}\sin^2\frac{V}{4}=-\sin\frac{a}{2}\sin\frac{a'}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{b'}{2}\cos^2\frac{\eta}{2}$$
$$+\sin\frac{-a+a'+b+b'}{4}.\sin\frac{a-a'+b+b'}{4}.\sin\frac{a+a'-b+b'}{4}$$
$$.\sin\frac{a+a'+b-b'}{4}.$$

Beim Uebergang auf das Sehnenviereck wird $\frac{\eta}{2}=90^\circ$, es stellen sich also die Formeln ein, welche nach einem Citat auf S. 379 in *Lecointe, Leçons, sur la théorie des fonctions circulaires* (*Paris, Mallet-Bachelier* 1858) im XII. Band der mir im Augenblick nicht zugänglichen. *Annales de Mathématiques* entwickelt sein sollen.

Wie diese Formeln auf diejenige des Simon Lhuilier führen, wenn man eine Seite des Vierecks verschwinden lässt, liegt am Tage.

Hiermit wird man die im II. Band von Grunert's Archiv im Jahre 1842 von Herrn Professor Dr. Strehlke aufgeworfene und in den neueren Jahrgängen wieder mannigfach zur Sprache gekommene Frage endgiltig beantwortet finden.

X.

Ueber die zweckmässigste Form der Spitzgeschosse.

Von W. H. von Rouvroy,
K. S. Generallieutenant.

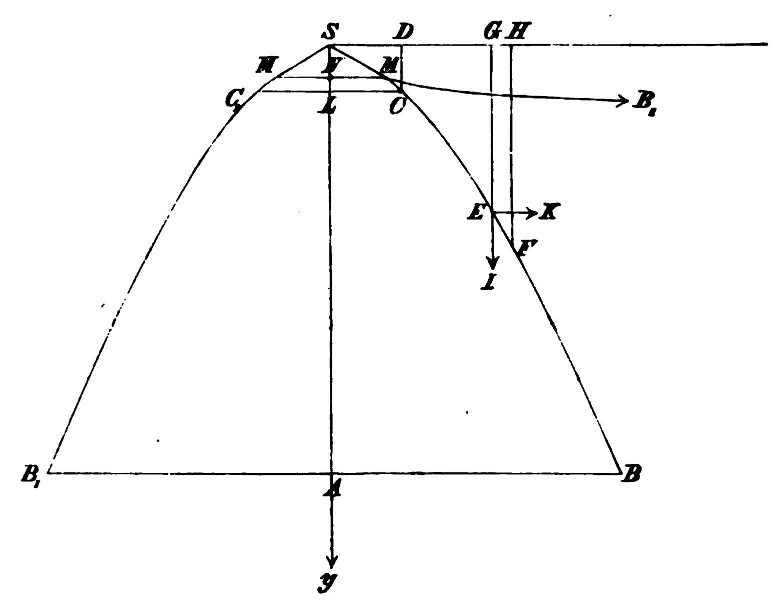
Die Anwendung von Spitzgeschossen bei den Feuerwaffen führte auf die Frage, bei welcher Gestalt ihrer Spitze dergleichen Geschosse den geringsten Widerstand von der Luft erleiden, und obgleich man diese Frage vorzugsweise auf dem Erfahrungswege zu lösen suchte, so fehlte es doch auch nicht ganz an Bemühungen zur Lösung derselben durch die Theorie. Zu letzteren gehört die Bearbeitung des in der Ueberschrift genannten Problems, und kann man diesem Gegenstande auch keine grosse Bedeutung für die Praxis beilegen, weil:

1) die Newton'sche Theorie über die Grösse und Richtung des Widerstandes der Luft sich in der Erfahrung nicht ausreichend zeigt, und
2) die Achsen der Spitzgeschosse nicht den allmäligen Veränderungen der Richtung der Bewegung folgen, sondern nach und nach immer grössere Winkel mit dieser Richtung bilden,

so führt doch die gedachte Untersuchung auf eigenthümliche Umstände, deren Mittheilung vielleicht nicht ganz ohne Interesse sein dürfte.

In dem Nachstehenden wird zu dieser Untersuchung ein rechtwinkliges Coordinatensystem (s. umstehende Figur) benutzt, dessen Achse der y die geometrische Achse des Geschosses ist, und dessen Anfangspunkt S von dem Geschoss aus nach der Richtung der Bewegung hin liegt. Der Halbmesser AB des mittleren cylindrischen Theiles am Geschoss sei die Einheit aller Längen, und in Beziehung auf diese Maasseinheit die Geschwindigkeit des Geschosses v, die Beschleunigung der Schwere g und das Gewicht der Raumeinheit Luft q. Es werde ferner zunächst nur im Allgemeinen der Widerstand W betrachtet, welcher die durch Umdrehung des Bogens BC um die Achse der y erzeugte Fläche BCC_1B_1 unter den im Eingang gedachten Voraussetzungen von der Luft erleidet.

Stellen hierbei SG und SH die Abscissen x und $x+dx$, GE und HF die zugehörigen Ordinaten zweier Punkte E und F der Erzeugungscurve vor,



und bezeichnet man den Winkel $KEF = 90^\circ - FEI$ mit β, w
sogleich:

$$1) \quad \begin{cases} tang\,\beta = \frac{dy}{dx} = p \\ \sin\beta = \frac{p}{\sqrt{1+p^2}} \\ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1+p^2}} = \sin FEI \end{cases}$$

folgt, so ist der Widerstand, welchen das durch Umdrehung von E
zeugte ringförmige Flächenelement in der Richtung der Bewegung erl

$$= 2x\pi \,.\, dx \,.\, \frac{v^2}{2g} \,.\, q \sin^2 FEI = \frac{\pi v^2 q}{g} \,.\, \frac{x}{1+p^2} dx.$$

Bezeichnet man daher die Coordinaten des Anfangspunktes C de
zeugenden SD mit b, DC mit c, und die zweite Coordinate des Endpu
B, SA mit h, so ist, da $AB = 1$ war:

$$2) \quad W = \frac{\pi v^2 q}{g} \int_b^1 \frac{x}{1+p^2} dx.$$

Soll W ein Kleinstes sein, so muss auch die Variation von W
werden, und betrachtet man b, c und h als gegebene unveränderliche
sen, so kann man, bei der Entwickelung von δW, δx durchgängig, u
da, wo dieselbe nach theilweiser Integration ausserhalb des Integı
chens vorkommt, Null gesetzt werden. Berücksichtigt man endlich
dass allgemein:

$$\delta \int X\,dx = \int \delta\,(X\,dx) \text{ und } \delta\,dy = \delta\,dy$$

ist, so ergiebt sich:

$$\frac{g}{2\pi v^2 q}\,\delta W = \int_b^1 \delta \left[\frac{\frac{1}{2}x}{1+p^2}\,dx\right] = \int_b^1 - \frac{px}{(1+p^2)^2}\,\delta p\,.\,dx$$

$$= \int_b^1 - \frac{px}{(1+p^2)^2}\,d\delta y = 0.$$

Durch theilweise Integration erhält man:

$$\int - \frac{px}{(1+p^2)^2}\,d\delta y = - \frac{px}{(1+p^2)^2}\,\delta y + \int d\left[\frac{px}{(1+p^2)^2}\right]\delta y,$$

was sich bei der Beziehung auf die festen Grenzen b und 1 des Integrals der obigen Bemerkung gemäss auf

$$\int_b^1 d\left[\frac{px}{(1+p^2)^2}\right]\delta y = 0$$

reducirt. Da nun δy willkürlich ist, so kann dieser Gleichung nur durch:

$$d\left[\frac{px}{(1+p^2)^2}\right] = 0$$

Genüge geschehen, woraus, wenn A eine noch zu bestimmende Constante bezeichnet,

$$3) \qquad \frac{px}{(1+p^2)^2} = A$$

folgt. Da x und p der Natur der Aufgabe nach positive veränderliche Grössen sind, so muss auch $A > 0$ sein. Aus der vorstehenden Gleichung folgt ferner

$$x = A\left[p^3 + 2p + \frac{1}{p}\right]$$

und die Coordinate x wird daher sowohl für $p = a$, d. h. $\beta = 90°$ als für $p = 0$, $\beta = 0$ unendlich gross. Um dagegen den kleinsten Werth zu finden, welchen x annehmen kann, hat man:

$$\frac{d\left[p^3 + 2p + \frac{1}{p}\right]}{dp} = 3p^2 + 2 - \frac{2}{p^2} = 0$$

oder

$$p^4 + \tfrac{2}{3}p^2 = \tfrac{1}{3}$$

und die einzige positive reelle Wurzel dieser Gleichung ist

$$p = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

welcher

$$\beta = 30° \text{ und } p^3 + 2p + \frac{1}{p} = \frac{16}{3\sqrt{3}}$$

entspricht. Es wird daher bequemer sein, zu der weiteren Untersuchung die Constante

4) $$A = \frac{3\sqrt{3}}{16} r$$

zu setzen, wodurch die Gleichung 3) in

5) $$\frac{x}{r} = \frac{3\sqrt{3}}{16} \frac{(1+p^2)^2}{p} = \frac{3\sqrt{3}}{16}\left(p^3 + 2p + \frac{1}{p}\right)$$

übergeht. Aus dieser Gleichung lassen sich nun in Bezug auf die gesuchte Curve nachstehende wichtige Folgerungen ziehen:

1. Für reelle p kann x nicht kleiner als r werden, die Curve endigt daher allemal in einem Punkte M (s. Figur), welcher um $MN = r$ von der Achse der y absteht und dessen Tangente mit der Achse den x der Winkel $\beta = 30^0$ bildet.

2. Da von dem $\beta = 30^0$ entsprechenden Minimum aus die Grösse

$$p^3 + 2p + \frac{1}{p}$$

sowohl bei dem Zunehmen als bei dem Abnehmen von β bis in das Unendliche wächst, so entsprechen in der Gleichung 5) jedem x, welches grösser als r ist, zwei verschiedene Werthe von p und β, nämlich der eine grösser als $p = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\beta = 30^0$ und der andere kleiner als $p = \sqrt{\frac{1}{3}}$, $\beta = 30^0$. Die Curve besteht daher in Beziehung auf die hier allein in Betracht kommenden positiven x und p aus zwei Aesten MB und $MB_{,,}$, welche in dem Punkte M eine Spitze bilden. Für den einen Ast MB nehmen die Winkel β von 30^0 an mit den Abscissen x zu, für den anderen Ast hingegen nehmen jene Winkel von derselben Grenze 30^0 an bei dem Wachsen von x fortwährend ab. Die Richtung des ersten Astes nähert sich daher mehr und mehr der Richtung der y und diejenige des zweiten Astes immer mehr der Richtung der x, wie es obige Figur zeigt. Wird die Gleichung 5) auf p reducirt, so müssen sich für jedes $x > r$ zwei reelle Wurzeln finden, von denen die eine grösser als $\sqrt{\frac{1}{3}}$ dem Ast MB und die andere kleiner als $\sqrt{\frac{1}{3}}$ dem Ast $MB_{,,}$ entspricht. Sind endlich x_1 und und p_1 zwei positive Werthe von x und p, welche zusammen der Gleichung 5) genügen, so ist dies auch mit $-x_1$ und $-p_1$ der Fall. Daher liegen auch auf der Seite der negativen x zwei Aeste der Curve, welche den Aesten MB und $MB_{,,}$ congruent sind und durch deren Umdrehung um die Achse der y dieselben Flächen erzeugt würden, wie durch die Umdrehung der genannten Aeste.

3. Denkt man sich unter p diejenige Wurzel der Gleichung 5), welche einem jener Aeste MB oder $MB_{,,}$ angehört, und bezeichnet man das Integral von $p\,dx$ durch $f(r, x)$, so ist für den nurgedachten Ast der Curve

$$y = f(r, x) - f(r, b) + c,$$

weil dieser Ast durch den Punkt $x =$, $y = c$ gehen soll. Insofern aber auch der Punkt B, dessen Coordinaten $x = 1$ und $y = h$ waren, in der Curve liegt, hat man noch:

$$6)\qquad h = f(r, 1) - f(r, b) + c$$

und also vermittelst dieser Gleichung den Werth von r aus den gegebenen Constanten b, c und h abzuleiten. Fallen die Punkte C und B zusammen, d. h. ist $b = 1$, so reducirt sich die gedachte Gleichung auf

$$h = c.$$

Wird umgekehrt $h > c$ und b nicht zu klein angenommen, so muss der Gleichung 6) auch ein reeller Werth von r entsprechen. Unter den verschiedenen zulässigen Werthen von b ist auch derjenige, bei welchem der Punkt C in den Endpunkt M des betrachteten Curvenastes fällt und mithin $b = r$ wird. Für diesen Fall aber geht die Gleichung 6) in:

$$h = f(r, 1) - f(r, r) + c$$

über und diese Gleichung giebt stets ein reelles r, wenn, wie oben bemerkt, $h > c$ ist. Setzt man endlich für diesen Fall, welcher in dem Folgenden vorzugsweise in das Auge zu fassen ist,

$$7)\qquad c = \frac{r}{\sqrt{3}},$$

mithin:

$$8)\qquad h = f(r, 1) - f(r, r) + \frac{r}{\sqrt{3}},$$

so geht die Tangente des Endpunktes M der Curve durch den Coordinatenanfang S.

4. Denkt man sich in der Gleichung 5) r immer mehr und mehr gegen die Grenze 0 hin abnehmend, so nähert sich die durch Umdrehung des Bogens MB erzeugte Fläche immer mehr dem Mantel eines unendlich langen Kegels, die durch Umdrehung von $MB_{,,}$ gebildete Fläche hingegen immer mehr einer auf die Richtung AS der Bewegung rechtwinkligen Ebene. Man sieht daher leicht, dass die Umdrehung des Astes MB eine Fläche des kleinsten Widerstandes, die Umdrehung des Astes $MB_{,,}$ hingegen eine Fläche des grössten Widerstandes erzeugt. Wir werden uns deshalb vorzugsweise mit der näheren Untersuchung über den Ast MB zu beschäftigen haben, bemerken aber zugleich, dass bei der Betrachtung des zweiten Astes ganz auf dieselbe Weise zu verfahren ist, wie in dem Nachstehenden.

5. Die Linie, durch deren Umdrehung um die Achse der y die ganze Vorderfläche des Geschosses erzeugt werden soll, muss natürlich bis an diese Achse selbst reichen, und da der Bogen BM in dem Punkte M endigt, so muss die verlangte Erzeugende von M aus nach einem anderen als dem durch die Gleichung 5) ausgesprochenen Gesetz weiter geführt werden. Damit aber nicht nur der bisher betrachtete Widerstand W, welchen die Rotationsfläche $BMM_{,}B_{,}$ erleidet, sondern auch der Widerstand gegen die

ganze Vorderfläche des Geschosses, in Bezug auf eine gegebene Länge der Geschossspitze ein Kleinstes werde, darf der Winkel β

1) längs der ganzen Erzeugenden keine sprungweise Aenderung erfahren,

2) bei dem Abnehmen von x nie wieder zunehmen.

Zugleich muss aber auch der Widerstand gegen den bisher noch nicht betrachteten Theil der Vorderfläche des Körpers, in Beziehung zu dem gegebenen Halbmesser $MN = r$ und unter den in Betreff von β so eben gemachten Beschränkungen, ein Kleinstes sein. Dies aber wird nur erreicht, indem man von M aus der Erzeugenden die Richtung MS der Tangente des Curvenpunktes giebt, wodurch zugleich der Coordinatenanfang S die Spitze des Geschosses und $SA = h$ die Länge der ganzen vorderen Zuspitzung des Körpers wird.

Analoge Betrachtungen lassen sich auch in Betreff der Fläche des grössten Widerstandes anstellen, so dass für diese Fläche $B_{,,}MS$ ebenso als Erzeugende anzunehmen ist, wie BMS für die Fläche des kleinsten Widerstandes.

Wendet man sich nach diesen allgemeinen Betrachtungen nun zu der specialen Discussion der Gleichung 5) und setzt man zur Abkürzung

9) $$\frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{r} = k$$

10) $$1 + p^2 = \frac{1}{\cos^2 \beta} = z,$$

so erhält man:

$$k = \frac{z^2}{\sqrt{z-1}}$$

oder, wenn man beide Theile zum Quadrat erhebt und alsdann ordnet,

11) $$0 = z^4 - k^2 z + k^2.$$

Diese Gleichung lässt sich nach der von Ampère angegebenen Methode leicht auf eine Gleichung vom dritten Grade zurückführen. Sind nämlich t_1, t_2, t_3 und t_4 die Wurzeln derselben, und nimmt man

12) $$\sqrt{\varphi} = (t_1 + t_2) = -(t_3 + t_4)$$

an, so ist auch noch:

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = 0$$
$$t_1 t_2 t_3 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_2 t_3 t_4 = k^2$$

oder anders geordnet:

13) $$t_1 t_2 + t_3 t_4 = -[t_1 + t_2][t_3 + t_4] = \varphi$$
$$t_1 t_2 [t_3 + t_4] + t_3 t_4 [t_1 + t_2] = k^2,$$

d. i.

14) $$(t_1 t_2 - t_3 t_4) = -\frac{k^2}{\sqrt{\varphi}}.$$

Erhebt man nun in 13) und 14) beide Theile zum Quadrat und zieht man die Ergebnisse von einander ab, so kommt

$$4t_1t_2t_3t_4 = \varphi^2 - \frac{k^4}{\varphi}$$

oder, da der erste Theil dieser Gleichung auch $4k^2$ ist, nach gehörigem Ordnen

15) $$0 = \varphi^3 - 4k^2\varphi - k^4.$$

Die einzige mögliche Wurzel dieser Gleichung ist nach der Cardan'schen Regel:

$$\varphi = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}k^4 + \sqrt{\tfrac{1}{4}k^8 - \tfrac{64}{27}k^6}} + \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}k^4 - \sqrt{\tfrac{1}{4}k^8 - \tfrac{64}{27}k^6}}$$

$$= \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}k^4}\left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \tfrac{256}{27}\frac{1}{k^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \tfrac{256}{27}\frac{1}{k^2}}}\right],$$

oder wenn für k^2 sein Werth $\frac{256}{27} \cdot \frac{x^2}{r^2}$ und zur Abkürzung

16) $$\psi = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 - \frac{r^2}{x^2}}}\right]$$

gesetzt wird:

17) $$\varphi = \frac{64}{9}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{4}{3}}\psi.$$

Um endlich die Wurzeln der Gleichung 11) zu finden, erhält man durch Addition und Subtraction von 13) und 14):

18) $$\begin{cases} 2t_1t_2 = \varphi - \dfrac{k^2}{\sqrt{\varphi}} \\ 2t_3t_4 = \varphi + \dfrac{k^2}{\sqrt{\varphi}}. \end{cases}$$

Aus No. 12) folgt aber auch:

$$(t_1 + t_2)^2 = \varphi \text{ und } (t_3 + t_4)^2 = \varphi$$

und nach dem Abziehen der vorher mit 2 multiplicirten Gleichungen 18)

$$(t_1 - t_2)^2 = -\varphi + 2\frac{k^2}{\sqrt{\varphi}}$$

$$(t_3 - t_4)^2 = -\varphi - 2\frac{k^2}{\sqrt{\varphi}}.$$

Verbindet man endlich diese Gleichungen nach vorheriger Ausziehung der Quadratwurzeln aus ihren beiden Theilen mit der Gleichung 12), so kommt:

$$t_1 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\varphi} + \sqrt{-\varphi + \frac{2k^2}{\sqrt{\varphi}}}\right]$$

$$t_2 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{\varphi} - \sqrt{-\varphi + \frac{2k^2}{\sqrt{\varphi}}}\right]$$

$$t_3 = \tfrac{1}{2}\left[-\sqrt{\varphi} + \sqrt{-\varphi - \frac{2k^2}{\sqrt{\varphi}}}\right]$$

$$t_4 = \tfrac{1}{2}\left[-\sqrt{\varphi} - \sqrt{-\varphi - \frac{2k^2}{\sqrt{\varphi}}}\right].$$

Den Gleichungen 16) und 17) zu Folge sind ψ und φ stets positiv, und mithin t_3 und t_4 imaginär. Es bleiben daher für $z = \frac{1}{\cos^2\beta}$ nur die zwei Werthe t_1 und t_2, von denen der grössere auch dem grösseren β, mithin dem Curvenast MB und der kleinere dem anderen Ast angehört. Man hat daher das obere Zeichen auf die Fläche des kleinsten Widerstandes und das untere Zeichen auf die Fläche des grössten Widerstandes bezogen:

$$1 + p^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{\varphi} \pm \sqrt{-\varphi + \frac{2k^2}{\sqrt{\varphi}}}\right]$$

oder wenn für φ sein Werth aus No. 17) und wieder $k^2 = \frac{256}{27}\frac{x^2}{r^2}$ gesetzt wird:

$$19) \quad 1 + p^2 = \frac{1}{\cos^2\beta} = \frac{4}{3}\left(\frac{x}{r}\right)^{\frac{2}{3}}\left[\sqrt{\psi} \pm \sqrt{\frac{1}{\psi} - \psi}\right].$$

Aus dieser Gleichung kann, ohne vorherige Bestimmung der Constante r, mithin ganz im Allgemeinen, zu jedem beliebigen $\frac{x}{r}$ der entsprechende Neigungswinkel β gegen die Richtung der x berechnet werden. Um aber auch $\frac{y}{r}$ als Function von $\frac{x}{r}$ zu erhalten, müsste die Gleichung 19) auf p reducirt, mit $\frac{dx}{r}$ multiplicirt und sodann integrirt werden; allein diese Integration würde so schwierig und das Ergebniss derselben selbst im günstigsten Falle ein so verwickelter Ausdruck für $\frac{y}{r}$ sein, dass es zweckmässiger erscheint, von der Aufsuchung einer solchen directen Relation zwischen $\frac{x}{r}$ und $\frac{y}{r}$ abzusehen und beide Grössen als Functionen von β auszudrücken. Auch wird es zur Abkürzung und Verallgemeinerung dieser Rechnung gereichen, wenn die Coordinaten der Curvenpunkte in einem Maass ausgedrückt werden, dessen Einheit $\frac{3\sqrt{3}}{16}r$ ist, indem man die neuen Coordinaten

$$20) \quad \begin{cases} X = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{x}{r} \\ Y = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{r} \end{cases}$$

einführt. Dadurch verwandelt sich die Gleichung 5) in

$$21) \quad X = \frac{(1+p^2)^2}{p} = \frac{1}{\sin\beta\cos^3\beta}, \text{ oder}$$

$$X = p^3 + 2p + \frac{1}{p}$$

und hieraus folgt:

$$dX = \left(3p^2 + 2 - \frac{1}{p^2}\right) dp.$$

Ferner ist aber $\frac{dY}{dX} = \frac{dy}{dx} = p$ und mithin

$$dY = \left(3p^3 + 2p - \frac{1}{p}\right) dp.$$

$$Y = \tfrac{3}{4} p^4 + p^2 - \log p + B.$$

Zur Bestimmung der Constante B dient der Umstand, dass die Curve durch den Punkt M geht, für welchen

$$Y = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{y}{r} = \frac{16}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \tfrac{16}{9} \text{ und } p = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

ist. Man hat daher

$$\frac{16}{9} = \frac{1}{12} + \tfrac{1}{3} + \log\sqrt{3} + B \text{ oder}$$

$$B = \frac{49}{36} - \log\sqrt{3} = 0{,}811805$$

und mithin

22) $$Y = \tfrac{3}{4} p^4 + p^2 - \log p + 0{,}811805$$
$$= \tfrac{3}{4} \operatorname{tang}^4 \beta + \operatorname{tang}^2 \beta - \log \operatorname{tang} \beta + 0{,}811805.$$

Endlich folgt aus den Gleichungen 21) und 22)

$$\frac{Y}{X} = \frac{y}{x} = \sin\beta \cos^3\beta \left[\tfrac{3}{4} \operatorname{tang}^4\beta + \operatorname{tang}^2\beta - \log \operatorname{tang}\beta + 0{,}811805\right],$$

oder, da die Curve durch den Punkt B gehen soll, dessen Coordinaten $x = 1$ und $y = h$ waren, und insofern das diesem Punkt entsprechende β mit β_1 bezeichnet wird,

23) $$h = \sin\beta_1 \cos^3\beta_1 \left[\tfrac{3}{4} \operatorname{tang}^4\beta_1 + \operatorname{tang}^2\beta_1 - \log \operatorname{tang}\beta_1 + 0{,}811805\right].$$

Würde aus dieser Gleichung β_1 bestimmt, so ist dann der Gleichung 5) gemäss, in Bezug auf die Abscisse $x = 1$ des Punktes B

$$1 = \frac{3\sqrt{3}}{16} r \cdot \frac{1}{\sin\beta_1 \cos^3\beta_1},$$

mithin:

24) $$\begin{cases} r = \dfrac{16}{3\sqrt{3}} \sin\beta_1 \cos^3\beta_1 = 3{,}0792 \sin\beta_1 \cos^3\beta_1 \\[2ex] x = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} rX = X \sin\beta_1 \cos^3\beta_1 \\[2ex] y = \dfrac{3\sqrt{3}}{16} rY = Y \sin\beta_1 \cos^3\beta_1. \end{cases}$$

Kann nun auch die Gleichung 23) nicht auf eine einfache Function des Winkels β_1 reducirt und dadurch dieser Winkel direct bestimmt werden, so lässt sich doch durch Berechnung von X und Y für einige schicklich gewählte β leicht ein solcher Winkel β_1 finden, für welchen das h in Gleichung 23) der beabsichtigten Länge der Geschossspitze so nahe kommt,

als man es für nothwendig erachtet. Behält man dann dieses β_1 und h für die Construction des Geschosses vom Halbmesser $AB = 1$ bei, so ist $\sin\beta_1 \cos^3\beta_1$ die Einheit der Maasse, in welchen die durch die Gleichungen 21) und 22) bestimmte Erzeugende zur Construction der Geschosspitze nach den nurgenannten Gleichungen aufgetragen werden muss. Uebrigens geben die Gleichungen 21) und 22) sowohl den Ast MB als den Ast $MB_{\prime\prime}$ der Curve, je nachdem man in diesen Gleichungen die Winkel β grösser oder kleiner als 30° annimmt. Für den Punkt M, in welchem beide Aeste zusammentreffen, hat man zuvörderst

$$X = \frac{1}{\sin 30^\circ \cos^3 30^\circ} = \frac{16}{3\sqrt{3}} = 3{,}0792$$

und, wie bereits oben bemerkt,

$$Y = \frac{16}{9}.$$

Um aber ein mehr in die Augen fallendes Bild der Curven zu geben, mögen hier noch nachstehende für dieselben berechnete X und Y folgen:

1) In dem Aste MB ist:

für $\beta = 45^\circ$,	$X = 4$	$Y = 2{,}5618$
„ $\beta = 60^\circ$,	$X = 9{,}2376$	$Y = 10{,}0125$
„ $\beta = 66^\circ$,	$X = 16{,}2679$	$Y = 24{,}1339$
„ $\beta = 70^\circ$,	$X = 26{,}5986$	$Y = 50{,}0865$

2) In dem Aste $MB_{\prime\prime}$ ist:

für $\beta = 20^\circ$,	$X = 3{,}5236$	$Y = 1{,}9681$
„ $\beta = 15^\circ$,	$X = 4{,}2089$	$Y = 2{,}2044$
„ $\beta = 1^\circ$,	$X = 57{,}3249$	$Y = 4{,}8602$

Es bleibt nun noch übrig, den Widerstand zu bestimmen, welchen das ganze Geschoss durch die Luft erleidet. Den Widerstand gegen die Rotationsfläche BMM_1B_1 giebt die Gleichung 2), wenn r für die Grenze b geschrieben wird, nämlich:

$$25)\qquad W = \frac{\pi v^2 q}{g}\int_r^1 \frac{x}{1+p^2}\,dx.$$

Der Widerstand, welchen der Kegel MSM_1 zu erleiden hat, sei W_1 und wird durch

$$W_1 = r^2\pi \cdot \frac{v^2 q}{2g}\sin^2 MSA = \tfrac{3}{8}\,\frac{\pi v^2 q}{g}\,r^2$$

gegeben. Der Widerstand gegen die gesammte Vorderfläche des Geschosses d. i. $W + W_1$ sei $W_{\prime\prime}$.

Um nun zuvörderst W zu bestimmen, hat man nach der Gleichung 5)

$$x = \frac{3\sqrt{3}}{16}\,r\,\frac{(1+p^2)^2}{p}$$

und

$$dx = \frac{3\sqrt{3}}{16} r \left[3p^2 + 2 - \frac{1}{p^2}\right] dp.$$

Führt man dies in No. 25) ein, so gehen zugleich die Grenzen in $tang\, 30^0 = \sqrt{\tfrac{1}{3}}$ und $tang\, \beta_1$ über und man erhält demnach

$$W = \tfrac{27}{256} r^2 \cdot \frac{\pi v^2 q}{g} \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{tang\,\beta_1} \left[3p^3 + 5p - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}\right] dp.$$

Bemerkt man, dass nach den Gleichungen 24)

$$r^2 = \tfrac{256}{27} \sin^2\beta_1 \cos^6\beta_1$$

ist, und setzt man zur Abkürzung:

26) $$\frac{\pi v^2 q}{g} \sin^2\beta_1 \cos^6\beta_1 = N,$$

so wird

$$W_1 = \tfrac{32}{9} N,$$

und

$$W_{,,} = N\left[\tfrac{32}{9} + \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{3}}}^{tang\,\beta_1} \left[3p^3 + 5p - \frac{1}{p^3} + \frac{1}{p}\right] dp\right]$$

$$= N\left[\tfrac{3}{4}\, tang^4\beta_1 + \tfrac{5}{2}\, tang^2\beta_1 + \frac{1}{2\, tang^2\beta_1} + \log tang\,\beta_1 + 1{,}68819\right].$$

Wird z. B. $\beta_1 = 66^0$, mithin die Länge der Geschossspitze $h = \frac{Y}{X} = 1{,}4836$ Halbmesser des Geschosses angenommen, so beträgt der Widerstand, welchen es nach den Formeln 26) und 27) von der Luft zu erleiden hat, $0{,}12958 \frac{\pi v^2 q}{g}$, d. i. also 0,25910 Mal so viel als der Widerstand gegen einen Cylinder und 0,51832 Mal so viel als der Widerstand gegen eine Kugel von gleichem Halbmesser. Da nun überdies Spitzgeschosse durchschnittlich 2 bis $2\tfrac{1}{2}$ Mal so schwer als kugelförmige Geschosse von gleichem Durchmesser sind, so ist die Einwirkung der Luft auf die Bewegung eines Geschosses mit der hier betrachteten Spitzenconstruction nur $\tfrac{1}{5}$—$\tfrac{1}{4}$ derselben Einwirkung gegen ein kugelförmiges Geschoss von gleichem Durchmesser. Um sich ein ungefähres Bild von Wichtigkeit eines solchen Unterschiedes zu machen, genügt es, wenn man die Bewegung der Geschosse als eine geradlinige betrachtet. Bezeichnet dann V die anfängliche Geschwindigkeit, v die Geschwindigkeit nach Zurücklegung des Raumes s und m eine von dem Widerstand der Luft abhängige Constante, so ist

$$v = \frac{V}{e^{ms}}$$

und wenn alle Entfernungen in Dresdner Ellen ausgedrückt sind, *m* für eine 6pfünd. eiserne Kugel mindestens 0,0006, für ein Spitzgeschoss von der betrachteten Form und gleichem Durchmesser wie die Kugel, also höchstens 0,00015. Behält man diese Zahlen bei, so beträgt nach der Zurücklegung von 4000 Ellen die Geschwindigkeit *v* der Kugel nur 0,0907 der anfänglichen Geschwindigkeit *V*, bei dem Spitzgeschoss hingegen *v* noch 0,548 *V*.

XI.

Elektrische Untersuchungen.

Von Prof. Dr. F. Dellmann
zu Kreuznach a. R.

I. Ueber den Ursprung der Luftelektricität.

Die früheren Ansichten über diesen Gegenstand, welche man am vollständigsten dargestellt findet in der im Jahre 1843 von der Brüsseler Akademie gekrönten Preisschrift von Duprez: „*Mémoire sur l'électricité de l'air*“, verdienen keine Beachtung mehr; selbst die Pouillet'sche Hypothese ist von Riess und Reich widerlegt. Nur auf die beiden neuesten müssen wir hier eingehen.

Von diesen ist die erste von Peltier dem Vater in den *Compt. rend. XII, pag.* 307 zuerst ausgesprochen, später durch einen Brief seines Sohnes an Quetelet weiter verbreitet und von Prof. Lamont in München, auch in der kosmischen Physik von Prof. Müller noch in der neuesten Auflage dieses Werkes vertheidigt worden. Nach dieser Ansicht giebt es keine Luft-, sondern nur eine permanente Erdelektricität, welche —Elektricität sein soll, wogegen dem Weltraume + Elektricität beigelegt wird. Wie aber ohne materiellen Träger der Weltraum elektrisch sein könne, das sagt uns keiner der Vertheidiger dieser Ansicht. Dieser reinen Hypothese muss aber besonders widersprochen werden, weil sie ganz entschiedene Facta leugnet und falsche behauptet. In meinem Aufsatze über Luftelektricität (Pogg. Annalen, Bd. 89, S. 289) habe ich bereits gesagt, dass die Zahlen, auf welche der jüngere Peltier sich stützt, falsch sind; das Verhältniss der Luftelektricität des Januar zu der des Juni ist nach den späteren Angaben Quetelet's in Brüssel nicht das von 605 : 47 oder ungefähr 13 : 1, sondern nahe 3 : 1, und damit ist das Hauptargument des jüngeren

Peltier vernichtet. Ein zweites falsches Factum ist das, dass die Luftelektricität keinen Körper durch Mittheilung lade.

Es wird demnach Jemand, welcher dem Ursprunge der Luftelektricität auf die Spur kommen will, zunächst ihr Dasein beweisen müssen. Dass die Beobachtungsweise Peltier's dies nicht vermochte, ergiebt sich aus dem Erfolge, den sie hervorgerufen; sie hat sich aber dadurch selbst gerichtet. Gewiss hat Riess Recht, wenn er in seinem berühmten Werke über Reibungselektricität im 2. Bande, S. 515 sagt: „Besser ist es, das Elektroskop in einem geschützten Raume stehen zu lassen, und den zum Auffangen bestimmten Theil an einem besondern Stiele zu isoliren.“ Dass meine Einrichtung und dieser Rath ganz unabhängig von einander sind, ergiebt sich daraus, dass das genannte Werk von Riess und der obige Aufsatz von mir, in welchem ich übrigens bereits die Resultate meiner Beobachtungen von 1852 mittheile, gleichzeitig erschienen. Meine Art zu experimentiren möge sich nun noch durch folgende Versuche rechtfertigen, durch welche ich Herrn Prof. Müller zur Untreue gegen die von ihm adoptirte Hypothese zu verleiten hoffe.

Wenn ich meine isolirte Kugel bis über das Dach des Hauses hebe und sie oben eine Weile stehen lasse, ohne sie vorher ableitend berührt zu haben; dann wieder, ebenfalls ohne sie berührt zu haben, herunter hole; so zeigt sie sich elektrisch, aber ihre Elektricität ist die entgegengesetzte von derjenigen, welche sie herunter bringt, wenn sie oben ableitend berührt worden. Die Kugel muss ohne Berührung im Durchschnitt eine halbe Stunde oben stehen bleiben, bis sie ihre volle Ladung hat, welche dann aber meist etwas grösser ist, als diejenige, welche sie bei gewöhnlicher Ladung mit der entgegengesetzten Elektricität erhält. Da sage ich nun, sie ist elektrisirt worden durch Mittheilung, nämlich wenn sie ohne Berührung oben eine halbe Stunde gestanden hat. Herr Prof. Müller wird vielleicht sagen, die Erdelektricität wirke vertheilend auf die Kugel, binde die entgegengesetzte in ihr, die + Elektricität, da sie selbst — Elektricität sein soll, und stosse die — Elektricität der Kugel ab, welche sich also in die Luft zerstreue. Nachher bringe die Kugel die gebunden gewesene + Elektricität als freie + Elektricität in das Zimmer. Aber kann die — Elektricität der Erde aus so grosser Entfernung eine grössere + Elektricität binden, als sie selbst ist, noch dazu, wenn sie durch das Hinaufströmen in die Kugel in dieser eine Verdichtung erleidet?

Ferner: Wenn die isolirte Kugel gehoben und oben nicht ableitend berührt wird, so bringt sie eine geringere Menge aus kleinerer, eine grössere aus grösserer Höhe herunter. Hier müsste nun nach der Hypothese von der Erdelektricität gerade das Entgegengesetzte stattfinden.

Weiter unten anzugebende Thatsachen stimmen mit der Hypothese von der Erdelektricität, welche in einer permanenten Schicht die Erdoberfläche umgeben, zuweilen aber auch auf die äussere Oberfläche der Wolken-

hülle steigen soll, ebensowenig überein. Fände diese Strömung der Erdelektricität auf die äussere Wolkenoberfläche statt, so müsste die Luft sich weit häufiger unelektrisch zeigen, als es der Fall ist. Dass aber die Erde elektrisch wird durch Influenz, sowohl durch Influenz der Luft- als der Wolkenelektricität, versteht sich von selbst. Es ist von mir noch folgender Versuch gemacht worden:

Eine 5zöllige Kupfer- und eine ebenso grosse Zinkplatte wurden im Freien fast unter der Stelle, wo täglich meine Kugel gehoben wird, auf den Erdboden gelegt. Auf die Kupferplatte wurde eine 3zöllige Kupferplatte mit Lackstiel gestellt, auf die Zinkplatte eine ebenfalls 3zöllige Zinkplatte mit isolirender Handhabe. Es wurde ein Elektroskop genommen zur Untersuchung, welches so empfindlich war, dass es die —Elektricität eines auf Zink gestellten Pfennings deutlich zeigte; aber die von ihrer Unterlage isolirt abgehobene Kupferplatte zeigte nichts, die Zinkplatte sehr schwache — Elektricität, weil diese Platte nicht frisch abgefeilt war, die Unterlage aber doch. Dann wurde gleich nach diesem Versuche zur Ladung der isolirten Kugel ohne Berührung geschritten. Die Kugel zeigte, nachdem sie etwa eine halbe Stunde in geringerer Höhe gestanden, 30° Ausschlag an meinem Elektrometer mit ziemlich dickem Glasfaden, und nachdem sie einige Fuss höher gehoben und abermals unberührt eine halbe Stunde gestanden, 34° Ausschlag. Sie hatte also in der geringeren Höhe eine Ladung erhalten, wie sie dieselbe von einer Zink-Kupfer-Säule von 100,5, in der grösseren Höhe eine Ladung derselben Säule von 118,8 Elementen erhalten haben würde. Wie kann denn nun hier von einer Influenz von Seiten der Erdelektricität die Rede sein?

Becquerel der Vater hat im Jahre 1856 in den *Compt. rend. XLIII, pag.* 1101 ff. Untersuchungen über die Elektricität der Luft und der Erde bekannt gemacht, welche ich im 12. Jahrgange der von der Berliner physikalischen Gesellschaft herausgegebenen Fortschritte der Physik besprochen habe. Unter den Elektricitätsquellen, welche beständig Elektricität an die Luft abgeben, sind nach Becquerel's Versuchen besonders die folgenden zu nennen:

a) Die Ausströmung von Sauerstoff und Kohlensäure aus Pflanzenblättern (+ Elektricität);

b) die Berührung des Landes und Wassers, wobei beide natürlich entgegengesetzt elektrisch werden; beide Elektricitäten gehen durch Dämpfe in die Atmosphäre;

c) die Zersetzung organischer Stoffe;

d) die Berührung kalter und warmer Gewässer.

Die Resultante aller Elektricitäts-Entwickelungen ist nach Becquerel bei heiterem Himmel ein Vorherrschen der + Elektricität. In den Polarzonen ist die Seltenheit der Gewitter eine Folge der geringen Verdunstung und der kleinen Zahl natürlicher Elektricitätsquellen, wie denn aus den

entgegengesetzten Gründen in der Tropenzone der Gegensatz stattfindet. Ebenso geht nach seiner Ansicht die Seltenheit der Gewitter auf offener See und die geringere Zahl derselben im Inneren der Continente aus denselben Gründen hervor.

Diese Theorie hat zwei Mängel; sie erklärt nur einen Theil der Erscheinungen und enthält eine unerwiesene Voraussetzung. Sie erklärt nicht die grössere Luftelektricität im Winter, ja diese spricht offenbar gegen sie. Die unerwiesene Voraussetzung ist die, dass man die Luftelektricität als Quelle der Wolken- und Gewitterelektricität ansehen müsse, da doch die schnelle Entwickelung der Gewitterelektricität mehr für eine selbstständige Erzeugung derselben in den Gewitterwolken spricht.

Der Ursprung der Luftelektricität ist nach unseren jetzigen Kenntnissen da zu suchen, wo alle meteorologischen Erscheinungen entstehen, nämlich in der Erwärmung der Erdoberfläche durch die Sonne. Die Hauptsätze dieser Ansicht würden etwa so zu formuliren sein:

1) Die Erdoberfläche sowohl, als auch die luftförmige Erdhülle, die Atmosphäre, sind fast überall und immer elektrisch; die Atmosphäre aber, als der beweglichste und deshalb in seinem Zustande veränderlichste Theil der Erde, am meisten. Die Erdoberfläche wird es erst durch Influenz der Atmosphäre. Deshalb ist auch der elektrische Zustand der Erdoberfläche bedeutend schwächer, als der der Atmosphäre, meist so schwach, dass er gar nicht oder doch nur mit den empfindlichsten Instrumenten wahrgenommen werden kann. An und für sich muss also die Erdoberfläche als unelektrisch betrachtet werden.

2) Die Summe der Luftelektricität in der ganzen Atmosphäre ist Null. Diese Summe tritt also in Summanden auf mit entgegengesetzten Vorzeichen. Also im Grossen und Ganzen ist weder Erdoberfläche noch Atmosphäre elektrisch.

3) Die Ursache, welche ursprünglich die Atmosphäre aus dem unelektrischen Zustande herausbringt, ist die Erwärmung der Erde durch die Sonne. Die Wirkung tritt natürlich am kräftigsten hervor, wo die Ursache am thätigsten ist, nämlich in der Tropenzone. Man weiss, wie die Wärme die Entwickelung der —Elektricität begünstigt. In der Tropenzone ist die erwärmte aufsteigende Luft —elektrisch. Durch diese ursprüngliche Einwirkung der Sonne ist aber nothwendig eine sekundäre gesetzt, da ein einseitiges Aufheben des ursprünglichen elektrischen Gleichgewichts der Atmosphäre nicht möglich ist. Der entgegengesetzte Pol der durch die Sonne polarisch-elektrisch gewordenen Atmosphäre tritt in den gemässigten und kalten Zonen hervor. Die ganze Atmosphäre spaltet sich danach in drei Regionen, in die mittlere überwiegend —elektrische, welche auf einer jeden Seite von einer kleineren überwiegend + elektrischen begrenzt wird. Natürlich treten die Gegensätze nur allmälig hervor. Also die —Elektricität der heissen Zone ist in der Mitte am stärksten, wird allmälig

nach den Polen hin zu Null, tritt dann allmälig in den Gegensatz, in + Elektricität über, und die + Elektricität nimmt nach den Polen hin immer mehr zu, so dass sie sich stellenweise unter besonders günstigen Bedingungen in die obere Atmosphäre als Nord- oder Südlicht entladet.

Diese Theorie enthält 1) keinen Widerspruch in sich selbst, 2) keinen Widerspruch gegen die Gesetze der Wissenschaft, 3) stimmt sie mit der Erfahrung überein.

Sie enthält nicht nur keinen Widerspruch in sich selbst, sondern bildet vielmehr ein harmonisches Ganze. Wenn auch noch unerwiesene Sätze in derselben vorkommen, so widerstreiten diese nicht den erwiesenen, sie schliessen sich diesen vielmehr so an, dass eine organische Einheit daraus entsteht. Ein unerwiesener Satz, könnte man sagen, sei der, dass in der Tropenzone die aufsteigende Luft — elektrisch ist. Es werden aber nachher Thatsachen angeführt werden, welche sich schwerlich anders erklären lassen, als durch diese Annahme. Der Mangel an genügenden Beobachtungen auf diesem Gebiete hat in der Wissenschaft Lücken gelassen, welche einstweilen nur durch Combination auszufüllen sind.

Einen Widerspruch gegen die Gesetze der Wissenschaft könnte man in der Behauptung finden, dass Wärme die atmosphärische Luft in einen statisch elektrischen Zustand versetze. Hier ist denn zunächst an das zu erinnern, was Becquerel durch Versuche ermittelte und was oben unter *d*) ausgesprochen ist. Der Satz soll auch keineswegs in dem Sinne gedacht werden, dass diese Elektrisation unmittelbar stattfinde. Nehmen wir z. B. das, was Becquerel über die gegenseitige Einwirkung des Landes und Wassers sagt: „Zahlreiche Versuche haben bewiesen, dass das Land + elektrisch ist in seiner Berührung mit süssem oder mit Meerwasser, das Wasser aber — elektrisch, und das Meerwasser etwa 2,4 Mal so stark als süsses." Wenn er dann oben unter *b*) sagt, dass beide Elektricitäten in die Luft gehen, so ist das eine unwahrscheinliche Hypothese; wahrscheinlich ist es nur von der — Elektricität des Wassers, besonders des Meeres. Da aber das Meer in der Tropenzone am stärksten verdunstet, so wird auch dort der aufsteigende Strom — elektrisch sein müssen. Es soll also blos die Wärme bei der Elektrisirung der Atmosphäre als primäre Ursache gedacht werden. Ferner stimmt die Behauptung vollständig mit den Kenntnissen, welche wir über Hervorrufung der Elektricität z. B. durch Reibung besitzen, wo die Wärme unter allen Umständen das Hervortreten der — Elektricität begünstigt.

Die Behauptung, dass in der Tropenzone die Luft — elektrisch sei, ist so sehr im Einklange mit bekannten Resultaten, dass man fast behaupten kann, es müsse so sein. Denn wenn bei uns im Sommer die Elektricität der Luft bedeutend schwächer ist, als im Winter; wenn ferner in wärmeren Jahren, wie ich das durch meine Beobachtungen der Jahre 1857 und 1858 gezeigt, die Luftelektricität bedeutend geringer ist, als in kälteren,

so wird man behaupten dürfen, dass das, was sich an einem und demselben Orte in verschiedenen Zeiten darstellt, sich auch im Raume in entsprechender Weise finden müsse unter Bedingungen, deren Verschiedenheiten jenen an einem und demselben Orte entsprechen. Sowie also bei uns nach dem Sommer hin die Luftelektricität sich mindert, wird sie auch bei der Annäherung zum Aequator hin sich mindern, und da wir bei dieser Annäherung endlich die Grenze unseres Sommers überschreiten, wird sie auch noch tiefer herunter gehen und endlich in den Gegensatz überschlagen.

Dass die elektrischen Gegensätze in der Atmosphäre nicht schroff sich abschneiden, sondern allmälig in einander übergehen, stimmt ganz mit bekannten Sätzen der Vertheilungslehre überein. Und wenn diese Sätze nur noch mit grösserer Sicherheit für isolirte Leiter nachgewiesen sind, so müssen wir bedenken, dass von diesen zu den Isolatoren ein allmäliger Uebergang stattfindet; besonders aber, dass unsere festen Isolatoren in dieser Beziehung mit Luftmassen, deren Moleküle die grösste Beweglichkeit haben, nicht verglichen werden können.

Was für den ausgesprochenen Ursprung der Luftelektricität besonders spricht, das ist die genaue Einfügung der elektrischen Erscheinungen der Atmosphäre in den Gesammtorganismus der meteoroligischen Phänomene, wie dieser in Arbeiten von Dove und mir über den Zusammenhang der Witterungserscheinungen nachgewiesen wurde. Wenn aber sämmtliche Phänomene der Atmosphäre, soweit wir sie zur Witterung rechnen, in der Wärmevertheilung auf der Erde ihren Ursprung haben, so muss es auch von den Erscheinungen gelten, welche ihren gesetzmässigen Verlauf mit den übrigen theilen.

Wir kommen jetzt zu den Erfahrungen, welche für die aufgestellte Theorie sprechen. Hierher gehört zuerst das Factum, dass sich die Luftelektricität mit der Höhe steigert. Nach den Erörterungen über die Peltier'sche Hypothese wird es wohl erlaubt sein, namentlich in Beziehung auf den Versuch von der Ladung einer isolirten Kugel ohne Berührung, den Satz auszusprechen, dass die Luft an die Erde Elektricität abgiebt. Denn wenn sie hier offenbar der Kugel Elektricität mittheilt, warum nicht auch der Erdoberfläche? Je mehr sie aber abgiebt, desto weniger behält sie. Deshalb sind die unteren Luftschichten schwächer elektrisch, weil sie schon häufiger mit der Erde in Berührung gekommen sind. Wir werden weiter unten sehen, wie eine dicke Schneedecke auch vor dieser Abgabe schützen kann. Ferner erkennen wir daraus die Nothwendigkeit der Beachtung der practischen Regel für Beobachter der Luftelektricität, mit ihrem Apparate über die benachbarten Häuser hinaufzugehen. Ebenfalls ersieht man daraus, warum in den Wohnungen keine Elektricität sich zeigen kann. Hier wird nun auch die Influenz mitwirken, indem diese auf der äusseren Oberfläche des Hauses eine sehr schwache Schicht Elektricität hervorruft, welche der Luftelektricität entgegengesetzt ist.

Ueber die Zonen der Elektricität in den Regen- und Gewitterwolken giebt es mehrfache sichere Erfahrungen. Prof. Müller führt solche an auf S. 433 der 1. Auflage seiner kosmischen Physik; Crosse hat diese Beobachtungen gemacht. Ferner ist eine Reihe von Beobachtungen darüber gemacht auf dem Observatorium des Vesuvs von Palmieri (s. Berl. Ber. X, S. 644), ebenso von Noath (s. Berl. Berichte XI, S. 594), und endlich von mir (s. Pogg. Annalen, Bd. 103, S. 166 ff.). Es blieb aber nach diesen Erfahrungen noch die Frage zu beantworten übrig: Giebt es nachweislich auch in der Luft ohne Wolken solche Schichten mit entgegengesetzten Elektricitäten? Die bisherige Erfahrung sagte: nein. Und ich selbst hatte bei heiterem Himmel die Luft stets +elektrisch gefunden. Im letzten Winter aber, am 2. und 15. Januar, habe ich Gelegenheit gehabt, Stunden lang beim heitersten Himmel —Elektricität zu beobachten. Die Umstände sind für den Ursprung der Luftelektricität von solcher Wichtigkeit, dass ich die Erscheinungen genau beschreiben muss.

Am 2. Januar war der Himmel Morgens früh schon heiter, nachdem er mehrere Wochen bedeckt gewesen. Als die Luftelektricität gemessen wurde, zeigte die Atmosphäre sich ziemlich stark —elektrisch. Nach einer Stunde war der Zustand nach Quantität und Qualität genau derselbe. Wegen der Seltenheit wurde die Erscheinung genauer beobachtet. Um den ganzen Verlauf überblicken zu können, müssen wir auf den vorhergehenden Tag zurücksehen.

Am 1. Januar Morgens früh war die Luft ziemlich stark + elektrisch; es fielen Schlossen, welche wohl den stärker elektrischen Zustand hervorriefen. Gegen 10 Uhr gingen die Schlossen in Schneeflocken über, und es schneite nun ununterbrochen so stark, dass bis Abends 7 Uhr etwa 120 Kubikzoll Wasser als Schnee auf den Quadratfuss gefallen war; also 10''' Höhe, etwa $^1/_{24}$ der jährlichen hiesigen Regenhöhe. Um 10 Uhr Abends fielen nur noch wenige feine Schlossen; es ist also wahrscheinlich, dass bald nach 10 Uhr der Schneefall aufhörte, wofür auch das anderen Morgens gemessene Quantum spricht, welches nur noch 18,20 Kubikzoll Wasser betrug. Morgens um 3 Uhr am 2. Januar ist der Himmel schon heiter gesehen worden.

Somit war die —Elektricität am 2. Morgens bei ganz heiterem Himmel eine höchst ungewöhnliche Erscheinung. Es wurde anfangs vermuthet, sie könne daher kommen, dass die grosse Masse gefallenen Schnees, welcher nach häufig gemachten Erfahrungen öfter stark —elektrisch ist, seine —Elektricität noch besitze und von unten auf den Sammelapparat wirke, in diesem die + Elektricität während der Ladung binde, so dass diese als freie + Elektricität herunter gebracht werde. Diese Ansicht war leicht zu prüfen. War die Voraussetzung gegründet, so musste die + Elektricität, welche die Sammelkugel herunter brachte, mit der Annäherung an den Boden wachsen. Es wurde also die Kugel in verschiedenen Höhen geladen.

Sie zeigte sich zwar immer + elektrisch, aber, wie gewöhnlich, mit zunehmender Höhe stärker. Also war die Voraussetzung falsch.

Nachdem die Luft einige Stunden constant das Quantum — 250,7 gezeigt hatte, fing es, wie es in dieser Jahres- und Tageszeit gewöhnlich ist, zwischen 9 und 10 Uhr zu steigen an; um 10 Uhr betrug es — 286,0; um 11 Uhr — 625,9; um 12 Uhr war ein Zurückgehen bemerkbar, das Quantum betrug nur noch — 403,1; um 1 Uhr — 157,7; um 2 Uhr wieder + 238,4; um 5 Uhr + 671,5; um 7 Uhr sogar + 1050,7. Dabei war den ganzen Tag kein Wölkchen am Himmel zu sehen gewesen. Die Wärme betrug Morgens — 9°,5, Nachmittags — 6°,4, Abends 10 Uhr — 13°,4. Gegen Abend entwickelte sich etwas Nebel, welcher aber die starke Steigerung der + Elektricität nicht erklärt, da sonst ein so grosses Quantum, welches ohnehin sehr selten ist, nur bei sehr starkem Nebel vorkommt. Der Himmel blieb die ganze Nacht vom 2. auf den 3. heiter. Am 3. Nachmittags 2 Uhr war die + Elektricität sogar bis auf 1289,6 gestiegen, obgleich der Nebel unbedeutend war. Ein solches Quantum kommt sonst nur bei Gewittern vor. Als ich ein paar Tage später erfuhr, dass es am 1. Januar an der Saar nicht geschneit, sondern stark geregnet habe, brachte ich die Erscheinung gleich in Zusammenhang mit zwei entgegengesetzten Luftströmen, an deren Grenze wir uns also in Kreuznach befunden hatten. Der Gegensatz der Luftströme sprach sich auch in der grossen Verschiedenheit der mittleren Wärme beider Tage aus. Am 1. war sie — 2°,97, am 2. aber — 9°,73 R. Die Windrichtung war an beiden Tagen NO. Offenbar musste durch den Gegensatz der Luftströme auch der starke Schneefall entstanden sein. Die Grenze der beiden Luftströme hatte sich am 1. Januar zwischen Nahe und Saar hindurchgezogen, und da wir am 2. heiteres Wetter und viel bedeutendere Kälte hatten, so befanden wir uns an diesem Tage entschieden im Polarstrome, also war die Grenze nach Westen gerückt.

Am 15. Januar wiederholte sich die Erscheinung vom 2. in noch auffallenderer Weise. Die erste Messung ergab bei ganz bedecktem Himmel, schwachem Nebel, NO-Wind und 7°,57 Wärme das Elektricitätsquantum — 170,4. Der Himmel wurde bald ganz heiter und blieb es auch den ganzen Tag. Nachmittags 2 Uhr war bei ganz heiterem Himmel das Quantum der Luftelektricität — 345,8. Um 5 Uhr war es wieder + 42,5; um 6 Uhr — 258,7 bei zweimaliger Messung genau übereinstimmend; um 6 Uhr 40 Minuten wieder + 145,1, und das positive Quantum stieg jetzt bei wiederholten Messungen der Art, dass es bei der zehnten Messung um 7 Uhr 10 Min. + 332,1 betrug. Um 10 Uhr war es nur noch 188,6.

Am 16. war der Himmel Morgens noch heiter, der Wind wieder NO, die Kälte etwas grösser, nämlich 10°,73, der Nebel nur schwach. Das erste Elektricitätsquantum war + 118,8. Um 9 Uhr war es schon auf 625,9, um 9 Uhr 10 Min. sogar auf 757,0 gestiegen; um 10 Uhr war es wieder 572,5; um 11 Uhr 467,9; um 12 Uhr 424,1; um 2 Uhr wieder 560,0. Abends 10 Uhr

220,2. Der Himmel bedeckte sich allmälig an diesem Tage; Nachmittags 2 Uhr war zwar die Himmelbedeckung nur 0,2, aber Abends 1, d. h. der ganze Himmel war bedeckt. Aus diesen Erscheinungen konnte ich nicht mit Sicherheit auf ähnliche Ursachen, wie sie am 1. und 2. obgewaltet haben mussten, schliessen, umsoweniger, da kein Niederschlag erfolgte.

Nun lese ich aber im 2. Hefte dieses Jahrganges von Petermann's Mittheilungen einen Aufsatz von Dr. Mühry, in welchem dieser Meteorolog nach telegraphischen Mittheilungen, welche täglich in Paris publicirt werden, doch constatirt, dass, aber am 16., eine ähnliche Verschiebung der Grenze der beiden entgegengesetzten Luftströme stattgefunden habe. Dadurch bekommen meine Beobachtungen noch ein höheres Interesse; denn die zweite Verschiebung war in entgegengesetzter Richtung, und die ähnliche elektrische Erscheinung geht vorher, sie zeigt sich am 15., und zwar in noch grösserer Mannigfaltigkeit, da ein paar Mal die —Elektricität mit der +Elektricität wechselt; am 2. folgt sie der Verschiebung. Auch das zweite Mal haben wir uns hier der Grenze nahe befunden; denn am 16. trübt sich der Himmel, ein Beweis vom Heranrücken des Aequatorialstromes.

Ist es denn nun wohl zu verkennen, dass beide Mal die Luftschichten mit — Elektricität Massen beladen waren, welche vom Aequatorialstrome herrührten und sich mit Schichten des Polarstromes gemengt hatten? Dass aber der Aequatorialstrom bis hierher, von der südlichen Halbkugel aus, seine —Elektricität behalten, spricht dafür, 1) dass er aus der Höhe (wir hatten an allen vier Tagen NO) frisch herunter kam; 2) dass die dicke Schneeschicht, welche durch den Frost noch isolirender geworden, überhaupt an diesen Tagen so grosse Quantitäten Elektricität hervortreten liess. Aber auch die polarische Reaction spricht sich sehr deutlich in diesen Erscheinungen aus.

Dieser elektrische Gegensatz verschiedener Luftschichten ohne Wolken kommt zwar selten zu unserer Anschauung, weil das Nebeneinander der beiden Hauptluftströme selten unser Local trifft und gar zu leicht durch Mengung der Massen aus beiden Strömen Wolken entstehen. Aber dass der eine Luftstrom über dem anderen herweht, sehen wir häufig an der verschiedenen oder gar entgegengesetzten Richtung der Wolken. Dann können wir oft genug noch die —Elektricität des Aequatorialstromes constatiren. Der Aequatorialstrom ist nämlich als der leichtere auch immer der obere; ferner ist er der obere seiner Entstehung nach. Da, wo er mit dem unteren, dem Polarstrome, in Berührung kommt, bilden sich leicht Niederschläge, wie sich das aus der Verschiedenheit ihrer Natur mit Nothwendigkeit ergiebt. Diese Niederschläge bringen uns dann seine —Elektricität herunter. Daher kommt es, dass Regen fast immer — elektrisch sind. Und im Sommer ist, wie bekannt, diese —Elektricität bedeutend grösser, als im Winter, weil der obere Passat dann noch nicht einen so

langen Weg gemacht, also von seiner —Elektricität noch nicht so viel verloren hat. Haben wir den Aequatorialstrom unten, so ist er zwar meist +elektrisch, weil er seine —Elektricität bereits verloren; aber er trägt die +Elektricität immer in einem weit niedrigeren Grade, zum Zeichen, dass sie ihm nicht ursprünglich eigen ist, sondern dass er sie durch Vermengung mit dem Polarstrom erhielt.

Wir sehen also daraus, dass die beiden Hauptluftströme entgegengesetzte Elektricitäten haben. Wie nun zwei Wasserströme von verschiedener Farbe, welche neben einander fliessen und sich nur langsam mengen, da, wo die Mengung theilweise stattgefunden, ihre Theile noch an der Farbe erkennen lassen; so die Wellen der Hauptluftströme an ihrer entgegengesetzten Elektricität. Denn was kann es anderes sein, wenn bei heiterem Himmel mein Apparat —Elektricität angiebt, als eine Luftwelle des Aequatorialstromes, welche sich in den Polarstrom hineingestürzt hat? Die starke —Elektricität bei Sommergewittern ist gewiss zum Theil die —Elektricität des Aequatorialstromes.

Ich will mit folgender Betrachtung schliessen. Die Atmosphäre giebt bei uns +Elektricität an die Erde ab. Würde diese +Elektricität der Erde nicht vernichtet durch eine Abgabe anderwärts von —Elektricität oder durch Hinwegnahme der +Elektricität, so müsste die ganze Erde längst +elektrisch geworden sein. Sie ist es aber nicht. Die Atmosphäre müsste durch die Abgabe der +Elektricität aber auch längst alle +Elektricität verloren haben, wenn nicht ein Ersatz stattfände. Daraus folgt, dass die Ursache der polarischen Elektrisirung der Atmosphäre noch fortwirkt. Was für eine sollte diese sein, wenn es nicht die Einwirkung der Sonne wäre?

II. Ueber die Rolle, welche bei der Elektricitäts-Vertheilung das Zwischen-Dielektricum spielt.

Bekanntlich sind vor einigen Jahren briefliche Verhandlungen zwischen den Herren Faraday und Riess über den in der Ueberschrift genannten Gegenstand gepflogen worden. Herr Faraday stellt sich vor, dass ein elektrischer Körper durch einen Nichtleiter hindurch, z. B. Luft, so wirke, dass die Zwischentheilchen polarisch-elektrisch werden, dass die Wirkung von Theichen zu Theilchen fortschreite; Herr Riess aber behauptet eine unmittelbare Wirkung in die Entfernung ohne Theilnahme der Zwischentheichen. Herr Dr. Jochmann, welcher im 12. Jahrgange der „Fortschritte der Physik“ über den Streit berichtet, ist der Ansicht, dass beide Vorstellungsweisen zur Darstellung der experimentellen Thatsachen genügen dürften. Wir wollen sehen, ob er darin Recht hat.

Hätte man den Streit durch ein Experiment entscheiden können, so wäre er längst entschieden. Dies Experiment ist aber in gewöhnlichen Verhältnissen gar nicht möglich. Mein Apparat zur Beobachtung der Luft-

elektricität hat mir das Mittel in die Hand gegeben, das Experiment zu machen.

In meinem Aufsatze über den Ursprung der Luftelektricität habe ich gezeigt, dass die Ladungskugel, wenn sie oben ableitend berührt wird, ihre Ladung durch Vertheilung erhält; wenn sie aber etwa eine halbe Stunde oben bleibt ohne Berührung, so bringt sie eine fast gleiche Ladung mit Elektricität herunter, welche derjenigen entgegengesetzt ist, die sie durch die Ladung mit Berührung erhält. Diese Ladung muss also durch Mittheilung stattgefunden haben.

Wenn nun am Horizonte eine Gewitterwolke steht, welche immer — elektrisch ist, d. h. welche der Kugel bei der Ladung mit Berührung + Elektricität giebt, so fragt sich, wie wird sie auf die Kugel wirken, wenn diese eine Zeitlang oben ohne Berührung stehen bleibt. Hat Herr Riess Recht, so wird sie die + Elektricität in der Kugel binden, die — Elektricität zurückstossen, welche dann Zeit hat, sich in der Luft zu zerstreuen. Dies wird um so eher zu erwarten sein, wenn der Himmel, ausgenommen die Stelle, wo die Wolke steht, klar ist. Dann muss man also annehmen, dass die Luft noch + elektrisch ist, und somit wird durch die + Elektricität der Luft ebenfalls noch eine Ladung durch Mittheilung entstehen, welche die Ladung durch Vertheilung von Seiten der Wolke nur unterstützt. Macht aber die Wolke die Atmosphäre — elektrisch im Sinne von Faraday, so ist der Erfolg ein anderer; die Kugel wird dann durch diese — Elektricität der Luft, wie immer durch Mittheilung, — elektrisch werden. Man sieht aus diesen Andeutungen, dass hier in der That der Streit durch ein Experiment entschieden werden kann.

Und er ist entschieden. Die eben gegebenen Andeutungen sind nicht erdacht, sie sind erlebt. Die Wolke stand am Horizonte, reichte etwa 20°—25° über denselben hinauf; sonst war der Himmel klar. Die Hauptwolke stand in SW, reichte etwa von S bis W, und in S zog sich ein schmaler Streifen noch höher hinauf, etwa bis 45°. Eine Ladung mit Berührung gab starke + Elektricität*), so dass daraus geschlossen werden konnte, dass die Wolke ohne Zweifel eine Gewitterwolke sei. Jetzt wurde die Kugel wieder gehoben, aber oben nicht berührt. Sie blieb etwa 15 Minuten stehen. Die Wolke verkündete mittlerweile ihren Donner, blieb aber am Rande des Horizontes. Als die Kugel ohne Berührung herunter genommen wurde, zeigte sie ziemlich starke + Elektricität. Sie musste also von — Elektricität umgeben gewesen sein. Also hat Herr Faraday Recht und Herr Dr. Jochmann Unrecht. Eine Wolke wirkt also vertheilend, indem sie erst die Lufttheilchen elektrisirt.

---

*) Die Kugel brachte nämlich + Elektricität mit herunter, so dass man also schliessen musste, der vertheilende Gegenstand, die Wolke, sei mit — Elektricität *geladen.*

III. Resultate sechsjähriger Beobachtungen über Luftelektricität.

Als mich vor einigen Jahren Herr W. Thomson aus Glasgow besuchte und sich sehr interessirte für mein Verfahren der Beobachtung der atmosphärischen Elektricität, nahm ich mir vor, die bis dahin gewonnenen Resultate zu veröffentlichen, von denen allerdings schon zwei Jahrgänge in Pogg. Annalen erschienen sind. Eine kürzlich erhaltene Zusendung von Herrn Thomson macht es mir zur Pflicht, nicht mehr damit zu säumen und nicht zu warten, bis sich Zeit findet, auch die beiden letzten Jahre zu berechnen.

Zwar müssen die Resultate für sich selbst sprechen; indess will ich zu ihrem Schutze doch noch auf das Urtheil zweier Männer hinweisen, welche mit mir auf demselben Felde gearbeitet haben. Der eine ist Herr Prof. Hankel, auf dessen Urtheil ich in dem Aufsatze über den Zusammenhang der Witterungs-Erscheinungen mich bezog. Der andere ist Herr W. Thomson selbst, der auch in Deutschland bei Physikern bekannt genug ist.*) Es ist in der That merkwürdig für diesen speculativen Kopf, dass er durch das, was er vor einigen Jahren mit mir hier verhandelt, sich bewogen gefunden, diesen Gegenstand mit allem Ernste weiter zu verfolgen. Was er mir zusandte, ist ein Vortrag, gehalten in der *Royal Institution of Great Britain, on atmospheric electricity.* Er beschreibt darin drei neue Instrumente zur Beobachtung atmosphärischer Elektricität, welche er vorgezeigt, deren Gebrauch er erörtert und von deren Anwendung er eine Menge sehr interessanter Resultate mitgetheilt hat. Er sagt darin über mein Verfahren: „*The much more accurate electrometer* (als Peltiers's nämlich, von dem er eben vorher spricht und welches in Brüssel und München angewandt wird), *and the greatly improved mode of observation invented by Dellmann, have given for the electric intensity, at any instant, still more precise results.*" Und an einer anderen Stelle: „*On the other hand, the method by a carrier ball, instead of a proof plane, is precisely the method by which, on a small scale, Faraday investigated the distribution of electricity induced on the earth's surface, by a piece of rubbed shellac: and the same method, applied on a suitable scale for testing the natural electrification of the earth in the open air, has given in the hands of Dellmann, of Creuznach, the most accurate results hitherto published in the way*

*) Es ist derselbe, von welchem Herr Prof. Helmholtz in seiner Schrift über die Wechselwirkung der Naturkräfte sagt: „Jedenfalls müssen wir Thomson's Scharfsinn bewundern, der zwischen den Buchstaben einer schon länger bekannten kleinen mathematischen Gleichung, welche nur von Wärme, Volumen und Druck der Körper spricht, Folgerungen zu lesen verstand, die dem Weltall, aber freilich erst nach unendlich langer Zeit, mit ewigem Tode drohen."

of electro-meteorological observation.“ Da glaube ich denn nicht länger w ten zu dürfen und geben zu müssen, was ich vorläufig geben kann. : Nachtrag wird also später folgen. Die Bezeichnung ist wie in dem A satze über den Zusammenhang der Witterungs-Erscheinungen.

Das Jahr 1852.

	A.	*B.*	*C.*	*M.*
1.	109,3	242,4	156,9	169,5
2.	113,5	151,0	156,7	140,4
3.	127,2	162,2	162,3	150,6
4.	137,2	140,3	107,7	128,4
5.	160,7	79,7	101,8	114,1
6.	140,2	94,2	122,9	119,1
7.	135,9	105,0	115,3	118,7
8.	161,6	127,6	158,6	149,3
9.	173,2	142,7	146,4	154,1
10.	150,4	169,0	169,8	163,1
11.	229,8	217,8	230,9	226,2
12.	188,6	278,1	220,8	229,2
Mittel:	152,3	159,2	154,2	155,2

Das Jahr 1853.

	A.	*B.*	*C.*	*M.*
1.	189,5	197,6	187,3	191,5
2.	154,3	219,6	188,9	187,6
3.	145,2	154,7	152,7	150,9
4.	149,6	129,2	122,3	133,7
5.	147,4	86,7	108,6	114,2
6.	141,2	99,9	127,6	122,9
7.	135,4	96,2	142,4	124,7
8.	153,6	100,7	138,2	130,8
9.	156,7	121,0	149,5	142,4
10.	195,0	172,9	209,6	192,5
11.	162,6	187,5	167,6	172,6
12.	194,0	283,5	222,1	233,2
M.:	160,4	154,1	159,7	158,1

Das Jahr 1854.

1.	278,0	538,7	336,6	384,4
2.				
3.				
4.				
5.				
6.				
7.				
8.				
9.	105,7	133,4	121,8	120,3
10.	144,1	131,1	158,9	144,7
11.	106,5	198,3	188,4	164,4
12.	121,2	193,7	166,1	160,3

Das Jahr 1855.

1.	155,2	265,5	218,5	213,1
2.	199,6	393,9	312,0	301,8
3.	144,5	158,7	143,0	148,7
4.	124,1	124,7	108,2	119,0
5.	117,6	87,8	86,5	97,3
6.	143,1	87,7	105,0	111,9
7.	147,1	102,3	129,6	126,3
8.	143,9	118,7	131,1	131,2
9.	126,2	105,8	139,7	123,9
10.	135,4	130,9	148,7	138,3
11.	150,2	173,5	120,3	148,0
12.	187,9	323,9	188,1	233,3
M.:	147,9	172,8	152,6	157,7

Das Jahr 1856.

1.	236,4	253,0	227,1	238,8
2.	131,1	136,5	121,7	129,8
3.	110,0	123,7	87,5	107,1
4.	105,1	108,1	103,7	105,6
5.	155,7	117,6	126,7	133,3
6.	183,0	128,3	161,4	157,6
7.	164,4	105,2	124,5	131,4
8.	130,7	103,0	106,5	113,4
9.	145,3	111,9	136,5	131,2
10.	156,4	147,8	157,0	153,7
11.	152,9	228,2	202,1	194,4
12.	148,1	208,7	185,1	180,6
M.:	151,6	147,7	145,0	148,1

Das Jahr 1857.

1.	148,5	197,3	159,7	168,5
2.	192,8	251,2	237,8	227,3
3.	138,2	134,6	129,2	134,0
4.	103,7	87,2	104,6	98,5
5.	114,0	80,2	75,7	90,0
6.	111,0	71,7	94,5	92,4
7.	84,4	80,8	96,2	87,1
8.	90,4	74,5	93,7	86,2
9.	128,8	100,8	108,3	112,6
10.	138,0	92,7	105,1	111,9
11.	139,3	156,3	155,9	150,5
12.	150,9	179,0	145,2	158,4
M.:	128,3	125,5	125,5	126,4

Das Jahr 1858.

	A.	B.	C.	M.
1.	122,7	171,6	138,4	144,2
2.	138 4	183,8	149,8	157,3
3.	123,0	142,0	120,0	128,3
4.	108,7	108,7	93,8	103,6
5.	116,8	89,4	99,2	101,8
6.	108,3	93,2	92,5	98,0
7.	108,6	81,9	87,7	92,7
8.	109,3	89,9	114,5	104,6
9.	127,6	105,0	106,1	112,9
10.	135,3	137,6	128,2	133,7
11.	145,0	223,9	205,5	191,5
12.	141,6	162,3	134,3	146,1
M.:	123,8	132,4	122,5	126,2

Sechsjährige Mittel; Januar, September, October, November und December siebenjährig.

	A.	B.	C.	M.
1.	177,1	266,6	203,4	215,7
2.	155,0	222,7	194,5	190,7
3.	131,3	146,0	132,4	136,6
4.	121,4	116,4	106,7	114,8
5.	135,4	90,2	99,8	108,5
6.	137,8	95,8	117,3	117,0
7.	129,3	95,2	115,9	113 5
8.	131,6	102,4	123,8	119,3
9.	137,6	117,2	129,8	128,2
10.	150,7	140,3	153,9	148,3
11.	155,2	197,9	181,5	178,2
12.	161,8	232,7	180,2	191,6
M.:	143,7	151,9	144,9	146,8

Wenn man diese Reihen übersieht, so erscheint wenigstens noch einige Gesetzmässigkeit. Hat man aber eine Monatstabelle vor sich, so sind die Grössen, welche zu derselben Tagesstunde an verschiedenen Tagen beobachtet wurden, so verschieden, dass man sich darüber wundern muss, dass sich am Ende des Jahres Alles so gut ausgleicht und dass die verschiedenen Jahre eine solche Uebereinstimmung zeigen. Um von dieser Verschiedenheit eine Anschauung zu geben, habe ich meinen Pack Monatstabellen herbeigeholt. Ich greife die erste, es ist der Januar 1857. Wir finden Morgens 6 Uhr nach einander folgende Zahlen: 242,4; 52,0; 95,9; 83,3; 156,3; 226,6 etc. Nachmittags 2 Uhr stehen verzeichnet: 104,8; 135,9; 52,3; 126,4; 209,4; 246,5; 351,8 etc. Abends 10 Uhr finden wir: 250,7; 86,3; 96,2; 56,4; 239,6 etc. Diesem Wirrwarr gegenüber kann man also mit den obigen Reihen wohl zufrieden sein. Aber ich kann mir doch auch nicht versagen, auf eine, wie mir scheint, merkwürdige Eigenschaft obiger Zahlen noch aufmerksam zu machen. Sie steckt in den Summen der Quotienten derselben. Die Anschauung wird es lehren. Diese Quotienten der sechs- bis siebenjährigen Mittel mögen zum Theil hier stehen. Es ist nämlich:

	$\frac{B}{A}$	$\frac{B}{C}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{M}{A}$	$\frac{M}{B}$	$\frac{M}{C}$
1.	1,505	1,311	0,871	1,218	0,809	1,060
2.	1,437	1,145	0,797	1,230	0,856	0,980
3.	1,112	1,103	0,992	1,040	0,936	1,032
4.	0,959	1,091	1,138	0,946	0,986	1,076
5.	0,666	0,904	1,357	0,801	1,203	1,087
6.	0,695	0,817	1,175	0,850	1,221	0,997
7.	0,736	0,821	1,116	0,878	1,192	0,970
8.	0.778	0,827	1,063	0,907	1,165	0,964
9.	0,852	0,903	1,060	0,932	1,094	0,988
10.	0,931	0,912	0,979	0,985	1,057	0,964

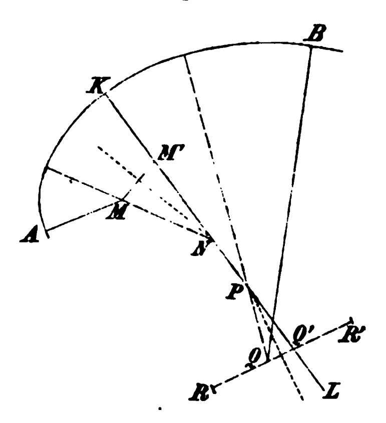
	$\frac{B}{A}$	$\frac{B}{C}$	$\frac{A}{C}$	$\frac{M}{A}$	$\frac{M}{B}$	$\frac{M}{C}$
11.	1,275	1,090	0,855	1,148	0,900	0,982
12.	1,438	1,291	0,808	1,180	0,823	1,063
S.:	12,384	12,215	12,301	12,115	12,242	12,172
M.:	1,03	1,02	1,03	1,01	1,02	1,01

Die Mittel dieser sechs Quotienten-Summen, oder auch die Quotienten-Summen selbst, sind so zu sagen gleich.

Kleinere Mittheilungen.

XX. Bemerkung über Curvenconstructionen. Bei graphischen Arbeiten kommt es häufig vor, dass man durch drei Punkte *A*, *K*, *B* (Fig. 1) eine Curve zu ziehen hat, deren Natur bekannt ist und von welcher man auch weiss, dass sie innerhalb der verlangten Ausdehnung keinen Krümmungswechsel erleidet. Liegen die gegebenen Punkte einander sehr nahe, so lässt sich die Curve durch einen Kreis ersetzen, im Gegenfalle aber, oder wenn grosse Genauigkeit verlangt wird, muss man auf die verschiedenen Krümmungshalbmesser der Curve Rücksicht nehmen; dies kann auf folgende Weise geschehen.


Fig. 1.

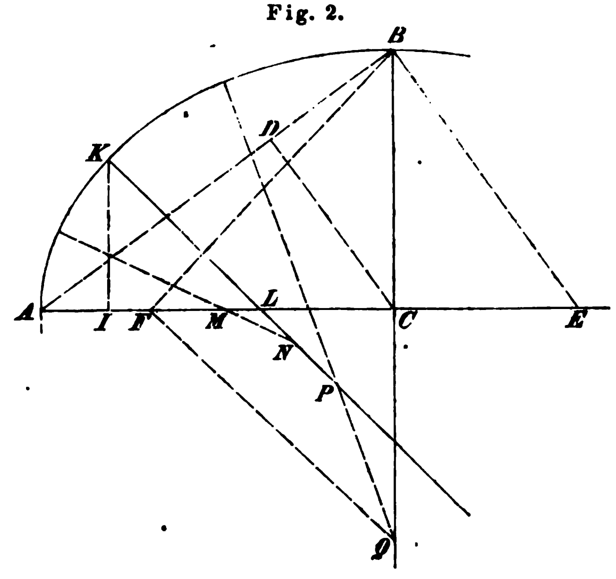


Unter der Voraussetzung, dass die Krümmungshalbmesser von *A* bis *B* entweder nur wachsen oder nur abnehmen, bestimme man zunächst den kleinsten und grössten Krümmungshalbmesser *AM* und *BQ* und construire die zum Punkte *K* gehörende Normale *KL*. Mit Hilfe der in Theil IV, S. 244 behandelten Aufgabe lässt sich nun jeder der Bögen *AK* und *KB* aus zwei Kreisbögen zusammensetzen. Man schneidet nämlich auf *KL* die Strecke $KM' = AM$ ab und halbirt MM' durch eine senkrecht zu MM' liegende Gerade, welche auf *KL* den zweiten Kreismittelpunkt *N* bestimmt; ebenso nimmt man $KQ' = BQ$ und erhält den dritten Kreismittelpunkt *P* als Durchschnitt von *KL* mit der Geraden, welche QQ' senkrecht halbirt. (Fallen zwei Punkte, wie z. B. Q und Q', nahe an einander, so kann man die Ge-

rade QQ' durch Ansetzen zweier gleichen Stücke QR und $Q'R'$ vergrössern.) Die Curve AKB bildet nun die Evolvente der gebrochenen Linie $AMNPQ$ und hat mit der gesuchten Curve die gegebenen drei Punkte, die Krümmungshalbmesser der Endpunkte und die Normale KL gemein; es ist daher eine sehr gute Uebereinstimmung beider Curven zu erwarten.

Dieses Verfahren lässt sich unter Anderem zur Construction der Ellipse benutzen, wenn deren Halbachsen AC und BC (Fig. 2) gegeben sind. Legt man BE senkrecht zu AB, so ist CE der Halbparameter und zugleich der Krümmungshalbmesser für den Scheitel A, mithin $AM = CE$. Zieht man ferner durch den Brennpunkt F die Gerade FQ senkrecht zu BF, so ist Q der Krümmungsmittelpunkt für den Scheitel B. Endlich bestimmt man noch irgend einen Ellipsenpunkt K nebst seiner Normale und wendet dann die vorige Construction an. Da sich die Krümmungshalbmesser in der Nähe von A rascher ändern, als bei B, so muss man K so wählen, dass der Bogen AK kleiner, als der Bogen BK ist; bei Ellipsen von grosser Excentricität kann man für K den Endpunkt der in F errichteten Ordinate nehmen, bei kleinen Excentricitäten dagegen würde dann $arc\, AK < arc\, BK$ werden. In allen Fällen scheint sich für K derjenige Punkt am besten zu eignen, dessen Normale die mittlere Lage hat, d. h. die Achsen unter 45° schneidet. Dieser Punkt empfiehlt sich auch durch die Leichtigkeit seiner Construction; legt man nämlich CD senkrecht zu AB, so ist $AD = CI$ die Abscisse, $BD = IK = IL$ die Ordinate und KL die Normale des erwähnten Punktes. — Im Vergleich zu den gewöhnlichen Constructionen sogenannter Korbbögen zeichnet sich das angegebene Verfahren durch sehr grosse Genauigkeit aus; man könnte diese durch Einschaltung mehrerer Ellipsenpunkte noch erhöhen, doch scheint dies, den gemachten Proben zu Folge, nur bei ganz exorbitanten Verhältnissen nöthig zu sein.

Fig. 2.



SCHLÖMILCH.

XXI. Ueber die durch Sieben messbaren Zahlen. Will man sehen, ob eine Zahl durch Sieben ohne Rest theilbar sei, so summire man von rechts nach links den einfachen Rest der Einer und Zehner, den doppelten Rest der Hunderter und Tausender, den vierfachen der Zehn- und Hunderttausender, dann wieder den einfachen, doppelten, vierfachen Rest von je zwei als zusammengehörig betrachteten Ziffern u. s. w. Lässt die Summe durch Sieben getheilt keinen Rest, so ist auch die ganze Zahl durch Sieben messbar. Z. B. 2479884855 ist gleich 7 . 354269265, weil die Reste von 55, 48, 88, 79, 24, d. i. 6, 6, 4, 2, 3 nach der Reihe 1, 2, 4 .... Mal genommen $6 + 12 + 16 + 2 + 6 = 42 = 6 . 7$. Dass man statt 12 und 16, 5 und 2 setzen konnte, ist klar, wo dann $6 + 5 + 2 + 2 + 6 = 21 = 3 . 7$.

Ebenso ist $14941504391723 = 7 . 2134500627389$, weil $2 + 6 + 2 + 4 + 2 + 5 = 21 = 3 . 7$.

Betrachten wir nämlich die Zahl 1|01|01|01|01|01|0, so sehen wir, dass durch Sieben gemessen die Eins an der Einerstelle selbst Rest bleibt; die Eins an der Stelle der Hunderter lässt den doppelten Rest, da $100 = (7 . 14) + 2$, die Eins an der Stelle der Zehntausender lässt 4 im Rest, da $10000 = (7 . 1428) + 4$. Wir sehen also, dass jede Zahl, die hundert Mal so gross ist, den doppelten Rest lässt. Eine Million lässt demnach einen doppelt so grossen Rest, als Zehntausend, nämlich 8, oder da $8 = 7 + 1$, Eins. Wenn also 45 $[= (6 . 7) + 3]$ drei als Rest lässt, so lässt 4500 sechs, 450000 zwölf, 45000000 vierundzwanzig oder, da $24 = (3 . 7) + 3$, wieder drei, 4500000000 wieder sechs u. s. w. als Rest. — Da man einer zweiziffrigen Zahl den Rest, den sie durch 7 getheilt lässt, leicht ansieht (der andere Factor ist nie grösser als 14, der Rest nicht grösser als 6), so lässt sich obige Probe leicht und rasch bewerkstelligen.

Neckargemünd. E. J. Böhringer.

XXII. Zur Integration partieller Differentialgleichungen. Von Prof. Simon Spitzer.

1. Integration der Gleichung:

$$1)\qquad \frac{d^2\varphi}{dt^2} = A_1 \frac{d^2\varphi}{dx_1^2} + A_2 \frac{d^2\varphi}{dx_2^2} + \dots + A_n \frac{\partial^2\varphi}{dx_n^2}.$$

Ich führe in diese Gleichung, in welcher $A_1, A_2 \dots A_n$ constante Zahlen bedeuten, eine neue unabhängig Variable r ein, welche mit den alten unabhängig Variablen in folgendem Zusammenhange steht:

$$2)\qquad r = \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \dots + \frac{x_n^2}{A_n},$$

alsdann ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = \frac{2x_1}{A_1}\frac{d\varphi}{\partial r}$$

und somit:

$$A_1 \frac{d^2\varphi}{dx_1^2} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{4x_1^2}{A_1}\frac{d^2\varphi}{\partial r^2}.$$

Ganz ebenso hat man:

$$\Delta_2 \frac{d^2\varphi}{dx_2^2} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{4x_2^2}{\Delta_2}\frac{d^2\varphi}{\partial r^2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\Delta_n \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} = 2\frac{\partial\varphi}{\partial r} + \frac{4x_n^2}{\Delta_n^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$$

und werden diese Werthe in die Gleichung 1) substituirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung 2) folgende Gleichung:

3) $$\frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 2n\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 4r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},$$

welche ebenfalls zu den linearen partiellen Differentialgleichungen gehört, und deren Integration mir vollständig gelang.

Ich setze nämlich in selbe

4) $$\varphi = e^{\alpha t} F(r),$$

woselbst α eine Constante bedeutet, und komme dadurch zu

$$\alpha^2 F(r) = 2n F'(r) + 4r F''(r),$$

welche sich geordnet folgendermaassen stellt:

5) $$r F''(r) + \frac{n}{2} F'(r) - \frac{\alpha^2}{4} F(r) = 0.$$

Ich habe durch dies die Integration der partiellen Differentialgleichung 3) abhängig gemacht von der Integration der linearen Differentialgleichung 5), welche von der zweiten Ordnung ist, und werde nun zeigen, auf welche Weise sich diese Gleichung integriren lässt.

Ich differentiire selbe μ Mal bezüglich r, unter μ eine constante Zahl verstehend, und habe dann:

6) $$r F^{(\mu+2)}(r) + \left(\mu + \frac{n}{2}\right) F^{(\mu+1)}(r) - \frac{\alpha^2}{4} F^{(\mu)}(r) = 0.$$

Setzt man hierein

$$F^{(\mu)}(r) = z$$

und führt alsdann in 6) eine neue unabhängig Variable ϱ ein, mittelst der Substitution

$$\varrho = \sqrt{\ },$$

so hat man, da

$$F^{(\mu+1)}(r) = \frac{dz}{dr} = \frac{1}{2\varrho}\frac{dz}{d\varrho}$$

$$F^{(\mu+2)}(r) = \frac{d^2z}{dr^2} = -\frac{1}{4\varrho^3}\frac{dz}{d\varrho} + \frac{1}{4\varrho^2}\frac{d^2z}{d\varrho^2}$$

ist, nach einer leichten Reduction statt der Gleichung 6) folgende Gleichung:

7) $$\frac{d^2z}{d\varrho^2} + \frac{2\mu + n - 1}{\varrho}\frac{dz}{d\varrho} - \alpha^2 z = 0,$$

die sich vereinfacht für

$$\mu = -\frac{n-1}{2},$$

man hat nämlich alsdann

$$\frac{d^2 z}{d\varrho^2} - \alpha^2 z = 0,$$

woraus

$$z = C_1 e^{\alpha\varrho} + C_2 e^{-\alpha\varrho}$$

folgt, unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Setzt man hierein für ϱ seinen Werth, so erhält man

$$z = C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}$$

und folglich, da

$$F^{(\mu)}(r) = z$$

ist,

8) $$F(r) = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}}\left[C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}\right].$$

Die in diesem Ausdrucke angezeigte $\frac{n-1}{2}$ malige Differentiation bezüglich r lässt sich in dem Falle leicht durchführen, wo $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl ist. Ich werde mir erlauben, die Richtigkeit dieses Integrales in diesem speciellen Falle direct nachzuweisen, und finde dies umsomehr angezeigt, da die Gleichung 5) durch $\mu = -\frac{n-1}{2}$ malige Differentiation eigentlich zu folgender Gleichung führt:

$$r F^{(\mu+2)}(r) + \left(\mu + \frac{n}{2}\right) F^{(\mu+1)}(r) - \frac{\alpha^2}{4} F^{(\mu)}(r)$$
$$= B_1 + B_2 r + B_3 r^2 + \ldots + B_{-\mu} r^{-\mu-1},$$

woselbst B_1, B_2, $B_3 \ldots B_{-\mu}$ willkürliche Constante bedeuten, ich aber auf die specielle Gleichung 6) meine weiteren Schlüsse baute.

Ich bilde mir nun $F'(r)$ und $rF''(r)$ und habe vorerst:

9) $$F'(r) = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}}\left[\frac{\alpha C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} - \alpha C_1 e^{-\alpha\sqrt{r}}}{2\sqrt{r}}\right].$$

Da nun bekanntlich

$$\frac{d^\mu [r\varphi(r)]}{dr^\mu} = r\frac{d^\mu \varphi(r)}{dr^\mu} + \mu\frac{d^{\mu-1}\varphi(r)}{dr^{\mu-1}}$$

ist, somit

$$r\frac{d^\mu \varphi(r)}{dr^\mu} = \frac{d^\mu [r\varphi(r)]}{dr^\mu} - \mu\frac{d^{\mu-1}\varphi(r)}{dr^{\mu-1}},$$

so hat man,

$$\mu = \frac{n+3}{2},\ \varphi(r) = C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}$$

setzend,

$$r F''(r) = r \frac{d^{\frac{n+3}{2}}}{dr^{\frac{n+3}{2}}} [C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}]$$

$$= \frac{d^{\frac{n+3}{2}}}{dr^{\frac{n+3}{2}}} [C_1 r e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 r e^{-\alpha\sqrt{r}}] - \frac{n+3}{2} \frac{d^{\frac{n+1}{2}}}{dr^{\frac{n+1}{2}}} [C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}]$$

und wenn man

$$C_1 r e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 r e^{-\alpha\sqrt{r}}$$

zwei Mal, ferner

$$C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}$$

einmal differentiirt, und reducirt:

$$10)\quad \left\{ \begin{aligned} r F''(r) = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}} \Big[&- \frac{n\alpha}{4\sqrt{r}} (C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} - C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}) \\ &+ \frac{\alpha^2}{4} (C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}) \Big]. \end{aligned} \right.$$

Diese in 8), 9) und 10) aufgestellten Werthe von $F(r)$, $F'(r)$ und $r F''(r)$ machen nun wirklich die Gleichung 5) identisch, folglich ist das in 8) hingestellte Integrale richtig. Es ist demnach

$$\varphi = e^{\alpha t} \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}} [C_1 e^{\alpha\sqrt{r}} + C_2 e^{-\alpha\sqrt{r}}]$$

oder anders geschrieben:

$$\varphi = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}} [C_1 e^{\alpha(t+\sqrt{r})} + C_2 e^{\alpha(t-\sqrt{r})}]$$

eine Auflösung der vorgelegten Gleichung, und da eine Summe beliebig vieler solcher Ausdrücke, bei willkürlicher Wahl von α, C_1 und C_2, auch genügt, so hat man für das vollständige Integral der Gleichung 3)

$$11)\quad \varphi = \frac{d^{\frac{n-1}{2}}}{dr^{\frac{n-1}{2}}} [\varphi_1(t+\sqrt{r}) + \varphi_2(t-\sqrt{r})]$$

unter φ_1 und φ_2 willkürliche Functionen verstanden.

Ich bemerke hierbei, dass selbst in dem Falle, wo n keine unger sondern eine gerade Zahl ist, das Integral der Gleichung 3) in der (chung 11) enthalten ist, aber ich will, weil alsdann Differentialquotie mit gebrochenem Differentiationsindex auftreten und solche Formen, den äusserst genialen Arbeiten Liouville's, noch nicht gehörig studirt einen anderen Weg betreten, um das Integral der Gleichung 3) zu erha

Ich gehe, bis zur Gleichung 7) Schritt für Schritt den früheren befolgend, von der Gleichung 7) aus, diese ist:

$$7)\qquad \frac{d^2 z}{d\varrho^2} + \frac{2\mu + n - 1}{\varrho} \cdot \frac{dz}{d\varrho} - \alpha^2 z = 0$$

und setze in selbe, da n in dem jetzigen Falle eine gerade Zahl ist,

$$\mu = -\frac{n}{2} + 1,$$

alsdann erhält man durch Fortschaffen der Brüche die Gleichung:

$$12)\qquad \varrho \frac{d^2 z}{d\varrho^2} + \frac{dz}{d\varrho} - \alpha^2 \varrho z = 0,$$

welche nach der von mir im 2. Bande Seite 168 dieses Journals entwic ten Methode folgendes Integral giebt:

$$13)\qquad z = C_1 \int_0^\pi e^{\alpha\varrho\cos\lambda}\, d\lambda + C_2 \int_0^\pi e^{\alpha\varrho\cos\lambda} \log(\varrho \sin^2\lambda)\, d\lambda,$$

unter C_1 und C_2 willkürliche Constante verstanden. Setzt man hierein

$$\varrho = \sqrt{r},\ F^{(\mu)}(r) = z,\ .$$

so erhält man:

$$14)\quad F(r) = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \left[C_1 \int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\, d\lambda + C_2 \int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda} \log(\sqrt{r}\sin^2\lambda) \right.$$

als Integral der Gleichung 2). Aber auch hier ist nothwendig, sich di von der Richtigkeit dieses Integrales zu überzeugen. Ich bilde da analog der früheren Vorgangsweise, $F'(r)$ und $rF''(r)$ und erhalte:

$$F'(r) = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \left[\frac{C_1 \alpha}{2\sqrt{r}} \int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda} \cos\lambda\, d\lambda \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha C_2}{2\sqrt{r}} \int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda} \cos\lambda \log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\, d\lambda + \frac{C_2}{2r} \int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\, d\lambda \right],$$

ferner:

$$r F''(r) = r \frac{\partial^{\frac{n}{2}+1}}{\partial r^{\frac{n}{2}+1}} \left[C_1 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda \right]$$

$$= \frac{\partial^{\frac{n}{2}+1}}{\partial r^{\frac{n}{2}+1}} \left[C_1 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda \right]$$

$$-\left(\frac{n}{2}+1\right) \frac{\partial^{\frac{n}{2}}}{\partial r^{\frac{n}{2}}} \left[C_1 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda \right],$$

durch zweimalige Differentiation von

$$C_1 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda$$

bezüglich r und einmalige Differentiation von

$$C_1 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda$$

bezüglich r erhält man $r F''(r)$ in der Form eines $\frac{n}{2} - 1^{\text{ten}}$ Differential-quotienten, und zwar ist:

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} \left[C_1 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + C_2 r \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda \right]$$

$$= \left(\tfrac{3}{2} C_1 + C_2\right) \frac{\alpha}{2\sqrt{r}} \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \cos\lambda\, d\lambda + \frac{C_1 \alpha^2}{4} \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \cos^2\lambda\, d\lambda$$

$$+ \frac{C_2}{2r} \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} d\lambda + \frac{3 C_2 \alpha}{4\sqrt{r}} \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \cos\lambda \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda$$

$$+ \frac{C_2 \alpha^2}{4} \int_0^{\pi} e^{\alpha \sqrt{r} \cos\lambda} \cos^2\lambda \log(\sqrt{r} \sin^2 \lambda)\, d\lambda$$

und:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[C_1\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\,d\lambda + C_2\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right]$$

$$=\frac{C_1\alpha}{2\sqrt{r}}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\,d\lambda + \frac{C_2}{2r}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\,d\lambda$$

$$+\frac{C_2\alpha}{2\sqrt{r}}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda,$$

folglich ist:

$$rF''(r)=\frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}}\left[\frac{\alpha}{4\sqrt{r}}(C_1+2C_2-nC_1)\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\,d\lambda\right.$$

$$+\frac{C_1\alpha^2}{4}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos^2\lambda\,d\lambda - \frac{nC_2}{4r}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\,d\lambda$$

$$+\frac{C_2\alpha}{4\sqrt{r}}(1-n)\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda$$

$$\left.+\frac{C_2\alpha^2}{4}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos^2\lambda\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right].$$

Werden nun die gefundenen Werthe von $F(r)$, $F'(r)$ und $rF''(r)$ in

$$rF''(r)+\frac{n}{2}F'(r)-\frac{\alpha^2}{4}F(r)$$

substituirt, so erhält man:

$$rF''(r)+\frac{n}{2}F'(r)-\frac{\alpha^2}{4}F(r)=\frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}}\left\{\frac{\alpha}{4\sqrt{r}}(C_1+2C_2)\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\right.$$

$$-\frac{C_1\alpha^2}{4}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\sin^2\lambda\,d\lambda + \frac{C_2\alpha}{4\sqrt{r}}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda$$

$$\left.-\frac{C_2\alpha^2}{4}\int\limits_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\sin^2\lambda\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right\},$$

was bei Berücksichtigung von

$$-\frac{C_1\alpha^2}{4}\int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\sin^2\lambda\,d\lambda = -\frac{C_1\alpha}{4\sqrt{r}}\int_0^\pi \sin\lambda\,.\,\frac{d\,e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}}{d\lambda}\,d\lambda$$

$$= -\frac{C_1\alpha}{4\sqrt{r}}\int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\,d\lambda$$

und

$$-\frac{C_2\alpha^2}{4}\int_0^\pi e^{\alpha\cos\lambda\,.\,\sqrt{r}}\sin^2\lambda\,\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda$$

$$= \frac{C_2\alpha}{4\sqrt{r}}\int_0^\pi \sin\lambda\,\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,\frac{\partial\,e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}}{d\lambda}\,d\lambda$$

$$= -\frac{C_2\alpha}{2\sqrt{r}}\int_0^\pi \cos\lambda\,e^{\alpha\cos\lambda\sqrt{r}}\,d\lambda - \frac{C_2\alpha}{4\sqrt{r}}\int_0^\pi e^{\alpha\sqrt{r}\cos\lambda}\cos\lambda\,\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda$$

sich auf

$$r\,F''(r) + \frac{n}{2}F'(r) - \frac{\alpha^2}{4}F(r) = 0$$

zurückzieht. Aus 14) folgt nun weiter

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}}\left[C_1\int_0^\pi e^{\alpha(t+\cos\lambda\sqrt{r})}\,d\lambda + C_2\int_0^\pi e^{\alpha(t+\cos\lambda\sqrt{r})}\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right]$$

und da auch eine Summe beliebig vieler solcher Ausdrücke bei willkürlicher Wahl von α, C_1, C_2 genügt, so hat man für das vollständige Integral der Gleichung 3) folgenden Werth:

$$15)\quad \varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}}\left[\int_0^\pi \varphi_1(t+\sqrt{r}\cos\lambda)\,d\lambda + \int_0^\pi \varphi_2(t+\sqrt{r}\cos\lambda)\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right],$$

unter φ_1 und φ_2 solche willkürliche Functionen verstanden, welche die Integrale, unter denen sie vorkommen, weder unbestimmt noch unendlich machen.

Ich habe also für die partielle Differentialgleichung

$$3)\qquad \frac{\partial^2\varphi}{dt^2} = 2n\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 4r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}$$

folgende zwei Werthe erhalten:

$$11)\qquad \varphi = \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} [\varphi_1 (t + \sqrt{r}) + \varphi_2 (t - \sqrt{r})]$$

$$15)\ \varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \left[\int_0^\pi \varphi_1 (t + \sqrt{r} \cos\lambda)\, d\lambda + \int_0^\pi \varphi_2 (t + \sqrt{r} \cos\lambda) \log(\sqrt{r} \sin^2\lambda)\, d\lambda \right.$$

von denen der erste zweckmässig ist für ungerade n und der zweite f gerade Werthe von n.

In den speciellen Fällen, wo $n = 1$ und $n = 2$ ist, hat man daher

$$\varphi = \varphi_1 (t + \sqrt{r}) + \varphi_2 (t - \sqrt{r})$$

$$\varphi = \int_0^\pi \varphi_1 (t + \sqrt{r} \cos\lambda)\, d\lambda + \int_0^\pi \varphi_2 (t + \sqrt{r} \cos\lambda) \log(\sqrt{r} \sin^2\lambda)\, d\lambda$$

Formeln, von denen die erste die Gesetze der Schwingungen gespannt Saiten giebt und schon lange bekannt ist, die zweite aber von Poiss im *Journal de l'école polytechnique cah.* 14, *pag.* 227 gegeben wurde.

2. Integration der Gleichung:

$$t^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}.$$

Verfolgt man genau den früheren Gang, so kommt man zu der Gleichun

$$16)\qquad t^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 2n \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

und setzt man in selbe

$$\varphi = t e^{\frac{\alpha}{t}} F(r),$$

unter α wieder eine Constante verstanden, so hat man:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = e^{\frac{\alpha}{t}} \left(1 - \frac{\alpha}{t}\right) F(r),$$

ferner:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = \frac{\alpha^2}{t^3} e^{\frac{\alpha}{t}} F(r),$$

daher ist:

$$\alpha^2 F(r) = 2n F'(r) + 4r F''(r),$$

welche Gleichung vollkommen die Gestalt 5) hat. Man hat somit für d complete Integral der Gleichung 16) folgende Werthe:

$$17)\qquad \varphi = t \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} \left[\varphi_1 \left(\frac{1}{t} + \sqrt{r}\right) \right] + \varphi_2 \left(\frac{1}{t} - \sqrt{r}\right) \right]$$

$$18)\quad \varphi = t\,\frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}}\left[\int\limits_0^\pi \varphi_1\left(\frac{1}{t}+\sqrt{r}\cos\lambda\right)d\lambda + \int\limits_0^\pi \varphi_2\left(\frac{1}{t}+\sqrt{r}\cos\lambda\right) lg(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right],$$

ersterer passt für ungerade, letzterer für gerade n.

3. Integration der Gleichung:

$$19)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = A_1 x_1^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + A_2 x_2^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n x_n^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2}.$$

Führt man in diese Gleichung eine neue unabhängig Variable r ein, welche mit den alten unabhängig Variablen in folgendem Zusammenhange steht:

$$20)\quad r = \frac{1}{A_1 x_1^2} + \frac{1}{A_2 x_2^2} + \ldots + \frac{1}{A_n x_n^2},$$

alsdann ist:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_1} = -\frac{2}{A_1 x_1^3}\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

und ferner:

$$A_1 x_1^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} = \frac{4}{A_1 x_1^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 6\frac{\partial\varphi}{\partial r}.$$

Ganz ebenso hat man:

$$A_2 x_2^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = \frac{4}{A_2 x_2^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 6\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

. . . .

$$A_n x_n^4\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_n^2} = \frac{4}{A_n x_n^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + 6\frac{\partial\varphi}{\partial r}$$

und werden diese Werthe in die Gleichung 19) substituirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichung 20) folgende Gleichung:

$$21)\quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 6n\frac{\partial\varphi}{\partial r} + 4r\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2},$$

welche sich von der Gleichung 3) nur durch ein dreifach so grosses n unterscheidet. Man hat daher für das Integral der Gleichung 21) die beiden Formen:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{3n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{3n-1}{2}}}\left[\varphi_1(t+\sqrt{r}) + \varphi_2(t-\sqrt{r})\right]$$

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{3n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{3n}{2}-1}}\left[\int\limits_0^\pi \varphi_1(t+\sqrt{r}\cos\lambda)\,d\lambda + \int\limits_0^\pi \varphi_2(t+\sqrt{r}\cos\lambda)\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\,d\lambda\right]$$

und zwar erstere für ungerade, letztere für gerade n.

4. **Integration der Gleichung:**

$$t^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = A_1 x_1^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 x_2^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n x_n^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}.$$

Verfolgt man genau den bei der Gleichung 19) betretenen Weg, so kömm man zu der Gleichung:

$$t^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 6n \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4r \frac{d^2 \varphi}{dr^2},$$

welcher genügt wird durch:

$$\varphi = t \frac{\partial^{\frac{3n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{3n-1}{2}}} \left[\varphi_1 \left(\frac{1}{t} + \sqrt{r} \right) + \varphi_2 \left(\frac{1}{t} - \sqrt{r} \right) \right]$$

$$\varphi = t \frac{\partial^{\frac{3n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{3n}{2}-1}} \left[\int_0^\pi \varphi_1 \left(\frac{1}{t} + \sqrt{r} \cos \lambda \right) d\lambda + \int_0^\pi \varphi_2 \left(\frac{1}{t} + \sqrt{r} \cos \lambda \right) lg (\sqrt{r} \sin^2 \lambda) \, d\lambda \right]$$

5. **Integration der Gleichung:**

$$22) \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}.$$

Ich setze hier wieder:

$$r = \frac{x_1^2}{A_1} + \frac{x_2^2}{A_2} + \ldots + \frac{x_n^2}{A_n}$$

und erhalte die Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2n \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2},$$

welche für

$$\varphi = e^{\alpha^2 t} F(r)$$

übergeht in:

$$5) \qquad \alpha^2 F(r) = 2n F'(r) + 4r F''(r).$$

Man hat daher für ein ungerades n:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} \left[C_1 e^{\alpha^2 t + \alpha \sqrt{r}} + C_2 e^{\alpha^2 t - \alpha \sqrt{r}} \right],$$

hingegen für ein gerades n:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \left[C_1 \int_0^\pi e^{\alpha^2 t + \alpha \sqrt{r} \cos \lambda} d\lambda + C_2 \int_0^\pi e^{\alpha^2 t + \alpha \sqrt{r} \cos \lambda} \log (\sqrt{r} \sin^2 \lambda) \, d\lambda \right].$$

Nun ist aber bekanntlich

$$e^{\alpha^2 t} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2 + 2\alpha w \sqrt{r}} \, dw,$$

somit erhält man, wenn man in die gefundenen Werthe von φ diesen Werth einführt, für ein ungerades n:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} \left[C_1 e^{\alpha(2w\sqrt{t}+\sqrt{r})} + C_2 e^{\alpha(2w\sqrt{t}-\sqrt{r})}\right] dw$$

und für ein gerades n:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \Big\{ C_1 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} e^{-w^2+\alpha(2w\sqrt{t}+\sqrt{r}\cos\lambda)}\, d\lambda\, dw$$

$$+ C_2 \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} e^{-w^2+\alpha(2w\sqrt{t}+\sqrt{r}\cos\lambda)} \log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\, d\lambda\, dw \Big\}$$

und wenn man von den willkürlichen Constanten zu den willkürlichen Functionen übergeht, so hat man, falls n ungerade ist:

$$23)\quad \varphi = \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} \left[\varphi_1(2w\sqrt{t}+\sqrt{r}) + \varphi_2(2w\sqrt{t}-\sqrt{r})\right] dw$$

und für ein gerades n:

$$24)\quad \varphi = \frac{\partial^{\frac{n}{2}-1}}{\partial r^{\frac{n}{2}-1}} \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} \Big\{\varphi_1(2w\sqrt{t}+\sqrt{r}\cos\lambda)$$

$$+ \varphi_2(2w\sqrt{t}+\sqrt{r}\cos\lambda)\log(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\Big\}\, d\lambda\, dw,$$

unter φ_1 und φ_2 solche willkürliche Functionen verstanden, welche die Integrale, unter denen sie vorkommen, weder unbestimmt noch unendlich machen. Das Integral 23) besteht aus zwei Theilen, die aber, wie man sieht, nicht von einander verschieden sind; denn setzt man in dem Theile, welches mit der willkürlichen Function φ_2 versehen ist, statt w eine neue Variable $-w$, so erhält man genau dasselbe, was durch die erste willkürliche Function ausgedrückt ist; man hat daher für ein ungerades n folgendes Integral:

$$\varphi = \frac{\partial^{\frac{n-1}{2}}}{\partial r^{\frac{n-1}{2}}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} f(2w\sqrt{t}+\sqrt{r})\, dw,$$

woselbst f das Zeichen einer willkürlichen Function bedeutet.

Auch hier lässt sich bemerken, dass in den beiden speciellen Fällen $n=1$ und $n=2$ die Integrale der Gleichung:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = 2n \frac{\partial \varphi}{\partial r} + 4r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}$$

sich so stellen:

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-w^2} f(2w\sqrt{t} + \sqrt{r})\, dw$$

und

$$\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_0^{\pi} e^{-w^2} \{\varphi_1(2w\sqrt{t} + \sqrt{r}\cos\lambda) + \varphi_2(2w\sqrt{t} + \sqrt{r}\cos\lambda)\, lg(\sqrt{r}\sin^2\lambda)\}\, d\lambda\, dw$$

und auf diese Weisen von Laplace und Poisson gegeben wurden (*Journal de l'école polyt. cah.* 14, *pag.* 245 und *cah.* 15, *pag.* 241.)

Ich will zum Schlusse bemerken, dass die Gleichungen:

$$t^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_1 x_1^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 x_2^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n x_n^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

$$t^2 \frac{\partial \varphi}{\partial t} = A_1 x_1^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_1^2} + A_2 x_2^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_2^2} + \ldots + A_n x_n^4 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_n^2}$$

eine Integration auf ganz ähnliche Weise gestatten.

XXIII. Ueber die Theorie des Nordlichtes. Von Dr. F. DELLMANN in Kreuznach a. R.

Eine Theorie des Nordlichtes ist bisjetzt vergebens gesucht, es sind nur Wege vorgeschlagen worden, welche dahin führen können. Zuerst hat Halley vor etwa 150 Jahren den Gedanken ausgesprochen, dass es eine Wirkung des Erdmagnetismus sei. Diese Ansicht hat noch jetzt die meisten Anhänger und wurde von Dalton weiter ausgebildet. Etwas später trat derselben eine andere entgegen, hauptsächlich von Franklin, Canton und Hamilton im vorigen, von Schübler in diesem Jahrhundert vertheidigt. Nennen wir jene die magnetische, so können wir diese die elektrische nennen, da die letztgenannten Männer der Ansicht waren, dass das Nordlicht seinen Ursprung in der Elektricität der Atmosphäre habe. Die neueren Fortschritte der Physik und Meteorologie gestatten es, die Gründe für beide Hypothesen genauer abzuwägen, und nach des Verfassers Ansicht hat die zweite jetzt das Uebergewicht für sich.

Unter den neueren Naturforschern hat sich vielleicht A. v. Humboldt am vollständigsten über die Theorie des Nordlichtes ausgesprochen. Wir wollen drei Hauptstellen aus dem ersten Bande seines Kosmos erörtern. S. 198 sagt er: „Der tellurische Magnetismus, die elektrodynamischen, von *dem geistreichen* Ampère gemessenen Kräfte stehen gleichzeitig in

innigem Verkehr mit dem Erd- oder Polarlichte, wie mit der inneren und äusseren Wärme des Planeten, dessen Magnet-Pole als Kälte-Pole betrachtet werden. Wenn Halley vor 128 Jahren nur als eine gewagte Vermuthung aussprach, dass das Nordlicht eine magnetische Erscheinung sei, so hat Faraday's glänzende Entdeckung (Lichtentwickelung durch magnetische Kräfte) jene Vermuthung zu einer empirischen Gewissheit erhoben." Freilich, wenn ein mit der Physik nicht Vertrauter so etwas liest, so wird er die oben ausgesprochene Ansicht, dass wir noch keine Theorie des Nordlichtes besitzen, für absurd halten. Da möchte ich denn zunächst im Scherze mich auf die bekannte Anekdote berufen, in welcher erzählt wird, dass ein berühmter Berliner Naturforscher einen Examinanden nach der Theorie des Nordlichtes fragt. Als dieser sich dadurch entschuldigt, dass er dies gewusst, aber wieder vergessen habe, erwidert der Examinator: „Das ist schade, dass Sie vergessen haben, was noch nie Einer wusste." Der erste Satz in der obigen v. Humboldt'schen Stelle acceptirt die Ampère'sche Theorie vom Erdmagnetismus, von welcher Moser in Königsberg sagt*): „Diese neue Erfindung habe ich nicht erwähnt. Wie sollte ich auch, wenn diese Theorie sich nicht entfaltet hat und es mit der ganz unbestimmten Vorstellung der elektrischen Ströme bewenden lässt? Wie soll man dem Gegner eine Schlacht abgewinnen, wenn er nicht im Felde erscheint?" Moser wird als Physiker im Kosmos sehr gerühmt, wie er es auch verdient. Aber etwas merkwürdig ist der Schluss der obigen Stelle, welcher wegen des Funkens, den Faraday zuerst dem Magneten entlockt hat, das Nordlicht für eine empirisch gewisse magnetische Erscheinung hält. Und doch hat das Nordlicht nichts von der Natur eines Funkens, als etwa das Licht, und auch dies nicht immer. — Die zweite Stelle lautet S. 201: Dieser Zusammenhang des Polarlichtes mit den feinsten Cirruswölkchen verdient eine besondere Aufmerksamkeit, weil er uns die elektromagnetische Lichtentwickelung als Theil eines meteorologischen Processes zeigt. Der tellurische Magnetismus offenbart sich hier in seiner Wirkung auf den Dunstkreis, auf die Condensation der Wasserdämpfe." Den zweiten Satz kann ein Physiker nicht unterschreiben, weil er nichts von der Einwirkung des Magnetismus auf Wasserdämpfe weiss; wohl aber den ersten, wenn er das Nordlicht für eine Erscheinung der Luftelektricität hält; wenigstens tritt ihm durch diese Annahme der Zusammenhang der Erscheinungen näher. — Die dritte Stelle steht S. 205 und heisst: „Der Glaube an ein knisterndes Geräusch (beim Nordlicht) ist nicht in dem Volke, sondern bei gelehrten Reisenden wohl deshalb entstanden, weil man schon in früher Zeit, wegen des Leuchtens der Elektricität in luftverdünnten Räumen, das Nordlicht für eine Wirkung atmosphärischer Elektricität erklärte, und hörte, was man zu hören wünschte. Neue, mit sehr empfindlichen

*) Vorträge aus dem Gebiete der Naturwissenschaften etc., I. Bd., S. 220.

Elektrometern angestellte Versuche haben gegen alle Erwartung bisher nur negative Resultate gegeben. Der Zustand der Luftelektricität ward während der stärksten Nordlichter nicht verändert gefunden." Es muss uns wahrhaft leid thun, einen so hochstehenden Mann einmal sich zu Gunsten einer Ansicht aussprechen zu hören, die er in seinem ganzen langen Leben verleugnet hat. A. v. Humboldt will von Volksurtheilen über wissenschaftliche Dinge sonst nichts wissen, und hier sollen sie höher stehen, als die der gelehrten Forscher. Wir werden weiter unten abermals in einem eclatanten Beispiele sehen, was von solchen Volksurtheilen zu halten ist. Der v. Humboldt'schen Stelle steht eine andere von Biot*) übrigens gerade gegenüber. Sie heisst: „Diese Beobachtungen geben, wie mich dünkt, einer in allen Gegenden des hohen Nordens allgemein verbreiteten Meinung viel Wahrscheinlichkeit, dass man nämlich bei sehr lebhaften Nordlichtern ein Brausen höre, welches manchmal sehr stark werde. Ich weiss hinlänglich, wie wenig Vertrauen Aussagen des Volkes dienen, welche durch Furcht eingegeben, oder durch den täuschenden Schein schneller Bewegungen veranlasst sein können. Ich für meinen Theil nehme keinen Anstand zu erklären, dass man, wenn man die Sache ohne Vorurtheil untersucht, bei der so auffallenden Uebereinstimmung der Zeugnisse nicht umhin könne, an das Brausen des Nordlichtes als Thatsache zu glauben." Und Biot gehört zu denen, welche viel Nordlichter gesehen haben; er lebte zur Bestimmung der Länge des Sekundenpendels eine Zeitlang auf den Shetlands-Inseln. Was nun den Kern der obigen Stelle von v. Humboldt betrifft, so ist es meiner Ansicht nach sehr zu beklagen, dass die Elektrometer, welche bei den stärksten Nordlichtern keine Veränderung im Zustande der Luftelektricität wahrnehmen liessen, sicher sehr wenig empfindlich waren. Meine Beobachtungen vom 1. October 1858**) haben das Gegentheil dargethan. Die mir bekannte Einwirkung der Nordlichter auf Telegraphendräthe liess mich den Erfolg vorhersehen. Auch Schübler beobachtete schon 1817, dass in den Tagen nach dem Erscheinen eines Nordlichtes die + Elektricität schnell stieg und eine Stärke zeigte, wie sie dieselbe sonst nur bei strenger Winterkälte hat. Die Beobachtung Schübler's fand ferner Buzorini nach den Nordlichtern am 25. und 26. Januar und 18. Februar 1837 vollkommen bestätigt, und im November jenes Jahres, zu welcher Zeit fast kein Tag verging, wo nicht diese Erscheinung stattfand, in solchem Grade, dass die + Elektricität das Goldblatt des Elektrometers häufig entzwei riss und die Wetterstange mehrere Mal kleine Funken gab***). Stark fand (nach dem meteorologischen Jahrbuch vom Jahr 1831) während des Nordlichtes am 30. August die Luftelektricität so stark,

*) Annalen der Physik von Gilbert. Jahrgang 1821, 1. Stück, S. 31.

**) Pogg. Annalen, Bd. 110, S. 332 ff.

***) Luftelektricität, Erdmagnetismus und Krankheits-Consitution. Von L. Buzorini. Bellevue 1841, S. 12.

dass sein Elektrometer zwei- bis dreizöllige Funken mit + Elektricität gab. Alles dies stimmt mit meinen genauen Messungen so weit überein, als ich constatiren konnte, dass ein schwaches Nordlicht den + elektrischen Zustand der Luftelektricität bedeutend erhöht. Unter den Genannten verdienen Schübler und Buzorini alles Vertrauen.

Der weitläufige Aufsatz von Biot über das Nordlicht enthält der Gründe für die magnetische Theorie (meist sind sie von Dalton entlehnt) so viele, welche sich selbst widerlegen, dass darüber nur wenig gesagt zu werden braucht; so der von der Lage der Corona, von dem Biot S. 12 der erwähnten Abhandlung sagt: „Doch darf man dieses nicht für ein vollkommenes und unabänderliches Zusammenfallen nehmen, denn es zeigen sich davon häufige Abweichungen in den Beobachtungen." Und das ist natürlich, da ja manche Nordlichter eine Verschiebung am Horizonte während ihres Verlaufes wahrnehmen lassen. Zur Erklärung des Vorhandenseins metallischer Theile in der Atmosphäre nimmt er in den Nordlichtgegenden eine Menge thätiger Vulkane an, die, wie wir jetzt genau wissen, gar nicht vorhanden sind. Und endlich muss auch er zur Erklärung der Strahlen die Elektricität zu Hilfe nehmen.

Die magnetische Theorie soll zwei Hauptgründe für sich haben, auf die wir daher genauer eingehen müssen: 1) dass das Nordlicht auf die Magnetnadel wirkt, und 2) dass es am häufigsten sich zeigt, wo der Erdmagnetismus am stärksten ist.

Den ersten Grund in Verbindung mit der Thatsache, dass nicht magnetische Nadeln, z. B. kupferne, völlig in Ruhe bleiben, hält Biot für geeignet, die wirklich magnetische Natur des Phänomens ausser allen Streit zu setzen. Aber darauf ist zuerst zu erwidern, dass die magnetische Ansicht diesen Grund angenommen hat, ohne die Wahrheit desselben jemals anders bewiesen zu haben, als durch gleichzeitiges Eintreffen des Nordlichtes und der Abweichung der Nadel. Dabei denke man an den Eingang der Hebel'schen Erzählung vom Maulwurf und hüte sich wohl, ohne Weiteres aus dem gleichzeitigen Eintreten zweier Erscheinungen auf ihren Causalnexus zu schliessen. Denn man kann sich sehr wohl denken, dass beide Erscheinungen eine gemeinschaftliche Ursache haben, dass sie beide Wirkungen des Erdmagnetismus sind. Die Modification, welche der Erdmagnetismus annehmen muss, um das Nordlicht zu erzeugen, kann ja auch die andere mit herbeiführen. Jene Modification ist nach der Voraussetzung eine Steigerung der erdmagnetischen Kraft, und dafür soll auch die Erfahrung sprechen, z. B. von Hansteen gemacht, dass in jenen Gegenden, wo Nordlichter sich zeigen, kurz vor ihrem Erscheinen der Erdmagnetismus an Intensität sich steigert. Das Nordlicht soll ja ein Ausströmen des Erdmagnetismus sein. Die Modification des Erdmagnetismus aber, welche im Stande sein soll, der Nadel eine andere Richtung zu geben, kann keine andere sein, als eine Abänderung in der Vertheilung der erdmagnetischen

Kraft. Wenn nun jene Gegenden der Nordlichter an Kraft gewinnen, so müssen andere Gegenden verlieren; also ist mit der localen Steigerung der erdmagnetischen Kraft eine Aenderung in der Vertheilung verbunden und dadurch ohne Nordlicht die Abweichung der Nadel erklärt.

Aber dagegen kann man sagen, dass die locale Steigerung des Erdmagnetismus zur Zeit der Nordlichter doch einen Grund haben müsse und dieser kein anderer sein könne, als eine Aenderung der Wärmevertheilung auf der Erdoberfläche. Und in der That spricht auch dafür das Factum, dass die Nordlichter am häufigsten sich zeigen zur Zeit der Tag- und Nachtgleichen. Die Aenderung der Wärmevertheilung findet aber ganz allmälig statt, also gewiss auch die Zu- und Abnahme des Erdmagnetismus in jenen Gegenden, wenn sie stattfindet. Auch soll die Zunahme der magnetischen Intensität den Nordlichtern vorausgehen. Danach müsste sich auch die Aenderung in der Richtung der Nadel langsam einstellen und den Polarlichtern vorangehen. Die Aenderung in der Richtung der Nadel wäre ein Vorbote der Nordlichter, welche erst dann eintreten könnten, wenn die Nadel das Maximum der Abweichung erreichte. Das ist aber nicht der Fall, vielmehr tritt diese Abweichung ebenso plötzlich ein, wie das Nordlicht und mit diesem gleichzeitig, und dadurch ist in der That die Ansicht gerechtfertigt, dass das Nordlicht die Ursache der Bewegung der Nadel sei, aber noch nicht die Ansicht von der magnetischen Natur des Nordlichtes. Wie aber der Causalnexus zwischen Nordlicht und der Bewegung der Nadel zu denken sei, das hat die magnetische Ansicht nie sagen können. Die Fortschritte der Physik haben uns bis jetzt nichts davon gesagt, dass blosses Licht einen Körper in Bewegung setzen könne, und am wenigsten einen Körper, der vom Lichte gar nicht getroffen wird. Die elektrische Ansicht vom Nordlicht giebt aber an, wie das Nordlicht die Bewegung der Nadel erzeugt, und zwar gestützt auf die Resultate neuerer Forschungen. Ferner ist die magnetische Ansicht ganz ungenügend, insofern sie gar nicht nachweisen kann, wie das Nordlicht durch den Erdmagnetismus erzeugt wird. Der Funke, welchen wir jetzt dem Magneten entlocken, entwickelt sich unter solchen Umständen, dass uns jene Handhabe fehlt, dieselben auf die Ableitung des Nordlichtes aus dem Erdmagnetismus anwenden zu können. Die elektrische Theorie vermeidet diese Schwierigkeit, indem sie das Nordlicht für eine Erscheinung ganz anderen Ursprungs hält.

Was den zweiten Grund für die magnetische Theorie betrifft, so wird das Zusammenvorkommen im Raume wohl für den Causalnexus der Erscheinungen ebensowenig beweisen, wie das Zusammentreffen in der Zeit. Uebrigens weist die elektrische Theorie den Grund nach für das Hauptvorkommen der Nordlichter in kalten Gegenden.

Gehen wir nun den Weg der Erfahrung, so werden wir auf dem Standpunkte der elektrischen Hypothese eine genügendere Ansicht über die Ent-

stehung der Polarlichter gewinnen. Halten wir einstweilen die neuentdeckte Thatsache fest, dass das Nordlicht in Telegraphendräthen einen elektrischen Strom erzeugt, so ist uns eine Brücke gebaut durch die andere Entdeckung neuerer Zeit, dass elektrische Ströme auf die Magnetnadel wirken, dass also die Bewegung der Nadel bei einem Nordlicht wahrscheinlich mittelst der von diesem hervorgerufenen Ströme bewirkt werden. Kommt dazu noch die andere Erfahrung, dass Gewitter, welche entschieden elektrischen Ursprungs sind, ebenfalls in solchen Dräthen Ströme erzeugen, so werden wir geneigt sein, das Nordlicht auch für eine elektrische Erscheinung zu halten.

In der neueren Zeit sind Phänomene beobachtet worden, welche mehr oder weniger Aehnlichkeit mit dem Nordlichte und nachweislich ihren Ursprung in der atmosphärischen Elektricität hatten. Wir müssen einige derselben beschreiben.

Dr. Schneider beschreibt in Pogg. Annalen, Bd. 98, S. 324—333 zwei derselben. Wir theilen die Beschreibung des zweiten im Auszuge mit. Er sagt:

„Am sehr heissen 5. Juli 1845 wurde gegen 6 Uhr Abends nach einem sehr heftigen Gewitter, welches von einer starken Hagelschauer begleitet war, nachdem sich das Wetter abgekühlt hatte und die Luft wieder klar geworden, nach S hinter dem Hügelzuge, auf welchem die Stadt Nimwegen liegt, noch eine Gewitterwolke beobachtet, die von SO nach SW zog, und hinter welcher ein ferner Donner sich hören liess. Von dieser Wolke als Mittelpunkt am Horizonte breitete sich eine fächerförmige Figur fast über die Hälfte des ganzen Firmaments aus; der Himmel war mit einem feinen Nebelschleier ganz überzogen. Dieser feine Dunstschleier zeigte sich beinahe in einem Halbkreise um die oben genannte Wolke völlig verschwunden, so dass an diesem Theile das blaue Firmament sichtbar war. Von dieser Stelle als Mittelpunkt gingen nach verschiedenen Richtungen zahlreiche Strahlen aus, die dadurch entstanden, dass auch hier der Nebeldunst verschwunden war und das dahinter befindliche Blau des Himmels zum Vorschein kam, so dass also die strahlige Figur durch das in der bezeichneten Weise hervortretende blaue Firmament gebildet wurde, während der ganze übrige Theil von jenem Nebelschleier, in welchem die besagte Figur sich gleichsam ausprägte, bedeckt blieb. Die Streifen reichten aus der Nähe des Horizonts noch einige Grade über das Zenith hinaus; sie waren an den Seiten geradlinig begrenzt und an den Rändern zeigte sich eine stärkere Anhäufung des Nebeldunstes. Das ganze Phänomen wurde etwa 10 Minuten beobachtet; eine Lufterscheinung war damit nicht verbunden. Obgleich die Convergenz der Strahlen nach dem Mittelpunkte der Wolke nur als Folge der Perspective zu betrachten ist, so spricht sich doch der innige Zusammenhang beider dadurch aus, dass mit dem allmäligen Fortrücken der Wolke auch die Strahlen ihren Ort entsprechend

veränderten, indem sie aus der Stellung von N nach S nach und nach in die von SW nach NO übergingen."

Gallenkamp*) beobachtete am 4. September 1855 in einem Hause, dem Rheinfalle bei Schaffhausen gegenüber liegend, Folgendes. Als er Abends 9 Uhr auf die Terrasse trat, sah er ungefähr nach S auf dem Boden ruhend am Horizonte ein lichtes Kreissegment, dessen Höhe etwa eine Vollmondsbreite und dessen Sehne 4 bis 5 Vollmondsbreiten betrug. Von diesem Segmente strahlten fächerförmig 11 bis 13 lichte Streifen aus, von denen die beiden äussersten zuweilen verschwanden, um dann wieder aufzuleuchten und die Zahl 13 zu bilden. Die mittleren Streifen gingen bis über das Zenith hinweg. Im ersten Augenblicke machte die Erscheinung den Eindruck, als wären die lichten Streifen leuchtende Nebelstreifen, die dunkeln dagegen Theile des blauen Himmelsgrundes; aber dies erwies sich bald als Täuschung, denn in den lichten Streifen zeigten sich bald helle Sterne, in den dunkeln kein einziger Stern. Das ganze Phänomen zeigte längere Zeit keine Bewegung. Die einzelnen Sterne verschoben sich vermöge der Himmelsdrehung gegen die Streifen. Sobald ein Stern an die Grenze zwischen einem dunkeln und hellen Streifen trat, zeigte er ein auffallendes Schwanken und plötzliche Veränderungen der Lichtstärke, die sich bis zu abwechselnd hellem Aufleuchten und gänzlichem Unsichtbarwerden steigerten, bis der Stern im dunkeln Streifen verschwand. Dieselben Erscheinungen in umgekehrter Reihenfolge traten ein, wenn ein Stern aus einem dunkeln Streifen in einen hellen überging. Nach einer halben Stunde hatte sich das lichte Kreissegment, welches die Basis der ganzen Erscheinung bildete, und mit ihr die ganze Figur merklich nach Osten verschoben, ohne dass Form oder Lichtstärke sich merkbar verändert hatten. Nach anderthalb Stunde war das ganze Phänomen über die Breite des Rheines auf das rechte Ufer vorgeschritten. Mit dem weiteren Fortrücken trat allmälig eine derartige Formänderung ein, dass die einzelnen Streifen, welche anfangs ungefähr Bogen grösster Kreise waren, in 30° bis 35° Abstand vom Segmente eine nach Osten gewandte Biegung annahmen, welche sich so vergrösserte, dass endlich Sicheln entstanden. Nach 10 Uhr fingen die Streifen an, wieder scharf begrenzt zu erscheinen, gleichsam zu zerbröckeln, zu zerfahren. Gegen 10½ Uhr reducirte sich die Erscheinung mehr und mehr auf die Basis und auf zerstreute, schwach leuchtende Wölkchen, bis auch diese verschwanden. Von 9 bis 10 Uhr war das Licht in den mittleren Streifen mindestens so hell, als beim heitersten Himmel die Milchstrasse; in den äusseren war es geringer. Plötzliche Aenderungen der Lichtstärke kamen nur einige Male vor. Von 9 bis 9½ Uhr nahm die Intensität wenig zu, blieb bis 10 Uhr constant und nahm dann ab. Die Farbe des Lichtes war gelblich, zuweilen mit einem leichten An-

*) Pogg. Annalen, Bd. CIII, S. 173 ff.

fuge von roth. Die Luft war dabei sehr mild und angenehm. Seit dem Mittag des 4. September war der Himmel mit einem Dunstschleier bedeckt gewesen, während der Vormittag sehr schön klar gewesen war. Der Morgen des 5. September war klar, wenn auch der Himmel nicht rein blau, sondern weisslich. Gegen Mittag desselben fiel heftiger Gewitterregen.

Nach der Beschreibung einer verwandten Erscheinung im 110. Bande, S. 335 und 336 von Pogg. Annalen von Schneider fügt der Verfasser die Anmerkung hinzu: „Ich enthalte mich vorläufig jedes Erklärungsversuches und bemerke nur, dass die Erscheinung mit den von mir und Gallenkamp, sowie mit den von Arago in der Abhandlung über Donner und Blitz, und von Muncke in Gehlen's physikalischem Wörterbuche unter „Nordlicht" beschriebenen, sowie in Kastner's Meteorologie II, S. 524, 583 angezogenen Phänomenen in ein und dieselbe Klasse gehört. Man hat diesen der Luftelektricität angehörigen Lichtmeteoren nicht die ihnen zukommende Aufmerksamkeit gewidmet, vielmehr dieselben gar häufig mit dem eigentlichen Nordlicht verwechselt, obgleich nicht zu bezweifeln ist, dass wir eine eigene Klasse von Elektrometeoren vor uns haben, deren genaueres Studium mit einer künftigen Theorie des Gewitters (und des Nordlichtes, füge ich hinzu) in naher Beziehung steht.

Wir müssen den voranstehenden Beschreibungen noch eine beifügen, welche sich im 37. Bande der Wiener Akademie-Berichte, S. 575—590 findet. Herr Tschudi giebt hier Beobachtungen und Erörterungen über eine elektrische Lichterscheinung, welche vor ihm schon Moesta, der Director der Sternwarte zu Santiago, Meyen, v. Bibra und Philippi beschrieben. Zwar nennt er Moesta nicht, aber die von diesem gelieferte Beschreibung gilt wohl demselben Phänomen. Nach Tschudi berichten Meyen und v. Bibra irrthümlich in mancher Beziehung. Beide behaupten, gestützt auf Volksglauben*), die Lichterscheinung, welche sie in den Cordilleren Südamerikas beobachteten, komme vom Aufblitzen glühender Lava in den dortigen Vulkanen. Nach Beseitigung der falschen Ansicht geht der Verfasser zur Beschreibung der Erscheinung und zur Darstellung ihrer Theorie über. Das Licht ist dem Wetterleuchten sehr ähnlich. Es zeigt sich besonders in den Berggegenden. In seltner Schönheit sah er es vom Plateau von Curaguara im bolivischen Hochlande über der Kette des Illimani. Nach den genauesten, jahrelangen Beobachtungen beginnt es bald nach Sonnenuntergang und dauert nur selten bis über Mitternacht hinaus. Von Santiago und Valparaiso aus wird es nur in den Monaten vom November bis April, am stärksten vom Januar bis März beobachtet; höchst selten in den übrigen Monaten. In der grössten Ausdehnung der Cordilleras von Chile, Bolivia und Peru wird es während der Sommernächte

*) Und daraus sind eine Menge Verfälschungen der Geographie der Cordilleren hervorgegangen. Da Meyen einmal die Ansicht hatte, wo das Leuchten sich zeige, müsse ein Vulkan sein, so hat er eine Menge Vulkane angegeben, wo keine sind.

gesehen. Es wiederholt sich jedoch nicht überall jede Nacht, sondern setzt oft eine oder ein paar Nächte aus, um dann wieder mit erneuter Heftigkeit zu beginnen; ebensowenig dauert es jede Nacht gleich lange. v. Bibra nahm in der Algodon-Bai alle 10 bis 12 Minuten dasselbe wahr mit einem Wechsel der Lichtstärke ohne alle Regelmässigkeit. Hier schien es direct hinter dem Küstengebirge aufzutauchen; in Valparaiso, wo er es vom Hafen aus sehr häufig beobachtete, betrug seine Höhe über dem Horizonte scheinbar einige Grade. Meyen will auf der Cordillera bei dem Leuchten ein Geräusch gehört haben, wie entfernte Kanonensalven; v. Bibra hat nie ein Geräusch vernommen. Moesta und Tschudi sprechen von keinem Geräusch, also haben sie wohl keins wahrgenommen; und Meyen ist Tschudi ein sehr ungenauer Beobachter. Dass das Leuchten nicht von Vulkanen herkommen kann, zeigt sich darin, dass es in Peru und Bolivia auch in den Gegenden, welche gänzlich von Feuerbergen entblösst sind, genau so gesehen wird, wie in Chile. Indem Tschudi die Erscheinung für Wetterleuchten erklärt, will er doch nicht unbedingt der Ansicht beipflichten, dass jedes Wetterleuchten seine Entstehung einem fernen Gewitter verdanke, wiewohl auch solches gewöhnliches Wetterleuchten oft dort vorkommt. Befindet sich der Beobachter auf der Westseite der Cordilleras, so hat er nach Ost einen hohen Gebirgshorizont, über dem sich der Himmel schon vollständig geklärt hat, während die Gewitterwolken sich östlich vom Gebirge und tiefer als der hohe Horizont entladen und nur der Reflex des Blitzes, aber keine Wolke mehr gesehen werden kann. Er führt nun zwei Beispiele an vom Wetterleuchten, die vom Blitze sehr verschieden waren, das eine von ihm in Brasilien, das andere von Wittwer in Baiern beobachtet; beide waren Gewitter, in denen ein elektrisches Leuchten nicht in Zickzackform, sondern als diffuses Licht auftrat, in Brasilien aber mit Zickzackblitzen abwechselnd. In einigen Gegenden des westlichen Südamerika kommen beim höchsten Grade elektrischer Spannung der Atmosphäre doch nie Gewitter vor, besonders in der Wüste von Atacama. Beinahe während der sechs Monate, vom Mai bis November, also im dortigen Winter, vermehrt die starke Luftelektricität die Beschwerden der Wüstenreise. Die geringste Reibung der wollenen Kleider verursacht das lästigste Knistern und kann den Reisenden in einen Zustand der höchsten nervösen Reizung versetzen. Zur Nachtzeit sind die elektrischen Lichterscheinungen sehr stark. An allen Fingerspitzen, an den Ohren der Maulthiere erscheinen leuchtende Büschel. Beim Absatteln sprüht jedes Haar der Thiere Feuer. Die Trockenheit der Luft ist dabei eine ausserordentliche. Die Fingernägel werden so spröde, dass sie wie Glas abspringen, und mit Gänsefedern kann man nicht schreiben, weil der Spalt gleich nach dem Schneiden aus einander klafft. Die Schleimhaut der Nase und Lippen wird trocken und rissig. Ungefähr 12 Leguas von der Küste hören die elektrischen Erscheinungen wegen Zunahme der Feuchtigkeit

auf. Thatsache ist es, während des Sommers zeigt sich geringe elektrische Spannung der Atmosphäre in der Wüste, aber tägliche heftige Gewitter in den sie begrenzenden hohen Cordilleras. Im Winter ausserordentliche Luftelektricität und nur selten Gewitter in den Cordilleras. Es liegt also die Ansicht nahe, dass die Elektricität, die sich durch die Wintermonate in der Wüste sammelt und die sich durch eigenthümliche atmosphärische oder tellurische Verhältnisse in der Wüste selbst nicht durch Gewitter entladen kann, sich während der Sommermonate durch tägliche Entladungen in den Cordilleren ausgleicht.

Wenn nun, wie nicht zu leugnen ist, obige Erscheinungen so viele Aehnlichkeit mit Nordlichtern haben, dass sie öfter mit denselben verwechselt wurden, und dazu entschieden elektrischen Ursprungs sind, so spricht dies zugleich für den elektrischen Ursprung des Nordlichtes. Zwar zeigen die beschriebenen Phänomene noch eine nicht unbedeutende Mannigfaltigkeit in ihrem Auftreten; allein diese ist auch bei Nordlichtern wahrzunehmen. Das Strahlige vermisst Moesta auch bei der zuletzt beschriebenen nicht, obgleich die anderen Beobachter nicht davon reden. Dass diese Erscheinung als ein gewöhnliches Gewitter zu betrachten sei, wie Tschudi meint, ist unsere Ansicht nicht, die wir indess weiter unten erst andeuten können.

Es ist noch ein Punkt zu besprechen, welcher für unsere Theorie von grosser Bedeutung ist. Man versäumt bei Besprechung atmosphärisch-elektrischer Erscheinungen gar zu häufig, hier einen Unterschied im Auge zu behalten, durch dessen Vernachlässigung die grösste Verwirrung entsteht. Das ist der Unterschied zwischen Luft- und Wolkenelektricität. Man sollte den Ausdruck „atmosphärische Elektricität" nur dann gebrauchen, wenn von keiner der beiden Arten bestimmt die Rede ist. Verwechselt man aber das Genus mit der Species, so kann selbstverständlich daraus nur Missverständniss hervorgehen. Luftelektricität ist aber bekanntlich die Elektricität der Lufttheilchen, die also immer oder fast immer wahrnehmbar ist und zwar als + Elektricität. Am deutlichsten tritt sie uns entgegen bei heiterem Himmel; denn Wolkenelektricität kann dann von uns nur noch für Luftelektricität gehalten werden, wenn der Horizont beschränkt ist und er uns die Wolken verdeckt, welche etwa noch stärker elektrisch auf unsere Apparate einwirken als die Luft. Ist der Himmel nur theilweise bewölkt, so ist es allerdings zuweilen, aber nur selten der Fall, dass wir zweifelhaft sein könnten, ob das von uns Beobachtete der einen oder anderen Art angehört. Wie wesentlich es aber ist, den Unterschied festzuhalten, will ich an einer wichtigen, allgemeinen Beziehung nachweisen.

Es wird öfter ausgesprochen, und zuletzt hat es Becquerel gethan*),

*) *Recherches sur l'électricité de l'air et de la terre etc. Compt. rend. XLIII*, pag. 1101—1108.

dass die atmosphärische Elektricität von den Tropen nach den Polen al nehme. So allgemein ausgesprochen, ist der Satz ganz unbegründet. Ab wohl kann man diesen Satz von der Wolkenelektricität aussagen; dagege gilt von der Luftelektricität gerade das Entgegengesetzte. Zwar existire darüber in Rücksicht der Luftelektricität noch keine Beobachtungen; ab wir wissen, dass bei uns die Luftelektricität im Winter bedeutend grösse ist, als im Sommer, und dass sie in ausnahmsweise warmen Jahren ge ringer ist als in gewöhnlichen. Da nun bei uns der Winter in allen Be ziehungen den Charakter mehr nach den Polen gelegenen Gegenden ve tritt, der Sommer umgekehrt, so gilt gewiss für die Luftelektricität da selbe, was für die übrigen Witterungs-Erscheinungen nachgewiesen is umsomehr, da wir den Zusammenhang dieser Erscheinungen und ihre ge meinsame Abhängigkeit von der Wärmevertheilung kennen. Dass d Wolkenelektricität abnimmt nach den Polen hin, sieht man daraus, da die Zahl der Gewitter in dieser Richtung immer mehr sich vermindert.

Es sollen jetzt noch einige Andeutungen darüber gegeben werden, w ich mir den Vorgang bei der Entstehung des Nordlichtes denke.

Es giebt zweierlei Gewitter, Gewitter der Wolkenelektricität und Ge witter der Luftelektricität; erstere sind die gewöhnlichen, letztere nenne wir Polarlichter, wenn sie in den Polargegenden sich zeigen, wo die Be dingungen ihrer Entstehung am günstigsten sind. Erstere nehmen also der Zahl ab, wie man sich vom Aequator entfernt, letztere, wie man ih sich nähert. Die Wolken-Gewitter entladen sich meist nach unten, d Erde; die Gewitter der Luftelektricität nach oben in den luftverdünnte Raum der Atmosphäre. Die Entstehung beider Arten von atmosphärisch Elektricität kennen wir noch nicht, ja wir kennen die Entstehung de Elektricität überhaupt noch nicht. Aber das wissen wir, dass beide Arte von atmosphärischer Elektricität sich öfter unter Bedingungen, die un zum Theil bekannt sind, anhäufen irgendwo. Auch finden wir erfahrung gemäss neben den Stellen der Anhäufung die Stellen, wo die Anhäufun nachlässt und dann allmälig in den Gegensatz umschlägt. Wenn dann d Anhäufung an irgend einem Orte und deren Gegensatz gross genug wir so findet eine Entladung statt, welche wir Gewitter nennen oder Nordlich Zwar kennen wir die Stellen, nach denen die Entladung beim Nordlic stattfindet, die höheren Gebiete der Atmosphäre nämlich, in der angegeb nen Beziehung aus Erfahrung noch sehr wenig. Aber das wissen wir doc dass die über einander liegenden Luftschichten öfter entgegengesetzt ele trisch sind. Auch können wir uns davon überzeugt halten, dass die höhere Luftschichten schwächer elektrisch sind, als die unteren. Denn da na allen Erscheinungen die Luftmoleküle die Träger der Luftelektricität sin so muss mit der Dichtigkeit der Atmosphäre selbst auch die der Luf elektricität nach oben abnehmen. Man wird mir schwerlich entgegenhalte dass die Beobachtungen das Gegentheil zeigten. Das weiss ich gar zu gu

aber ich bin fest überzeugt, dass diese Zunahme nicht weit hinauf reicht. Auch haben mir meine Erfahrungen die Ansicht aufgedrängt, dass die Abnahme in der Nähe des Bodens daher rührt, dass die Luftmoleküle hier mit dem Boden öfter in Berührung kommen und diesem Elektricität abgeben.

Warum entladet sich nun die Luftelektricität nach oben? Dafür giebt es drei Gründe noch ausser dem bereits genannten der Abnahme der Dichtigkeit, und diese sind besonders in Polargegenden wirksam. Erstens, weil hier die Luftelektricität aus klimatischen Bedingungen sich besonders stark anhäuft; zweitens, weil hier der Boden mit einer dicken Schicht eines guten Isolators, des trockenen Eises, bedeckt ist, weil sich also im Boden keine der Anhäufung der Luftelektricität entsprechende Vertheilung bilden kann, oder weil es der angehäuften Luftelektricität nicht möglich ist, das zur Entladung nach unten gehörige Quantum entgegengesetzter Elektricität heranzuziehen, weil der Isolator der entgegengesetzten die Bewegung nicht gestattet, um so die Anziehung zu vergrössern, die sie endlich bis zum plötzlichen Ueberspringen eines Funkens nach unten bringen würde; drittens, weil ihr nach oben keine Hindernisse entgegenstehen, keine Wolken, so dass sie zu ihrer Entladung die Form des Ausströmens wählen muss. Alle diese Gründe sind thatsächlich vorhanden. Thatsachen sind, dass es dort an scharf begrenzten Wolken mangelt, dass trockene Nebel dort häufig sind, welche bekanntlich die Luftelektricität bedeutend steigern, dass die Nordlichter fast immer in der ersten Hälfte der Nacht sich einstellen, also zu der Zeit, wo auch bei uns eine bedeutende Steigerung der Luftelektricität vorkommt, besonders bei heiterem Wetter; Thatsache ist ferner, dass die Nordlichter am häufigsten sind bei heiterem Wetter, wo auch bei uns im Winter die Luftelektricität am stärksten ist.

Ein emporschiessender Strahl eines Polarlichtes wirkt gerade so vertheilend, wie eine elektrisch geladene Wolke auch, welche ja, wie bekannt, uns oft die Haare sträuben macht, oder Licht aus Hut und Fingern lockt, oder den Telegraphen in Unordnung bringt, indem sie die entgegengesetzte heranzieht und die gleichnamige zurückstösst. Dass der Strahl des Polarlichtes mit seiner Wirkung weiter reicht, ist natürlich, da er eine viel grössere Ausdehnung hat. Denn wenn auch die Messungen der Höhen der Nordlichter sehr unsicher sind, so geht doch daraus hervor, dass einige eine Höhe von mehreren Meilen erreichen. Die von Nord nach Süd gerichteten Strahlen binden im Boden in der Nähe die entgegengesetzte Elektricität und treiben die gleichnamige nach beiden Seiten, also nach Ost und West, und diese Vertheilungs- oder Inductionsströme erster Ordnung sind es, welche auf die Magnetnadel wirken; sie haben also, wie man sieht, zur Einwirkung auf dieselbe die vortheilhafteste Richtung. Wollte man entgegenstellen, dass die Wirksamkeit der Strahlen unmöglich so weit reichen könne, so erinnere ich an das Factum, dass vor ein paar

Jahren die Einwirkung eines Nordlichtes auf Telegraphendräthe im Würtembergischen wahrgenommen wurde.

Nun soll aber nicht gesagt sein, dass Luftelektricitäts-Gewitter nur in Polargegenden entstehen können. Warum sollten sie nicht auch anderwärts sich zeigen, wo die Bedingungen ihrer Entstehung alle oder theilweise vorkommen, nämlich Isolation des Bodens, Mangel an Hindernissen der Ausströmung nach oben und starke Entwickelung der Luftelektricität? Und in der That scheint es mir keinem Zweifel zu unterliegen, dass Erscheinungen, wie die beschriebenen, derselben Natur sind. Denn auch das von Tschudi, Moesta etc. beschriebene Phänomen wird immer über den Bergen gesehen, welche auch im Sommer zum Theil mit Schnee bedeckt sind. Hier ist also die isolirende Decke vorhanden und die dünnen Luftschichten sind näher. Ausdrücklich bemerkt v. Bibra, dass in der Algodon-Bai nie und auf der Cordillera bei Santiago selten Gewitter vorkommen; hier kann das Leuchten also unmöglich von Gewittern herrühren. Auch bemerkt v. Bibra, dass das Auftreten beider Erscheinungen, nämlich des Gewitters und des strahligen Leuchtens über den Bergen, ein ganz verschiedenes sei. In der Wüste von Atacama kommt nach Tschudi nie ein Gewitter vor, aber eine sehr starke Luftelektricität. Das Leuchten derselben ist Nachts am grössten, wie er behauptet. Auch sah er einmal Abends das Leuchten über der Kette des Illimani, und anderen Morgens bemerkte er, dass dort Alles mit Schnee bedeckt war. Das Alles spricht dafür, dass diese Erscheinung kein Gewitterleuchten ist, wie Tschudi meint. Ist die Ursache der Luftelektricität in ziemlich bedeutender Höhe wirksam, so ist die Isolation des Bodens überflüssig, da die untere Luftschicht dann deren Stelle vertritt. Ueberhaupt lässt eine Verschiedenheit in der Combination der Ursachen auch eine Variation in den Erscheinungen hervortreten. Auch lässt sich eine Möglichkeit des Zusammenvorkommens beider Arten von Gewittern nicht von vornherein bestreiten, und noch weniger ein baldiges Nacheinander derselben.

Die Geschichte von der Halley-Dalton'schen Theorie des Nordlichtes lehrt uns, dass man auf diesem Wege den Zweck nicht erreicht, ja dass man kaum weiter kommt. Die entgegengesetzte Theorie hat sicher bedeutendere Fortschritte gemacht. Wenn uns auch die Entstehung des Erdmagnetismus, des Nordlichtes, der Luftelektricität noch dunkel ist, so werden wir doch wohl thun, zur Erklärung derselben den gemeinsamen Ursprung fast aller atmosphärischer Erscheinungen nicht aus dem Auge zu verlieren, und das ist die Wärmevertheilung auf der Erde. Je mehr die Meteorologie auf dem sicheren Wege sorgfältiger Beobachtung fortschreitet, desto mehr Licht wird auch in diese noch dunkeln Partien fallen.

Nachtrag. Es wird zweckmässig sein, von Zeit zu Zeit Ergänzungen *zum Aufsatze* über die Theorie des Nordlichtes zu liefern, um auf

diese Weise die Frage, ob die eine oder die andere der beiden Haupttheorien, oder vielleicht eine dritte die richtige sei, zum Abschluss zu bringen. Deshalb sollen unter dem obigen Titel Lesefrüchte, neue Ansichten etc., mitgetheilt werden.

Castren, der schwedische Reisende, sagt: „Haben wir im bergigen Lappland hohe Felsengipfel vor uns, so sind diese von einem flackernden Scheine umhüllt. Fast erscheint es dem Auge, als erhebe sich dieser Schein aus dem Felsen selbst, wie die Flamme aus dem Krater eines Vulkans. Er verbreitet sich über den ganzen Himmel, flackert einige Zeit und verschwindet, um sich bald darauf wieder zu erheben und zu entschweben.“

Ueber Gletscher wird von einem Unbekannten berichtet: „Die Luft über dem Gletscher- und Firneise ist sehr trocken, weil es wahrscheinlich die Feuchtigkeit derselben einsaugt. Ein Stück Fleisch wird auf dem Gletscher in wenigen Tagen so trocken, dass es nur noch aus Fasern besteht. Noch trockener ist es im Inneren.“

Lyell, zweite Reise nach Nordamerika, sagt im 2. Bande, S. 356: „Wir lernen aus der Geschichte der letzten antarktischen Expedition unter Sir James Ross die höchst interessante Thatsache, dass, wenn das Südlicht über der grossen Mauer des Küsteneises an den Ufern des antarktischen Landes spielte, es ganz deutlich an der unregelmässigen und zerrissenen Gestalt der Eisklippen, über denen es schwebte, Theil nahm.“ Lyell sah dasselbe.

Herr T. R. Robinson sagt in einem Aufsatze: „*On fluorescence produced by the aurora*“ (Phil. Mag. XV, 336—327): „Wenn man einen Tropfen von schwefelsaurem Chinin auf einer Porzellanplatte bei dem Lichte eines Nordlichtes betrachtet, so erscheint dieser Tropfen leuchtend auf einem wenig leuchtenden Grunde.“ Nach seiner Ansicht soll also das Nordlicht, wie das elektrische Licht, besonders viel sehr brechbare Strahlen aussenden, also stark fluorescirend sein. Er meint, es liege in diesem Gehalt an sehr brechbaren Strahlen ein neuer Beweis für den elektrischen Ursprung des Nordlichtes.

Diese Stellen sprechen also sämmtlich für die elektrische Theorie des Nordlichtes.

XXIV. Die zweckmässigste Form der Zinkeisen-Säule. Von Dr. F. Dellmann.

Seit einigen Jahren brauche ich bei galvanischen Versuchen eine Form der Zinkeisen-Säule, welche meines Wissens noch nicht beschrieben ist. Da ich diese Form für die zweckmässigste halten muss für Versuche, welche nur einige Stunden oder noch kürzere Zeit dauern, und zweckmässiger, als jede andere Säule ist, so will ich mir erlauben, hier eine kurze Beschreibung derselben zu geben.

Das Eisen ist Gusseisen und wird angewendet in Form von cylinder-

förmigen Bechern, das Zink ebenfalls in Form von Cylindern, aber ohne Boden. Der Zinkcylinder hat einen etwas kleineren Durchmesser, als der Eisencylinder, so dass ersterer leicht in letzteren hineingesetzt werden kann. Auf den oberen Rand des Zinkcylinders ist ein kleiner Messingcylinder gelöthet mit dem unteren Ende. In der Mitte etwa (der Länge nach) ist dieser durchbohrt zur Aufnahme des Poldrathes, welcher festgeklemmt wird durch eine Schraube, die vom oberen Ende aus in der Richtung seiner Achse auf die Queröffnung führt. Der Zinkcylinder ist natürlich blos cylinderförmig gebogen, nicht gelöthet, weil dies nicht nöthig ist; auch ist er etwas niedriger, als der Eisencylinder. An diesen wird der Poldrath, welcher zu diesem Zwecke etwas platt geklopft ist an einem Ende, mit einer Klemmschraube oben am Rande der Aussenseite befestigt. Die Stelle, wo der Drath angelegt werden soll, muss mit der Feile vor jedem Versuch gereinigt werden.

Beim Gebrauche nun wird der Zinkcylinder frisch amalgamirt, dann mit einem Stück Papier umwickelt, welches so gross genommen, dass es oben und unten etwas einwärts umgeschlagen werden kann, in den Eisenbecher gestellt und verdünnte Schwefelsäure (etwa 6 Gewichtstheile Wasser und 1 Theil concentrirte Säure) hineingegossen. Die Wasserstoff-Entwickelung ist nach einer Stunde immer noch gering und durchaus nicht belästigend. Die Hauptsache aber ist, dass eine solche Säule einen starken Strom giebt, sehr billig und äusserst leicht in der Handhabung ist. Beim letzten Gebrauche habe ich mir die Mühe genommen, sie mit einem Grove'schen Elemente zu vergleichen. Hier ist das Resultat.

Grove'sche Säule: Platin 90^{mm} breit, 178^{mm} lang; Zink 88^{mm} breit, 178^{mm} lang; Ausschlag an einer Weber'schen Tangentenboussole anfangs 63°, nach einer guten Stunde 62°. — Zinkeisen-Säule: Eisencylinder 120^{mm} hoch, innerer Durchmesser 80^{mm}; Zinkplatte 101^{mm} breit (Höhe des Cylinders), 194^{mm} lang; Ausschlag an derselben Boussole anfangs 58°, nach einer guten Stunde 61°.

Hier verhielten die Zinkplatten beider Elemente, welche fast gleich starke Ströme gaben, sich also ungefähr wie 5 zu 6. Nun war das Zink der zweiten Säule nach fast gleich langem Gebrauche allerdings etwas stärker angegriffen. Dagegen roch man nach der zweiten Stunde noch ganz gut die salpetrige Säure, welche die Grove'sche Säule entwickelt hatte; vom Wasserstoff spürte man gar nichts. Die Eisenbecher braucht man sich nicht sehr stark giessen zu lassen, sie halten doch lange. Die Wände der meinigen sind nur wenige Millimeter dick. Am Eisen braucht man ausser jener Stelle zum Anlegen des Poldrathes nichts zu reinigen.

Der Strom dieser Säule ist offenbar so stark, weil der Thoncylinder fehlt. Das Eingiessen der Flüssigkeit ist äusserst bequem. Man vermeidet das Zerbrechen, weil weder Glas, noch Kohle, noch Thon gebraucht wird. Und billiger lässt sich gewiss keine Säule herstellen. Das oben beschriebene Element kostet mir noch keine 10 Silbergroschen, das Grove'sche dagegen 5 Thaler.

XII.

Zur Theorie der bestimmten Integrale.

Von Dr. A. Enneper,
Docent an der Universität Göttingen.

I.

Die Gleichung

1) $$y = \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u$$

nach z differentiirt giebt:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\int_0^\infty \sin zu \,.\, \frac{u}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u = \frac{1}{2n}\int_0^\infty \sin zu \frac{\partial}{\partial u}\frac{u}{(1+u^2)^n} \partial u.$$

Durch partielle Integration folgt hieraus:

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{2n}\int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^n} \partial u,$$

oder, da

$$-\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} + y = \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^n} \partial u,$$

so erhält man für y die Differentialgleichung:

2) $$z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - 2n\frac{\partial y}{\partial z} - zy = 0.$$

Es wird natürlich vorausgesetzt, dass n eine positive Zahl sei.

Für $$y = p \,.\, z^{2n+1}$$

geht die Gleichung 2) in folgende über:

3) $$z\frac{\partial^2 p}{\partial z^2} + 2(n+1)\frac{\partial p}{\partial z} - pz = 0.$$

Zur Integration dieser Gleichung nehme man:

$$p = \int_\alpha^\beta e^{-uz} V \partial u,$$

wo V eine Function von u bedeutet. Die Gleichung 3) geht dann über

$$4)\qquad \int_\alpha^\beta e^{-uz} V \{z(u^2-1) - 2(n+1)u\} \partial u = 0.$$

Durch partielle Integration folgt:

$$\int_\alpha^\beta e^{-uz} V z(u^2-1)\partial u = -\int_\alpha^\beta (u^2-1) V \frac{\partial}{\partial u} e^{-uz} \partial u$$

$$= -\left\{(u^2-1) V e^{-uz}\right\}_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta e^{-uz} \left\{(u^2-1)\frac{\partial V}{\partial u} + 2Vu\right\} \partial u.$$

Hierdurch wird die Gleichung 4)

$$0 = -\left\{(u^2-1) V e^{-uz}\right\}_\alpha^\beta + \int_\alpha^\beta e^{-uz}\left\{(u^2-1)\frac{\partial V}{\partial u} - 2nuV\right\}\partial u,$$

d. h.:

$$\left\{(u^2-1) V e^{-uz}\right\}_\alpha^\beta = 0$$

$$(u^2-1)\frac{\partial V}{\partial u} - 2nuV = 0$$

oder

$$V = (u^2-1)^n$$

$$\left\{(u^2-1)^{n+1} e^{-uz}\right\}_\alpha^\beta = 0.$$

Der Ausdruck

$$(u^2-1)^{n+1} e^{-uz}$$

verschwindet für $u = 1$ und $u = \infty$. Nimmt man also $\alpha = 1$ und $\beta =$ so ist:

$$p = \int_1^\infty e^{-uz} (u^2-1)^n \partial u$$

ein Integral der Gleichung 3). Da $y = p \,.\, z^{2n+1}$, so wird:

$$y = z^{2n+1} \int_1^\infty e^{-uz} (u^2-1)^n \partial u$$

$$= z^{2n+1} e^{-z} \int_0^\infty e^{-uz} u^n (2+u)^n \partial u$$

$$= e^{-z} \int_0^\infty e^{-u} u^n (u+2z)^n \partial u.$$

Nimmt man ferner

$$p = \int_{\alpha}^{\beta} e^{uz} V \partial u,.$$

so geht die Gleichung 3) über in:

$$\int_{\alpha}^{\beta} e^{uz} V \{(u^2-1) z + 2(n+1) u\} \partial u = 0.$$

Wendet man wieder das obige Verfahren an, so folgt:

$$\left\{ e^{uz} V(1-u^2) \right\}_{\alpha}^{\beta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u}(1-u^2) + 2nuV = 0,$$

d. h.:

$$V = (1-u^2)^n$$

$$\left\{ e^{uz} (1-u^2)^{n+1} \right\}_{\alpha}^{\beta} = 0.$$

Der Ausdruck

$$e^{uz}(1-u^2)^{n+1}$$

verschwindet für $u = -1$ und $u = 1$. Nimmt man also $\alpha = -1$, $\beta = 1$, so ist

$$p = \int_{-1}^{1} e^{uz}(1-u^2)^n \partial u$$

und

$$y = z^{2n+1} \int_{-1}^{1} e^{uz}(1-u^2)^n \partial u$$

ein zweites Integral der Gleichung 2). Bezeichnet man die beiden particulären Integrale der Differentialgleichung:

$$z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - 2n\frac{\partial y}{\partial z} - zy = 0$$

durch y_1 und y_2, so hat man:

$$y_1 = z^{2n+1} \int_{1}^{\infty} e^{-uz}(u^2-1)^n \partial u = e^{-z} \int_{0}^{\infty} e^{-u} u^n (u+2z)^n \partial u$$

$$y_2 = z^{2n+1} \int_{-1}^{1} e^{uz}(1-u^2)^n \partial u = z^{2n+1} \int_{0}^{1} (e^{uz}+e^{-uz})(1-u^2)^n \partial u.$$

Von diesen beiden Integralen verschwindet y_2 mit z, während y_1 für $z=0$ einen constanten Werth annimmt. Da nun auch

$$\int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u$$

der obigen Differentialgleichung genügt und nicht mit z verschwindet, so muss dieses Integral y_1 proportional sein, d. h.:

$$\int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u = Ae^{-z} \int_0^\infty e^{-u} u^n (u+2z)^n \partial u,$$

wo A eine Constante bedeutet. Setzt man $z=0$, so folgt:

$$\int_0^\infty \frac{\partial u}{(1+u^2)^{n+1}} = A \int_0^\infty e^{-u} u^{2n} \partial u$$

oder

$$\frac{1}{2} \frac{\Pi(-\frac{1}{2})\, \Pi(n-\frac{1}{2})}{\Pi(n)} = A\,\Pi(2n).$$

Da nun

$$\Pi(n)\,\Pi(n-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi}\,.\,2^{-2n}\,\Pi(2n)$$
$$\Pi(-\tfrac{1}{2}) = \sqrt{\pi},$$

so folgt:

$$A = \frac{\pi}{2^{2n+1}\,\Pi(n)^2},$$

endlich:

$$5) \quad \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u = \frac{\pi e^{-z}}{2^{2n+1}\,\Pi(n)^2} \int_0^\infty e^{-u} u^n (2z+u)^n \partial u.$$

Die von Gauss durch $\Pi(z)$ bezeichnete Function wird bekanntlich durch die Gleichung definirt:

$$\Pi(z) = \int_0^\infty e^{-u} u^z \partial u = \frac{1\,.\,2\,.\,.\,.\,.\,.\,k}{(z+1)(z+2)\,.\,.\,.\,.\,(z+k)} k^z \;(k=\infty).$$

Setzt man:

$$y = \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u$$

$$x = z^{2n+1} \int_0^1 (e^{uz} + e^{-uz})(1-u^2)^n \partial u,$$

so ist, nach dem Vorhergehenden,

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{z}{2n} \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^n} \partial u.$$

Durch Differentiation nach z folgt ferner:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=(2n+1)\,z^{2n}\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^n\,\partial u$$

$$+z^{2n+1}\int_0^1(e^{uz}-e^{-uz})\,u\,(1-u^2)^n\,\partial u.$$

Nun ist

$$z\int_0^1(e^{uz}-e^{-uz})\,u\,(1-u^2)^n\,\partial u=\int_0^1\frac{\partial}{\partial u}(e^{uz}+e^{-uz})\,.\,u\,(1-u^2)^n\,\partial u$$

$$=-\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^n\,\partial u+2n\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,u^2(1-u^2)^{n-1}\,\partial u$$

$$=-(2n+1)\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^n\,\partial u+2n\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^{n-1}\,\partial u.$$

Die Gleichung für $\frac{\partial x}{\partial z}$ nimmt hierdurch die einfache Form an:

$$\frac{\partial x}{\partial z}=2n\,.\,z^{2n}\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^{n-1}\,\partial u.$$

Die beiden Integrale y und x genügen der Differentialgleichung 2), d. h.:

$$z\frac{\partial^2 y}{\partial z^2}-2n\frac{\partial y}{\partial z}-zy=0,$$

$$z\frac{\partial^2 x}{\partial z^2}-2n\frac{\partial x}{\partial z}-zx=0.$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit x, die zweite mit y, bildet die Differenz der Producte, so folgt:

$$z\frac{\partial}{\partial z}\left(y\frac{\partial x}{\partial z}-x\frac{\partial y}{\partial z}\right)=2n\left(y\frac{\partial x}{\partial z}-x\frac{\partial y}{\partial z}\right).$$

Durch Integration nach z erhält man:

$$y\frac{\partial x}{\partial z}-x\frac{\partial y}{\partial z}=Cz^{2n},$$

wo C eine Constante bedeutet. Wegen der Werthe von y und x wird diese Gleichung:

$$2n\int_0^\infty\frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}}\,\partial u\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^{n-1}\,\partial u$$

$$+\frac{z^2}{2n}\int_0^\infty\frac{\cos zu}{(1+u^2)^n}\,\partial u\int_0^1(e^{uz}+e^{-uz})\,(1-u^2)^n\,\partial u=C.$$

Für $z = 0$ folgt:

$$C = 4n \int_0^\infty \frac{\partial u}{(1+u^2)^{n+1}} \cdot \int_0^1 (1-u^2)^{n-1} \partial u = \pi,$$

also:

$$2n \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^{n+1}} \partial u \cdot \int_0^1 (e^{uz} + e^{-uz})(1-u^2)^{n-1} \partial u$$

$$+ \frac{z^2}{2n} \int_0^\infty \frac{\cos zu}{(1+u^2)^n} \partial u \cdot \int_0^1 (e^{uz} + e^{-uz})(1-u^2)^n \partial u = \pi.$$

Die Differentialgleichung 2) ist zuerst von Serret (Liouville's Journal, T. IX, p. 193) aufgestellt worden. Für ein ganzzahliges n hat Catalan die Gleichung 5) bewiesen (Liouville's Journal, T. V, p. 110).

II.

In den „*Mémoires couronnées par l'academie de Bruxelles*, *T. XIV. Deux. Partie* 1841" hat Catalan eine Determinante bestimmter Integrale aufgestellt, die eine Verallgemeinerung der bekannten Legendre'schen Gleichung ist:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha \sin^2\vartheta)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\sin^2\alpha \sin^2\vartheta)}\, \partial \vartheta$$

$$+ \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha \sin^2\vartheta)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(1-\cos^2\alpha \sin^2\vartheta)}\, \partial \vartheta$$

$$- \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{(1-\cos^2\alpha \sin^2\vartheta)}} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial \vartheta}{\sqrt{(1-\sin^2\alpha \sin^2\vartheta)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Die von Catalan gegebene Determinante lässt sich noch sehr vereinfachen, wie im Folgenden gezeigt werden soll. Des besseren Verständnisses wegen möge eine kurze Ableitung der betreffenden Determinante vorausgehen.

In dem $n$fachen Integrale:

$$V_1 = \int \ldots \int \partial x_1 \ldots\ldots \partial x_n$$

soll die Summation auf alle positiven Werthe von $x_1, \ldots x_n$ ausgedehnt werden, welche der Bedingung genügen:

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqq 1.$$

Setzt man, nach dem Vorgang Jacobi's:

$$x_1 = \sin\varphi_1,$$
$$x_2 = \cos\varphi_1 \sin\varphi_2,$$
$$x_3 = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \sin\varphi_3,$$
$$\vdots$$
$$x_n = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots\ldots \cos\varphi_{n-1} \sin\varphi_n,$$
$$x_{n+1} = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 \ldots\ldots \cos\varphi_{n-1} \cos\varphi_n,$$

so ist:
$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots\ldots + x_n^2 = 1 - x_{n+1}^2.$$

Legt man $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ alle Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ bei, so bleiben $x_1 \ldots x_n$ beständig positiv, und $1 - x_{n+1}^2$ liegt immer innerhalb der Grenzen 0 und (1). Führt man also in V_1 statt $x_1 \ldots x_n$ die Variabeln $\varphi_1 \ldots \varphi_n$ ein, so nehmen dieselben alle Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ an.

Es ist nun:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial\varphi_n} \\ \\ \frac{\partial x_n}{\partial\varphi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial\varphi_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1} & 0 & 0 \\ \frac{\partial x_2}{\partial\varphi_1} \frac{\partial x_2}{\partial\varphi_2} & 0 & 0 \\ \\ \frac{\partial x_n}{\partial\varphi_1} & & \frac{\partial x_n}{\partial\varphi_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial x_1}{\partial\varphi_1}\frac{\partial x_2}{\partial\varphi_2}\cdots\frac{\partial x_n}{\partial\varphi_n}$$

$$= (\cos\varphi_1)^n (\cos\varphi_2)^{n-1} \ldots\ldots (\cos\varphi_{n-1})^2 \cos\varphi_n,$$

folglich:

$$V_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ldots \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos\varphi_1)^n (\cos\varphi_2)^{n-1} \ldots\ldots (\cos\varphi_{n-1})^2 \cos\varphi_n \,\partial\varphi_1 \ldots\ldots \partial\varphi_n$$

$$= \left\{\frac{1}{2}\frac{\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}\right\}\left\{\frac{1}{2}\frac{\Pi\left(\frac{n-2}{2}\right)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)}\right\}\ldots\ldots$$
$$\left\{\frac{1}{2}\frac{\Pi(\frac{1}{2})\,\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(1)}\right\}.\left\{\frac{1}{2}\frac{\Pi(0)\,\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\frac{1}{2})}\right\}$$

$$= \frac{1}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n.$$

Ist die Summation in dem $n$fachen Integrale:

1) $$V = \int \ldots \int \partial x_1 \ldots\ldots \partial x_n$$

auf alle positiven Werthe von $x_1 \ldots x_n$ auszudehnen, welche der Bedingung genügen:

2) $$\frac{x_1^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2} \leq 1,$$

$$V = V_1 \sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots\ldots(a^2-a_n^2)},$$

$$V = (\sqrt{\pi})^n \frac{1}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots\ldots(a^2-a_n^2)}.$$

Die Constanten $a, a_1 \ldots a_n$ mögen so gewählt sein, dass

$$a > a_1 > a_2 \ldots > a_{n-1} > a_n.$$

In V führe man statt $x_1 \ldots x_n$ neue Integrationsvariabelen $u_1 \ldots u_n$ mittelst der folgenden Gleichungen ein:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{u_1^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_1^2-a_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_1^2-a_n^2}=1, \\ \dfrac{x_1^2}{u_2^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_2^2-a_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_2^2-a_n^2}=1, \\ \vdots \\ \dfrac{x_1^2}{u_n^2-a_1^2}+\dfrac{x_2^2}{u_n^2-a_2^2}+\ldots+\dfrac{x_n^2}{u_n^2-a_n^2}=1, \end{cases}$$

oder, wenn m eine der Zahlen $1, 2 \ldots n$ bezeichnet,

$$5)\quad -x_m^2 = \frac{(a_m^2-u_1^2)(a_m^2-u_2^2)\ldots(a_m^2-u_n^2)}{(a_m^2-a_1^2)(a_m^2-a_2^2)\ldots(a_m^2-a_{m-1}^2)(a_m^2-a_{m+1}^2)\ldots(a_m^2-a_n^2)}.$$

Die Gleichung:

$$\frac{(a^2-u_1^2)(a^2-u_2^2)\ldots(a^2-u_n^2)}{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_n^2)} = \frac{\psi(a^2)}{\varphi(a^2)} = 1 + \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\psi(a_m^2)}{\varphi'(a_m^2)} \frac{1}{a^2-a_m^2}$$

lässt sich wegen 5) auch schreiben:

$$\frac{(a^2-u_1^2)(a^2-u_2^2)\ldots(a^2-u_n^2)}{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\ldots(a^2-a_n^2)} = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2-a_1^2}+\frac{x_2^2}{a^2-a_2^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{a^2-a_n^2}\right).$$

Nach der Gleichung 2) kann man nun setzen:

$$6)\quad \frac{(a^2-u_1^2)\ldots(a^2-u_n^2)}{(a^2-a_1^2)\ldots(a^2-a_n^2)} = 1-\varepsilon^2,$$

wo ε eine Zahl bedeutet, die zwischen 0 und 1 variirt. Die Grössen u_1^2, $u_2^2 \ldots u_n^2$ lassen sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen 4), als die n Wurzeln der folgenden Gleichung ansehen:

$$\frac{x_1^2}{u^2-a_1^2}+\ldots+\frac{x_n^2}{u^2-a_n^2}=1$$

oder von

$$0 = f(u^2) = (u^2-a_1^2)\ldots(u^2-a_n^2) - x_1^2(u^2-a_2^2)\ldots(u^2-a_n^2)$$
$$\ldots - x_n^2(u^2-a_1^2)\ldots(u^2-a_{n-1}^2).$$

Setzt man hierin successive $\infty, a_1^2, a_2^2 \ldots a_n^2$ statt u^2, so folgt leicht, dass die n Wurzeln von $f(u^2)=0$ zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$\begin{matrix} \infty & a_1^2 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ \vdots & \\ a_{n-1}^2 & a_n^2. \end{matrix}$$

Da nun nach 6):

$$\frac{(a^2-u_1^2)\dots(a^2-u_n^2)}{(a^2-a_1^2)(a^2-a_2^2)\dots(a^2-a_n^2)}$$

zwischen den Grenzen 0 und 1 bleiben muss, so kann innerhalb der Integrationsgrenzen u_i nicht grösser wie a werden. Hieraus schliesst man, dass

$$\begin{matrix} a_1 & a \\ a_2 & u_1 \\ \vdots & \\ a_n & a_{n-1} \end{matrix}$$

die respectiven Integrationsgrenzen von $u_1 \dots u_n$ sind. Aus der Gleichung 6) folgt:

$$x_m \frac{\partial x_m}{\partial u_r} = -u_r \frac{x_m^2}{a_m^2 - u_r^2}$$

oder

$$\frac{\partial x_m}{\partial u_r} = \frac{x_m u_r}{u_r^2 - a_m^2},$$

wo r eine der Zahlen $1, 2 \dots n$ bedeutet. Setzt man zur Abkürzung:

$$\varphi(u^2) = (u^2 - a_1^2)(u^2 - a_2^2)\dots(u^2 - a_n^2)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ u_1^2 & u_2^2 & & u_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ u_1^{2n-2} & u_2^{2n-1} & & u_n^{2n-2} \end{vmatrix} = P(u_1^2, u_2^2 \dots u_n^2),$$

so erhält man für die Determinante:

$$R = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_n} \\ & \\ \frac{\partial x_n}{\partial u_1} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix}$$

folgenden Ausdruck:

$$R = x_1 \dots x_n \,.\, u_1 \dots u_n \,.\, \frac{P(u_1^2 \dots u_n^2)\, P(a_1^2 \dots a_n^2)}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \varphi(u_1^2)\dots\varphi(u_n^2)}.$$

Nach der Gleichung 5) ist

$$x_m^2 = (-1)^{n-1} \frac{(u_1^2 - a_m^2)(u_2^2 - a_m^2)\dots(u_n^2 - a_m^2)}{\varphi'(a_m^2)},$$

$$(x_1 x_2 \dots x_n)^2 = (-1)^{n(n-1)} \frac{\varphi(u_1^2)\varphi(u_2^2)\dots\varphi(u_n^2)}{\varphi'(a_1^2)\varphi'(a_2^2)\dots\varphi'(a_n^2)},$$

$$\frac{x_1 x_2 \dots x_n}{(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}} = \sqrt{\frac{\varphi(u_1^2)\dots\varphi(u_n^2)}{\varphi'(a_1^2)\dots\varphi'(a_n^2)}}.$$

Der obige Werth von R geht hierdurch über in:

$$R = u_1 u_2 \dots u_n \,.\, \frac{P(u_1^2, u_2^2 \dots u_n^2)\, P(a_1^2 \dots a_n^2)}{\sqrt{\varphi(u_1^2)\dots\varphi(u_n^2)\,\varphi'(a_1^2)\dots\varphi'(a_n^2)}}$$

oder wegen:

$$\varphi'(a_1^2)\dots\varphi'(a_n^2) = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} [P(a_1^2 \dots a_n^2)]^2$$

so ist: $$V = V_1 \sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots (a^2 - a_n^2)},$$
d. h.:

$$3)\quad V = (\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi})^n \frac{1}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)} \sqrt{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots (a^2 - a_n^2)}.$$

Die Constanten $a, a_1 \ldots a_n$ mögen so gewählt sein, dass
$$a > a_1 > a_2 \ldots > a_{n-1} > a_n.$$
In V führe man statt $x_1 \ldots x_n$ neue Integrationsvariabeln $u_1 \ldots u_n$ mittelst der folgenden Gleichungen ein:

$$4)\quad \begin{cases} \dfrac{x_1^2}{u_1^2 - a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{u_1^2 - a_2^2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{u_1^2 - a_n^2} = 1, \\ \dfrac{x_1^2}{u_2^2 - a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{u_2^2 - a_2^2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{u_2^2 - a_n^2} = 1, \\ \vdots \\ \dfrac{x_1^2}{u_n^2 - a_1^2} + \dfrac{x_2^2}{u_n^2 - a_2^2} + \ldots + \dfrac{x_n^2}{u_n^2 - a_n^2} = 1, \end{cases}$$

oder, wenn m eine der Zahlen $1, 2 \ldots n$ bezeichnet,

$$5)\quad -x_m^2 = \frac{(a_m^2 - u_1^2)(a_m^2 - u_2^2) \ldots (a_m^2 - a_n^2)}{(a_m^2 - a_1^2)(a_m^2 - a_2^2) \ldots (a_m^2 - a_{m-1}^2)(a_m^2 - a_{m+1}^2) \ldots (a_m^2 - a_n^2)}.$$

Die Gleichung:
$$\frac{(a^2 - u_1^2)(a^2 - u_2^2) \ldots (a^2 - u_n^2)}{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots (a^2 - a_n^2)} = \frac{\psi(a^2)}{\varphi(a^2)} = 1 + \sum_{m=1}^{m=n} \frac{\psi(a_m^2)}{\varphi'(a_m^2)} \frac{1}{a^2 - a_m^2}$$
lässt sich wegen 5) auch schreiben:
$$\frac{(a^2 - u_1^2)(a^2 - u_2^2) \ldots (a^2 - u_n^2)}{(a^2 - a_1^2)(a^2 - a_2^2) \ldots (a^2 - a_n^2)} = 1 - \left(\frac{x_1^2}{a^2 - a_1^2} + \frac{x_2^2}{a^2 - a_2^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{a^2 - a_n^2}\right).$$
Nach der Gleichung 2) kann man nun setzen:
$$6)\quad \frac{(a^2 - u_1^2) \ldots (a^2 - u_n^2)}{(a^2 - a_1^2) \ldots (a^2 - a_n^2)} = 1 - \varepsilon^2,$$
wo ε eine Zahl bedeutet, die zwischen 0 und 1 variirt. Die Grössen u_1^2, $u_2^2 \ldots u_n^2$ lassen sich, mit Rücksicht auf die Gleichungen 4), als die n Wurzeln der folgenden Gleichung ansehen:
$$\frac{x_1^2}{u^2 - a_1^2} + \ldots + \frac{x_n^2}{u^2 - a_n^2} = 1$$
oder von
$$0 = f(u^2) = (u^2 - a_1^2) \ldots (u^2 - a_n^2) - x_1^2 (u^2 - a_2^2) \ldots (u^2 - a_n^2)$$
$$\ldots - x_n^2 (u^2 - a_1^2) \ldots (u^2 - a_{n-1}^2).$$
Setzt man hierin successive ∞, a_1^2, $a_2^2 \ldots a_n^2$ statt u^2, so folgt leicht, dass die n Wurzeln von $f(u^2) = 0$ zwischen folgenden Grenzen liegen:

$$\begin{matrix} \infty & a_1^2 \\ a_1^2 & a_2^2 \\ \vdots & \\ a_{n-1}^2 & a_n^2. \end{matrix}$$

Diese Determinante n^{ten} Grades lässt sich leicht auf eine Determinante vom $(n-1)^{\text{ten}}$ Grade reduciren. Sei

$$\Delta = \sqrt{(u^2-a_1^2)\dots(u^2-a_{n-1}^2)},$$

dann ist:

$$\frac{\partial u\Delta}{\partial u} = \frac{(u^2-a_1^2)\dots(u^2-a_{n-1}^2)+\dots+u^2(u^2-a_1^2)\dots(u^2-a_{n-2}^2)}{\Delta}$$

oder auch: $\frac{\partial u\Delta}{\partial u} = \frac{n u^{2n-2}+c_2 u^{2n-4}+c_3 u^{2n-6}+\dots+c_n}{\Delta}$,

wo $c_2 \dots c_n$ symmetrische Functionen von $a_1^2 \dots a_{n-1}^2$ sind, deren genauere Kenntniss nicht weiter erforderlich ist. Für $u=u_m$ geht Δ über in $(-1)^{\frac{m-1}{2}}\Delta_m$, man hat dann:

$$(-1)^{m-1}\cdot\frac{\partial u_m\Delta_m}{\partial u_m} = \frac{n u_m^{2n-2}+\dots+c_n}{\Delta_m}.$$

Integrirt man diese Gleichung zwischen den Grenzen a_m und a_{m-1}, so verschwindet offenbar die linke Seite, es bleibt:

$$9)\quad n\int_{a_m}^{a_{m-1}}\frac{u_m^{2n-2}}{\Delta_m}\partial u_m + c_2\int_{a_m}^{a_{m-1}}\frac{u_m^{2n-4}\partial u_m}{\Delta_m}+\dots+c_n\int_{a_m}^{a_{m-1}}\frac{\partial u_m}{\Delta_m}=0.$$

Diese Gleichung gilt für $m=2, 3\dots n$. Für den Fall $m=1$ sind die Grenzen a_1 und a, statt der Gleichung 9) hat man dann die folgende:

$$10)\quad\begin{cases} a\sqrt{(a^2-a_1^2)\dots(a^2-a_{n-1}^2)} = n\int_{a_1}^{a}\frac{u_1^{2n-2}\partial u_1}{\Delta_1}+c_2\int_{a_1}^{a}\frac{u_1^{2n-4}}{\Delta_1}\partial u_1+\dots \\ \qquad\qquad +c_n\int_{a_1}^{a}\frac{\partial u_1}{\Delta_1}.\end{cases}$$

Ersetzt man die Glieder der letzten Horizontalreihe der Determinante in der Gleichung 8) mittelst der Gleichungen 9) und 10) durch die Elemente der vorhergehenden Horizontalreihen, so reducirt sich die Determinante auf das Product von

$$\frac{1}{n}a\sqrt{(a^2-a_1^2)\dots(a^2-a_{n-1}^2)}$$

in die Determinante

$$\begin{vmatrix} \int_0^{a_{n-1}}\frac{\partial u_n}{\Delta_n}\,. & \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\frac{\partial u_{n-1}}{\Delta_{n-1}} & \int_{a_2}^{a_1}\frac{\partial u_1}{\Delta_1} \\ \int_0^{a_{n-1}}\frac{u_n^{2n-4}\partial u_n}{\Delta_n} & \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}}\frac{u_{n-1}^{2n-4}\partial u_{n-1}}{\Delta_{n-1}} & \int_{a_2}^{a_1}\frac{u_1^{2n-4}\partial u_1}{\Delta_1} \end{vmatrix}$$

Dieses Product ist also gleich:

$$\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n \frac{1}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)} a\sqrt{(a^2-a_1^2)\ldots(a^2-a_{n-1}^2)}.$$

Setzt man also

$$\Delta_m = \sqrt{(a_1^2-u^2)\ldots(a_{m-1}^2-u^2)(u^2-a_m^2)\ldots(u^2-a_{n-1}^2)},$$
$$\Delta_n = \sqrt{(a_1^2-u^2)\ldots(a_{n-1}^2-u^2)},$$

wo

$$a_1 > a_2 \ldots > a_{n-1},$$

so erhält man die elegante Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \int_0^{a_{n-1}} \frac{\partial u}{\Delta_n} & \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{\partial u}{\Delta_{n-1}} & \ldots & \int_{a_2}^{a_1} \frac{\partial u}{\Delta_2} \\ \int_0^{a_{n-1}} \frac{u^2\,\partial u}{\Delta_n} & \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u^2\,\partial u}{\Delta_{n-1}} & \ldots & \int_{a_2}^{a_1} \frac{u^2\,\partial u}{\Delta_2} \\ \vdots & & & \\ \int_0^{a_{n-1}} \frac{u^{2n-4}\,\partial u}{\Delta_n} & \int_{a_{n-1}}^{a_{n-2}} \frac{u^{2n-4}\,\partial u}{\Delta_{n-1}} & \ldots & \int_{a_2}^{a_1} \frac{u^{2n-4}\,\partial u}{\Delta_2} \end{vmatrix} = \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\right)^n \frac{n}{\Pi\left(\frac{n}{2}\right)}.$$

Für $n=3$ erhält man unmittelbar das bekannte Theorem von Legendre für die ganzen elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung.

III.

Im T. XVII des *Journal de mathématiques* hat Tissot eine Determinante bestimmter Integrale entwickelt, von welcher Roberts zuerst einen besonderen Fall betrachtet hat (*Journ. de math. T. XVI*). Das angewandte Verfahren ist ziemlich complicirt und nicht ohne Weitläufigkeit; man kann mittelst einer sehr einfachen Transformation der Integrationsvariabeln die Determinante auf ein Product von Euler'schen Integralen reduciren.

Seien $a, a_1 \ldots a_n$ $n+1$ Constanten, so dass

$$a < a_1 < a_2 \ldots < a_n$$

und

$$\varphi_m(x_m) = (x_m-a)^p (x_m-a_1)^{p_1} \ldots (x_m-a_m)^{p_m} (a_{m+1}-x_m)^{p_{m+1}} \ldots (a_n-x_m)^{p_n},$$

wo $p, p_1 \ldots p_n$ entweder positive, echte Brüche, oder beliebige negative, reelle Zahlen sind.

Die zu entwickelnde Determinante ist dann:

$$\begin{vmatrix} \int_a^{a_1} \frac{e^{-x}}{\varphi(x)} \partial x & \int_{a_1}^{a_2} \frac{e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} \partial x_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \partial x_n \\ \int_a^{a_1} \frac{x\, e^{-x}}{\varphi(x)} \partial x & \int_{a_1}^{a_2} \frac{x_1 e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} \partial x_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{x_n e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \partial x_n \\ \\ \int_a^{a_1} \frac{x^n e^{-x}}{\varphi(x)} \partial x & \int_{a_1}^{a_2} \frac{x_1^n e^{-x_1}}{\varphi_1(x_1)} \partial x_1 & \int_{a_n}^{\infty} \frac{x_n^n e^{-x_n}}{\varphi_n(x_n)} \partial x_n \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man diese Determinante durch Δ, so ist auch:

$$1)\quad \Delta = \int_a^{a_1} \partial x \int_{a_1}^{a_2} \partial x \ldots \int_a^{\infty} \partial x_n \frac{P(x, x_1 \ldots x_n)}{\varphi(x)\, \varphi_1(x_1) \ldots \varphi_n(x_n)} e^{-(x+x_1+\ldots+x_n)},$$

wo

$$P(x, x_1 \ldots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x_1 & \ldots x_n \\ \\ x^n & x_1^n & \ldots x_n^n \end{vmatrix}.$$

In Δ führe man statt $x, x_1 \ldots x_n$ die $n+1$ neuen Integrationsvariabeln $u, u_1 \ldots u_n$ mittelst folgender Gleichungen ein:

$$\frac{u}{x-a} + \frac{u_1}{x-a_1} + \ldots + \frac{u_n}{x-a_n} = 1,$$

$$2)\quad \frac{u}{x_1-a} + \frac{u_1}{x_1-a_1} + \ldots + \frac{u_n}{x_1-a_n} = 1,$$

$$\frac{u}{x_1-a} + \frac{u_1}{x_n-a_1} + \ldots + \frac{u_n}{x_n-a_n} = 1.$$

Setzt man $\psi(z) = (z-a)(z-a_1)\ldots(z-a_n)$,

so erhält man aus den obigen Gleichungen:

$$u_r = -\frac{(a_r-x)(a_r-x_1)\ldots(a_r-x_n)}{\psi'(a_r)},$$

also

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s} = \frac{u_r}{x_s - a_r}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung findet man leicht:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = u u_1 \ldots u_n \begin{vmatrix} \frac{1}{x-a} & \frac{1}{x_n-a} \\ \\ \frac{1}{x-a_n} & \frac{1}{x_n-a} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{u u_1 \ldots u_n P(a, a_1 \ldots a_n) P(x, x_1 \ldots x_n)}{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} \psi(x)\, \psi(x_1) \ldots \psi(x_n)}.$$

Nun ist:

$$3)\qquad u_r = \frac{(a_r - x)\dots(a_r - x_{r-1})(x_r - a_r)\dots(x_n - a_r)}{(a_m - a)\dots(a_m - a_{m-1})(a_{m+1} - a_m)\dots(a_n - a_m)}.$$

Hieraus folgt:

$$u\,u_1\dots u_n = \frac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}\psi(x)\dots\psi(x_n)}{[P(a, a_1\dots a_n)]^2}.$$

Berücksichtigt man endlich, dass

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial x_n} \\ \\ \frac{\partial u_n}{\partial x} & \frac{\partial u_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial u_n} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = 1,$$

so folgt:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x_n}{\partial u} \\ \\ \frac{\partial x}{\partial u_n} & \frac{\partial x_n}{\partial u_n} \end{vmatrix} = \frac{P(a, a_1\dots a_n)}{P(x, x_1\dots x_n)}.$$

Ist also ein $(n+1)$ faches Integral mittelst der Substitution 2) zu tr formiren, so tritt $\partial u\,\partial u_1\dots\partial u_n\;P(a, a_1\dots a_n)$ an die Stelle von $\partial x\,\partial x$ $\partial x_n\;P(x, x_1\dots x_n)$.

Setzt man:

$$F_m(z) = (z-a)(z-a_1)\dots(z-a_m)(a_{m+1}-z)\dots(a_n - z),$$

so folgt, mit Rücksicht auf 3):

$$u^p\,u_1^{p_1}\dots u_n^{p_n} = \frac{\varphi(x)\,\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)}{F'(a)^p\,F'_1(a_1)^{p_1}\dots F'_n(a_n)^{p_n}}.$$

In dem $(n+1)$ fachen Integrale $\varDelta$ wird

$$\frac{P(x, x_1\dots x_n)}{\varphi(x)\,\varphi_1(x_1)\dots\varphi_n(x_n)}\,\partial x\,\partial x_1\dots\partial x_n$$

ersetzt durch

$$\frac{\partial u\,\partial u_1\dots\partial u_n}{u^p\,u_1^{p_1}\dots u_n^{p_n}}\;\frac{P(a, a_1\dots a_n)}{F'(a)^p\,F'_1(a_1)^{p_1}\dots F'_n(a_n)^{p_n}}.$$

Wegen der Gleichungen 2) kann man $x, x_1\dots x_n$ als die $n+1$ Wu der Gleichung

$$4)\qquad \frac{u}{z-a} + \frac{u_1}{z-a_1} + \dots + \frac{u_n}{z-a_n} = 1$$

ansehen. Diese Wurzeln liegen zwischen den Grenzen

$$\begin{matrix} a, & a_1 \\ a_1, & a_2 \\ \vdots & \\ a_n, & \infty, \end{matrix}$$

welche mit den Integrationsgrenzen in $\varDelta$ übereinstimmen. Die Vari $u, u_1\dots u_n$ nehmen also alle positiven, reellen Werthe an. Die Gleic *4) entwickelt* giebt:

$$z^n - z^{n-1}(u + u_1 + \ldots + u_n + a + a_1 + \ldots + a_n) + \ldots = 0.$$

Hieraus folgt unmittelbar:

$$x + x_1 + \ldots + x_n = u + u_1 + \ldots + u_n + a + a_1 + \ldots a_n.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung geht die Gleichung 1) durch die Substitution 2) über in:

$$\varDelta = \frac{P(a, a_1 \ldots a_n)}{F'(a)^p \ldots F'_n(a_n)^{p_n}} e^{-(a+a_1+\ldots+a_n)} \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty \frac{e^{-(u+u_1+\ldots+u_n)}}{u^p u_1^{p_1} \ldots u_n^{p_n}} \partial u \ldots \partial u_n$$

oder

$$\varDelta = \frac{\Pi(-p)\,\Pi(-p_1) \ldots \Pi(-p_n)\, P(a, a_1 \ldots a_n)\, e^{-(a+a_1+\ldots+a_n)}}{F'(a)^p\, F'_1(a_1)^{p_1} \ldots F'_n(a_n)^{p_n}}.$$

Wegen

$$F'(a)\, F'_1(a_1) \ldots F'_n(a_n) = [P(a, a_1 \ldots a_n)]^2$$

lässt sich $\varDelta$ auch schreiben:

$$\varDelta = \frac{\Pi(-p)\,\Pi(-p_1) \ldots \Pi(-p_n)}{F'(a)^{p-\frac{1}{2}}\, F'_1(a_1)^{p_1-\frac{1}{2}} \ldots F'_n(a_n)^{p_n-\frac{1}{2}}} \cdot e^{-(a+a_1+\ldots a_n)}.$$

Für den Fall, dass $p = p_1 = \ldots = p_n = \frac{1}{2}$, hat $\varDelta$ den einfachen Werth

$$\pi^{\frac{n+1}{2}} e^{-(a+a_1+\ldots+a_n)}.$$

IV.

Bedeutet c eine Quantität, welche kleiner wie die Einheit ist, so hat man bekanntlich:

1) $$\frac{1}{1-c^2 \sin^2\varphi} = \frac{1}{\sqrt{(1-c^2)}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} (-1)^n \left(\frac{c}{1+\sqrt{(1-c^2)}} \right)^n \cos 2n\varphi \right\}.$$

Setzt man in der von Euler gegebenen Gleichung:

$$\frac{1}{\sin \alpha\pi} = \int_0^\infty \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} \partial x \qquad 0 < \alpha < 1$$

$$x = z^2 \frac{g}{h},$$

so geht dieselbe über in:

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \alpha\pi} \frac{1}{g^\alpha h^{1-\alpha}} = \int_0^\infty \frac{z^{2\alpha-1}}{h+gz^2} \partial z.$$

Für $h = 1 - k^2 \sin^2\varphi$, $g = 1 - l^2 \sin^2\varphi$ und $z = \tang\vartheta$ erhält man

$$\frac{\pi}{2} \frac{1}{\sin \alpha\pi} \frac{1}{(1-l^2\sin^2\varphi)^\alpha} \frac{1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{1-\alpha}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\tang\vartheta)^{2\alpha-1}\,\partial\vartheta}{1-(k^2\cos^2\vartheta + l^2\sin^2\vartheta)\sin^2\varphi}.$$

In der vorstehenden Gleichung sind k und l relle Grössen und kleiner wie die Einheit. Dann ist $k^2\cos^2\vartheta + l^2 \sin\vartheta < 1$, man kann also den Nenner

unter dem Integralzeichen mit Hilfe der Gleichung 1) nach den Cosin der Vielfachen des Bogens 2φ entwickeln.

Setzt man:

$$2)\quad \frac{1}{(1-l^2\sin^2\varphi)^{\alpha}}\,\frac{1}{(1-k^2\sin^2\varphi)^{1-\alpha}}=A_0+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n A_n\cos 2n\varphi,$$

so ist allgemein:

$$3)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin\alpha\pi}\,A_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\vartheta-l^2\sin^2\vartheta)}}\\ &\left\{\frac{\sqrt{(k^2\cos^2\vartheta+l^2\sin^2\vartheta)}}{1+\sqrt{(1-k^2\cos^2\vartheta-l^2\sin^2\vartheta)}}\right\}^{2n}(\tang\vartheta)^{2\alpha-1}.\end{aligned}\right.$$

Man setze:

$$k^2+k'^2=1\qquad l^2+l'^2=1$$

$$p=\frac{1-k'}{1+k'}\qquad q=\frac{1-l'}{1+l'}$$

und transformire das Integral auf der rechten Seite der Gleichung 3) mittelst der Substitution:

$$\sqrt{(1-k^2\cos^2\vartheta-l^2\sin^2\vartheta)}=\frac{1-p\cos^2u-q\sin^2u}{1+p\cos^2u+q\sin^2u}.$$

Hieraus erhält man:

$$\frac{\sqrt{(k^2\cos^2\vartheta+l^2\sin^2\vartheta)}}{1+\sqrt{(1-k^2\cos^2\vartheta-l^2\sin^2\vartheta)}}=\sqrt{(p\cos^2u+q\sin^2u)},$$

$$(k'+l')\sin^2\vartheta=2\,\frac{1+k'}{1+l'}\cdot\frac{1-p\,(p\cos^2u+q\sin^2u)}{(1+p\cos^2u+q\sin^2u)^2}\sin^2u,$$

$$(k'+l')\cos^2\vartheta=2\,\frac{1+l'}{1+k'}\cdot\frac{1-q\,(p\cos^2u+q\sin^2u)}{(1+p\cos^2u+q\sin^2u)^2}\cos^2u,$$

$$\frac{\partial\vartheta}{\sqrt{(1-k^2\cos^2\vartheta-l^2\sin^2\vartheta)}}$$

$$=\frac{4}{(1+k')(1+l')}\,\frac{\partial u}{\sqrt{\{1-p\,(p\cos^2u+q\sin^2u)\}\,\{1-q\,(p\cos^2u+q\sin^2u)\}}}$$

Die Gleichung 3) nimmt mittelst der vorstehenden Substitution folgende Form an:

$$\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{\sin\alpha\pi}\,\frac{(1+k')(1+l')}{4}\left(\frac{1+l'}{1+k'}\right)^{2\alpha-1}A_n=\frac{\pi A_n}{2\sin\alpha\pi\,(1+p)^{2(1-\alpha)}\,(1+q)^{2\alpha}}$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(p\cos^2u+q\sin^2u)^n\,(\tang u)^{2\alpha-1}}{\{1-p\,(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{1-\alpha}\,\{1-q\,(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{\alpha}}\,\partial u.$$

Setzt man in 2)

$$k^2=1-k'^2=\frac{4p}{(1+p)^2},\quad l^2=1-l'^2=\frac{4q}{(1+q)^2},$$

so ist

$$4)\quad \frac{1}{(1+2p\cos 2\varphi+p^2)^{1-\alpha}}\,\frac{1}{(1+2q\cos 2\varphi+q^2)^{\alpha}}=B_0+2\sum_{n=1}^{n=\infty}(-1)^n B_n\cos 2n\varphi,$$

wo

$$5)\quad \frac{\pi}{2}B_n=\sin\alpha\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(p\cos^2u+q\sin^2u)^n(\tang u)^{2\alpha-1}\,\partial u}{\{1-p(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{1-\alpha}\,.\,\{1-q(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{\alpha}}.$$

Multiplicirt man die Gleichung 4) auf beiden Seiten mit $\cos 2n\varphi\,.\,\partial\varphi$, integrirt zwischen den Grenzen 0 und $\frac{\pi}{2}$ nach φ, so folgt:

$$(-1)^n\frac{\pi}{2}B_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2n\varphi\,\partial\varphi}{(1+2p\cos 2\varphi+p^2)^{1-\alpha}(1+2q\cos 2\varphi+q^2)^{\alpha}}.$$

Vergleicht man diesen Werth von B_n mit dem in 5) gefundenen, setzt $-p$ und $-q$ statt p und q, so erhält man die merkwürdige Gleichung:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2n\varphi\,\partial\varphi}{(1-2p\cos 2\varphi+p^2)^{1-\alpha}(1-2q\cos 2\varphi+q^2)^{\alpha}}$$

$$=\sin\alpha\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(p\cos^2u+q\sin^2u)^n(\tang u)^{2\alpha-1}\,\partial u}{\{1-p(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{1-\alpha}\,\{1-q(p\cos^2u+q\sin^2u)\}^{\alpha}}.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach α, so lassen sich manche bekannte und neue Integrale ableiten. Dieses Verfahren ist indessen nicht so einfach, wie folgendes, einige bekannte Resultate etwas zu verallgemeinern.

Seien die Winkel φ und ϑ durch die Gleichung verbunden:

$$\cos\alpha\cos\beta\,.\,\tang\varphi\tang\vartheta=1.$$

Aus dieser Relation leitet man leicht die folgenden Gleichungen ab:

$$\sin\varphi=\frac{\cos\vartheta}{\sqrt{\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\vartheta\}}},\quad \cos\varphi=\frac{\cos\alpha\cos\beta\sin\vartheta}{\sqrt{\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\vartheta\}}},$$

$$\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)}=\cos\alpha\frac{\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\vartheta)}}{\sqrt{\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\vartheta\}}},$$

$$\sqrt{(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)}=\cos\beta\frac{\sqrt{(1-\sin^2\alpha\sin^2\vartheta)}}{\sqrt{\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\vartheta\}}},$$

$$1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\varphi=\frac{(\cos\alpha\cos\beta)^2}{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\vartheta},$$

$$\frac{\partial\varphi}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^{\mu}\,(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{1-\mu}}$$

$$=-\left(\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}\right)^{2\mu-1}\frac{\partial\vartheta}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\vartheta)^{1-\mu}\,(1-\sin^2\beta\sin^2\vartheta)^{\mu}},$$

wo μ eine beliebige reelle Grösse ist. Transformirt man mittelst der stitution $\cos\alpha\cos\beta\,tang\,\varphi\,tang\,\vartheta=1$ die Integrale:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin^2\varphi\}\,\partial\varphi}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^{\mu}\,(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{1-\mu}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\cot\varphi}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^{\mu}\,(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{1-\mu}}\,\partial\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\log\left(\frac{1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi}{1-\sin^2\beta\sin^2\varphi}\right)\partial\varphi}{(1-\sin^2\alpha\sin^2\varphi)^{\mu}\,(1-\sin^2\beta\sin^2\varphi)^{1-\mu}},$$

nimmt immer den Buchstaben φ als Integrationsvariabele, so ergeben mit Hilfe der obigen Gleichungen, folgende Relationen zwischen bes ten Integralen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\{1-(1-\cos^2\alpha\cos^2\beta)\sin\varphi\}\,.\left(\frac{(\cos\alpha)^{2\mu-1}}{A^{\mu}\,B^{1-\mu}}+\frac{(\cos\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\,B^{\mu}}\right)\partial\varphi$$

$$=\log(\cos\alpha\cos\beta)\,.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\cos\alpha)^{2\mu-1}}{A^{\mu}\,B^{1-\mu}}+\frac{(\cos\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\,B^{\mu}}\right)\partial\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\log\cot\varphi\,.\left(\frac{(\cos\alpha)^{2\mu-1}}{A^{\mu}\,B^{1-\mu}}+\frac{(\cos\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\,B^{\mu}}\right)\partial\varphi$$

$$=\tfrac{1}{2}\log(\cos\alpha\cos\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(\cos\alpha)^{2\mu-1}}{A^{\mu}\,B^{1-\mu}}+\frac{(\cos\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\,B^{\mu}}\right)\partial\varphi,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} log\left(\frac{1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi}{1-sin^2\beta\, sin^2\varphi}\right).\left(\frac{(cos\,\alpha)^{2\mu-1}}{A^\mu\, B^{1-\mu}}+\frac{(cos\,\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\, B^\mu}\right)\partial\varphi$$

$$=log\frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta}.\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{(cos\,\alpha)^{2\mu-1}}{A^\mu\, B^{1-\mu}}+\frac{(cos\,\beta)^{2\mu-1}}{A^{1-\mu}\, B^\mu}\right)\partial\varphi.$$

In den vorstehenden Gleichungen ist zur Abkürzung gesetzt:

$$A=1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi,\quad B=1-sin^2\beta\, sin^2\varphi.$$

Für den Fall $\mu=\frac{1}{2}$ nehmen die obigen Gleichungen folgende, sehr einfache Formen an:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{log\{1-(1-cos^2\alpha\, cos^2\beta)\, sin\,\varphi\}}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}}\partial\varphi$$

$$=log\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{log\, cot\,\varphi\,\partial\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}}\partial\varphi$$

$$=\frac{1}{2}\,log\,(cos\,\alpha\, cos\,\beta)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{log\left(\frac{1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi}{1-sin^2\beta\, sin^2\varphi}\right)\partial\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}}$$

$$=log\frac{cos\,\alpha}{cos\,\beta}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\partial\varphi}{\sqrt{(1-sin^2\alpha\, sin^2\varphi)}\sqrt{(1-sin^2\beta\, sin^2\varphi)}}.$$

Mittelst der Substitution:

$$tang\,\varphi=\frac{1}{cos\,\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, cos\,\frac{1}{2}(\alpha-\beta)}\frac{tang\,\psi}{\sqrt{\{1-tang^2\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\, tang^2\frac{1}{2}(\alpha-\beta)\, sin^2\psi\}}}$$

lassen sich die vorstehenden Gleichungen noch etwas vereinfachen, was hier übergangen werden möge.

V.

Sind P und Q ganze, rationale, algebraische Functionen von x, setzt man:

$$\frac{\pi}{2} z = \int_0^\infty \frac{P}{Q} \partial x$$

so lässt sich z als Wurzel einer algebraischen Gleichung darstellen, wenn P und Q nur gerade Potenzen von x enthalten, und Q für keinen reellen Werth von x verschwindet. Die Ausführung der Rechnung für den allgemeinen Fall scheint ziemlich complicirt zu sein; zur Erläuterung der Methode soll ein einfaches Beispiel genommen werden.

Sei:

$$\frac{\pi}{2} z = \int_0^\infty \frac{\partial u}{u^8 + a u^6 + b u^4 + c u^2 + e^2}$$

und $u^8 + a u^6 + b u^4 + c u^2 + e^2 = (u^2 + \alpha^2)(u^2 + \beta^2)(u^2 + \gamma^2)(u^2 + \delta^2)$, wo α, β, γ, δ wesentlich reelle Grössen sind. Durch Zerlegung in Partialbrüche findet man leicht:

$$-z = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \delta^2)} + \frac{1}{\beta} \frac{1}{(\beta^2 - \alpha^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)}$$
$$+ \frac{1}{\gamma} \frac{1}{(\gamma^2 - \alpha^2)(\gamma^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2)} + \frac{1}{\delta} \frac{1}{(\delta^2 - \alpha^2)(\delta^2 - \beta^2)(\delta^2 - \gamma^2)}.$$

Da

$$\frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(\alpha^2 - \gamma^2)(\alpha^2 - \delta^2)} = \frac{1}{(\alpha^2 - \beta^2)(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)}$$
$$+ \frac{1}{(\alpha^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2)} + \frac{1}{(\alpha^2 - \delta^2)(\delta^2 - \beta^2)(\delta^2 - \gamma^2)},$$

so lässt sich die Gleichung für z auch schreiben:

$$-\alpha z = \frac{1}{(\alpha + \beta)\beta(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)} + \frac{1}{(\alpha + \gamma)\gamma(\gamma^2 - \beta^2)(\gamma^2 - \delta^2)}$$
$$+ \frac{1}{\delta(\alpha + \delta)(\delta^2 - \beta^2)(\delta^2 - \gamma^2)}$$

oder wegen:

$$\frac{1}{(\beta^2 - \gamma^2)(\beta^2 - \delta^2)} = \frac{1}{(\beta^2 - \gamma^2)(\gamma^2 - \delta^2)} + \frac{1}{(\beta^2 - \delta^2)(\delta^2 - \gamma^2)}$$

$$\alpha\beta(\alpha + \beta) z = \frac{\alpha + \beta + \gamma}{\gamma(\alpha + \gamma)(\beta + \gamma)(\gamma^2 - \delta^2)} + \frac{\alpha + \beta + \delta}{\delta(\alpha + \delta)(\beta + \delta)(\delta^2 - \gamma^2)},$$

d. h.:

1)

$$z = \frac{(\alpha+\beta+\gamma+\delta)(\alpha\beta+\alpha\gamma+\alpha\delta+\beta\gamma+\beta\delta+\gamma\delta) - (\alpha\beta\gamma+\alpha\beta\delta+\alpha\gamma\delta+\beta\gamma\delta)}{\alpha\beta\gamma\delta(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)}.$$

Aus der Gleichung:

$$u^8 + a u^6 + b u^4 + c u^2 + e^2 = (u^2 + \alpha^2)(u^2 + \beta^2)(u^2 + \gamma^2)(u^2 + \delta^2)$$

folgt:

$$2)\quad \left\{\begin{array}{c} \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = a \\ (\alpha\beta)^2 + (\alpha\gamma)^2 + (\alpha\delta)^2 + (\beta\gamma)^2 + (\beta\delta)^2 + (\gamma\delta)^2 = b \\ (\alpha\beta\gamma)^2 + (\alpha\beta\delta)^2 + (\alpha\gamma\delta)^2 + (\beta\gamma\delta)^2 = c \\ \alpha\beta\gamma\delta = e. \end{array}\right.$$

Setzt man:

$$3)\quad \left\{\begin{array}{c} \alpha + \beta + \gamma + \delta = y \\ \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = p, \end{array}\right.$$

so findet man mittelst der Gleichungen 2)

$$4)\quad \frac{y^2 - a}{2} = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta.$$

Diese Gleichung quadrirt giebt:

$$5)\quad \left(\frac{y^2 - a}{2}\right)^2 = b + 2e + 2yp.$$

Es ist ferner

$$p^2 = c + e(y^2 - a).$$

Durch Elimination von p zwischen dieser Gleichung und 5) folgt:

$$\left\{\left(\frac{y^2 - a}{2}\right)^2 + 2e - b\right\}^2 = 4y^2\left\{c + e(y^2 - a)\right\}.$$

Aus den Gleichungen 3) findet man:

$$\begin{aligned} p - \alpha\beta y &= (\gamma\delta - \alpha\beta)(\alpha + \beta), \\ p - \alpha\gamma y &= (\beta\delta - \alpha\gamma)(\alpha + \gamma), \\ p - \alpha\delta y &= (\beta\gamma - \alpha\delta)(\alpha + \delta), \\ p - \beta\gamma y &= -(\beta\gamma - \alpha\delta)(\beta + \gamma), \\ p - \beta\delta y &= -(\beta\delta - \alpha\gamma)(\beta + \delta), \\ p - \gamma\delta y &= -(\gamma\delta - \alpha\beta)(\gamma + \delta). \end{aligned}$$

Wegen

$$(\gamma\delta - \alpha\beta)(\beta\delta - \alpha\gamma)(\beta\gamma - \alpha\delta) = c - ae$$

giebt das Product der obigen sechs Gleichungen:

$$\begin{aligned} -(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)(ae-c)^2 & \\ = (p - \alpha\beta y)(p - \alpha\gamma y)(p - \alpha\delta y)(p - \beta\gamma y)(p - \beta\delta y)(p - \gamma\delta y)&, \\ = p^6 - p^5 y \frac{y^2 - a}{2} + p^4 y^2 (py - e) - p^3 y^3 (c + ey^2) + p^2 y^4 e (py - c)& \\ - p y^5 e^2 \frac{y^2 - a}{2} + y^6 e^3&, \\ = (p^2 + ey^2)(p^2 - ey^2)^2 - py \frac{y^2 - a}{2}(p^4 + ey^4) + p^3 y^3 (p^2 - c)&, \\ = (p^2 - ey^2)^2 \left\{p^2 + ey^2 - py\frac{y^2 - a}{2}\right\} + p^3 y^3 \left\{p^2 - c - e(y^2 - a)\right\}&. \end{aligned}$$

Da nun nach 4)

$$p^2 - c - e(y^2 - a) = 0, \quad p^2 - ey^2 = c - ae,$$

so erhält man einfach:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)=py\frac{y^2-a'}{2}-p^2-ey^2.$$

Die Gleichung 1) geht hierdurch über in:

$$ez=\frac{y\frac{y^2-a}{2}-p}{py\frac{y^2-a}{2}-p^2-ey^2}.$$

Da nun nach 5) und 6)

$$2yp=\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b,$$

$$p^2=c+e(y^2-a),$$

so lässt sich die Gleichung für z auch schreiben:

$$ezy=\frac{y^2.\frac{y^2-a}{2}-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}}{\frac{y^2-a}{4}\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}+ae-c-2ey^2}.$$

Eliminirt man y zwischen dieser Gleichung und

$$\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}^2=4y^2\left\{c+e(y^2-a)\right\},$$

so erhält man eine algebraische Gleichung für z, welcher das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\partial u}{u^8+au^6+bu^4+cu^2+e^2}$$

genügt.

XIII.

Ueber die Anzahl der Geraden, Ebenen und Punkte, welche durch gegebene Punkte, Gerade und Ebenen in der Ebene und im Raume bestimmt werden.

Von Professor Dr. C. A. Bretschneider
in Gotha.

Eine der ersten und vornehmsten Aufgaben, welche die Geometrie der Lage stellt, betrifft die Bestimmung der Anzahl von Geraden und Ebenen, welche man durch gegebene Punkte legen kann, sowie umgekehrt die Bestimmung der Menge der Schnittpunkte und Schnittlinien, welche durch gegebene Gerade oder Ebenen erzeugt werden. Da eine erschöpfende Lösung dieser Aufgabe bis jetzt, so viel mir bekannt, noch nicht versucht worden ist, so soll es im Folgenden unternommen werden, die fragliche Lücke in der Wissenschaft des Raumes wenigstens der Hauptsache nach auszufüllen.

§. 1.

Als Fundamentalsätze, von denen die Untersuchung auszugehen hat, sind nachfolgende aufzuführen.

a) Zwei Punkte im Raume liegen stets in einer Geraden; und umgekehrt: zwei Ebenen im Raume schneiden sich stets in einer Geraden.

Im zweiten Falle kann die Schnittlinie entweder in unendlicher oder in endlicher Entfernung liegen, je nachdem die gegebenen Ebenen parallel sind oder nicht.

b) Durch drei Punkte im Raume, die nicht in einer und derselben Geraden liegen, ist stets eine Ebene bestimmt; und umgekehrt: durch drei Ebenen im Raume, die nicht durch eine und dieselbe Gerade hindurchgehen, wird stets ein Punkt bestimmt.

Dieser Schnittpunkt kann nicht nur in endlicher, sondern auch in unendlicher Entfernung liegen, und es sind in letzterem Falle die drei Schnittlinien je zweier der gegebenen Ebenen einander parallel.

so erhält man einfach:

$$(\alpha+\beta)(\alpha+\gamma)(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)(\beta+\delta)(\gamma+\delta)=py\frac{y^2-a}{2}-p^2-ey^2.$$

Die Gleichung 1) geht hierdurch über in:

$$ez=\frac{y\frac{y^2-a}{2}-p}{py\frac{y^2-a}{2}-p^2-ey^2}.$$

Da nun nach 5) und 6)

$$2yp=\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b,$$

$$p^2=c+e(y^2-a),$$

so lässt sich die Gleichung für z auch schreiben:

$$ezy=\frac{y^2.\frac{y^2-a}{2}-\frac{1}{4}\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}}{\frac{y^2-a}{4}\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}+ae-c-2ey^2}.$$

Eliminirt man y zwischen dieser Gleichung und

$$\left\{\left(\frac{y^2-a}{2}\right)^2+2e-b\right\}^2=4y^2\left\{c+e(y^2-a)\right\},$$

so erhält man eine algebraische Gleichung für z, welcher das Integral

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\partial u}{u^8+au^6+bu^4+cu^2+e^2}$$

genügt.

— so mögen diese x oder y Geraden in der Ebene **vollständig frei** genannt werden.

g) Sind in einer Ebene oder im Raume x Punkte gegeben, von denen ein Theil y auf mehrere Gerade oder Ebenen vertheilt ist, und es haben diese y Punkte eine solche Lage, dass keine Gerade, welche durch zwei auf verschiedenen Gebilden gelegene Punkte bestimmt wird, durch einen der übrigen $(x-2)$ Punkte hindurchgeht, — und dass keine Ebene, die durch je drei, auf drei verschiedenen Gebilden liegende Punkte bestimmt wird, durch einen der übrigen $(x-3)$ Punkte hindurchgeht; — so sollen jene y Punkte in der Ebene, beziehungsweise im Raume, **beschränkt frei** heissen.

Die gleiche Benennung mag unter analogen Voraussetzungen von Ebenen und von Geraden gebraucht werden.

Mit Hilfe des Vorstehenden ergiebt sich unmittelbar die Auflösung der nachfolgenden sechs Hauptaufgaben.

§. 3.

I. **Es seien in einer Ebene n Punkte gegeben; man verlangt die Anzahl der durch sie bestimmten Geraden.**

Lehrsatz. 1. Die Anzahl aller Geraden, welche durch n in der Ebene vollständig freie Punkte bestimmt werden, beträgt $\frac{1}{2}n\,(n-1)$.

Denn jeder der n Punkte giebt mit jedem der noch übrigen $(n-1)$ Punkte ebenso viele Gerade, so dass die Gesammtzahl der letzteren $n(n-1)$ betragen würde. Da aber hierbei jede Gerade doppelt gezählt wird, nämlich das eine Mal von dem einen der sie bestimmenden Punkte aus, das andere Mal von dem zweiten dieser Punkte, so ist die Zahl der wirklich von einander verschiedenen Geraden nur $\frac{1}{2}n\,(n-1)$.

Oder:

Der erste der n Punkte giebt mit jedem der noch übrigen $(n-1)$ Punkte $(n-1)$ Gerade. Ebenso erzeugt der zweite der n Punkte mit jedem der $(n-2)$ Punkte, welche mit Ausschluss des bereits verwendeten ersten Punktes noch übrig sind, neue $(n-2)$ Gerade; auf gleiche Weise der dritte Punkt neue $(n-3)$ Gerade u. s. f., bis endlich der $(n-2)^{\text{te}}$ Punkt mit den beiden letzten noch 2 Gerade, und der $(n-1)^{\text{ste}}$ mit dem letzten n^{ten} Punkte noch 1 Gerade liefert. Die Anzahl aller möglichen Geraden ist demnach

$$1+2+\ldots+(n-2)+(n-1)=\frac{n(n-1)}{1.2}.$$

Lehrsatz 2. Die Zahl aller Geraden, welche durch $n=q+p$ Punkte einer Ebene bestimmt werden, von denen q vollständig frei sind, die übrigen p hingegen in einer Geraden liegen, ist gleich $1+\frac{1}{2}q\,(q-1)+pq$.

Denn die p Punkte geben für sich allein 1 Gerade, während die q Punkte

deren $\frac{1}{2}q\ (q-1)$ bestimmen. Endlich liefert jeder Punkt der Gruppe p mit jedem Punkte der Gruppe q eine Gerade, wodurch noch pq Gerade erzeugt werden.

Zusatz. Es ist die verlangte Zahl auch gleich

$$\frac{1}{2}n\ (n-1)-\frac{1}{2}p\ (p-1)+1.$$

Denn wären alle n Punkte vollständig frei, so würden sie $\frac{1}{2}n(n-1)$ Gerade geben. Es liegen aber p Punkte auf einer und derselben Geraden, also fallen alle durch diese p Punkte erzeugten Geraden, an der Zahl $\frac{1}{2}p\ (p-1)$, in eine einzige zusammen, und die obige Zahl muss also um $\frac{1}{2}p\ (p-1)-1$ verkleinert werden.

Lehrsatz 3. Die Anzahl aller Geraden, welche in einer Ebene durch $n=p_1+p_2$ beschränkt freie Punkte bestimmt werden, von denen p_1 auf einer Geraden, p_2 auf einer zweiten Geraden liegen, ist gleich $2+p_1p_2$.

Denn es giebt jeder Punkt der Geraden p_1 mit jedem Punkte auf p_2 eine Gerade; mithin ist die Zahl aller so entstehenden Geraden gleich p_1p_2. Und zu ihnen kommen noch die beiden Geraden, welche die einzelnen Punktmassen p_1 und p_2 enthalten.

§. 4.

Die im vorangehenden Paragraphen entwickelten Sätze enthalten alles, was nöthig ist, um in jedem Falle die Anzahl der Geraden zu finden, welche in der Ebene durch Punkte bestimmt werden, die man in Bezug auf ihre Lage irgend welchen beliebigen Bedingungen unterworfen hat. Alle hier möglichen Fälle aufzustellen und für jeden derselben die entsprechende Formel zu entwickeln, würde zu maassloser Weitläufigkeit führen, ist aber auch ohne erheblichen Werth. Wie man sich in jedem einzelnen Falle zu verhalten hat, wird zur Genüge aus den nachfolgenden Beispielen erhellen.

Aufgabe 1. Die Anzahl aller Geraden zu finden, welche in einer Ebene durch $n=q+p_1+p_2+\ldots+p_k$ Punkte bestimmt werden, von denen q vollständig, die übrigen nur beschränkt frei sind, und zu je $p_1, p_2\ldots p_k$ auf k verschiedenen Geraden liegen.

Auflösung. Zuerst liefern die q vollständig freien Punkte unter sich allein $\frac{1}{2}q\ (q-1)$ Gerade. — Die beschränkt freien Punkte dagegen geben nicht nur die k Geraden, auf denen die einzelnen Punktmassen $p_1, p_2\ldots p_k$ vertheilt liegen, sondern auch die ganze Schaar der Geraden, welche aus der Verbindung eines Punktes der Gruppe p_h mit einem Punkte einer anderen Gruppe p_i hervorgehen. Da nun die Anzahl der Geraden, welche aus zwei solchen Gruppen hervorgehen, nach Lehrsatz 3 gleich $p_h p_i$ sein muss, so wird die Gesammtzahl der Geraden aus allen k Gruppen offenbar gleich:

$$p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_1 p_4 + \dots + p_{k-2} p_k + p_{k-1} p_k$$

werden, d. h. gleich der Summe der Binionen ohne Wiederholung aus den k Zahlen p_1 p_2 u. s. w. Bezeichnet man daher diese Summe zur Abkürzung mit $\Sigma_2 (p_1 \dots p_k)$, so erhält man für die Zahl der Geraden, welche die beschränkt freien Punkte unter sich erzeugen, den Werth $k + \Sigma_2 (p_1 \dots p_k)$.

Zu dieser Gesammtsumme kommen nun noch diejenigen Geraden hinzu, welche durch Verbindung eines Punktes aus der Gruppe q mit einem Punkte der Gruppen p hervorgehen, deren Zahl nach Lehrsatz 2 gleich

$$q (p_1 + p_2 + \dots + p_k)$$

ist.

Als Endresultat ergiebt sich daher die Summe:

$$\tfrac{1}{2} p (q-1) + k + (p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{k-1} p_k) + q (p_1 + p_2 + \dots + p_k)$$
$$= \tfrac{1}{2} q (q-1) + k + \Sigma_2 (q, p_1, p_2 \dots p_k).$$

Zusatz 1. Liegen in einer Ebene $n = p_1 + p_2 + \dots + p_k$ beschränkt freie Punkte, welche zu je p_1, p_2 u. s. w. auf k gerade Linien vertheilt sind, so ist die Zahl der durch sie bestimmten Geraden gleich der Summe der Binionen aus den Zahlen p_1, p_2 u. s. w., vermehrt um die Zahl k, d. h. gleich:

$$k + p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{k-1} p_k.$$

Zusatz 2. Sind in einer Ebene $n = 1 + p_1 + p_2 + \dots + p_k$ beschränkt freie Punkte auf k Strahlen eines Strahlbüschels so vertheilt, dass einer von ihnen im Strahlencentrum, die übrigen zu je p_1, $p_2 \dots p_k$ auf den k Strahlen liegen, so ist die Zahl der hierdurch bestimmten Geraden ebenfalls gleich:

$$k + p_1 p_2 + p_1 p_3 + \dots + p_{k-1} p_k.$$

Aufgabe 2. Es seien in einer Ebene n Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ aber nur beschränkt frei sind, und auf k Strahlenbüscheln so vertheilt liegen, dass jedes der k Strahlencentra einen Punkt enthält, während auf

m_1 Strahlen des ersten Büschels je $p_1', p_1'', p_1''' \dots p_1^{m_1}$
m_2 . . . . zweiten . . . . $p_2', p_2'', p_2''' \dots p_2^{m_2}$
u. s. w. u. s. w.
m_k . . . . $k$ten . . . . $p_k', p_k'', p_k''' \dots p_k^{m_k}$

der gegebenen Punkte zu liegen kommen. Man soll die Anzahl aller durch diese n Punkte bestimmten Geraden angeben.

Auflösung. Man setze zuvörderst zur Abkürzung:

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_k$$
$$p_1 = p_1' + p_1'' + \dots + p_1^{m_1}$$
$$p_2 = p_2' + p_2'' + \dots + p_2^{m_2}$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$p_k = p_k' + p_k'' + \dots + p_k^{m_k}$$

so beträgt die Zahl der gegebenen Punkte $n = q + k + p_1 + p_2 + \dots + p_k$,

und die Zahl der Strahlen, welche die k Büschel zusammen enthalten, ist gleich m.

Zieht man zuerst alle Punkte, mit Ausnahme der k Strahlenmittelpunkte, in Betracht, so ist die Zahl der durch sie bestimmten Geraden nach Aufgabe 1 gleich der Summe der Binionen aus q und den m verschiedenen Zahlen der Form p_i^h, vermehrt um die Grösse $\frac{1}{2}q(q-1)+m$ d. h. gleich:

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+m+\Sigma_2(q, p_i^h).$$

Hierzu kommen nun zweitens die durch die k Centra noch entstehenden Geraden, welche in zwei Gruppen zerfallen. Die erste derselben wird durch die Geraden gebildet, welche die Strahlencentra unter sich bestimmen. Da es der Willkür überlassen ist, ob diese Centra unter einander vollständig oder nur beschränkt frei sein sollen, so bezeichne man die Anzahl der durch sie allein entstehenden Geraden mit k', ein Werth, der nach den bereits ermittelten Gesetzen in jedem Falle gefunden werden kann. Die zweite Gruppe von Geraden enthält dagegen alle diejenigen, welche durch Verbindung eines Centrums mit allen übrigen, nicht zu seinem Büschel gehörigen Punktmassen p_i^h, sowie mit den Punkten q hervorgehen. Da hiernach jede Zahl p_i^h mit $(k-1)$ Strahlenmittelpunkten verbunden wird, so ist die Zahl der zweiten Gruppe gleich

$$kq+(k-1)\,\Sigma_1(p_i^h)=k\,\Sigma_1(q, p_i^h)-\Sigma_1(p_i^h),$$

wenn man durch $\Sigma_1(p_i^h)$ die Summe der Unionen aus den m Grössen der Form p_i^h bezeichnet. — Als Endresultat folgt daher für die gesuchte Zahl:

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+m+k'+\Sigma_2(q, p_i^h)+k\,\Sigma_1(q, p_i^h)-\Sigma_1(p_i^h)$$
$$=\tfrac{1}{2}q(q-1)+m+k'+\Sigma_2(k, q, p_i^h)-(n-q-k).$$

Zusatz 1. Sind die k Strahlencentra unter einander vollständig frei, so wird $k'=\frac{1}{2}k(k-1)$ und es kann der gefundene Endwerth in nachstehende Form zusammengezogen werden:

$$\tfrac{1}{2}q(q+1)+\tfrac{1}{2}k(k+1)+m-n+\Sigma_2(k, q, p_i^h).$$

Zusatz 2. Fallen die q vollständig freien Punkte gänzlich hinweg, so bleiben nur noch die auf den Strahlenbüscheln liegenden Punktmassen übrig, und es reducirt sich die Zahl der alsdann noch möglichen Geraden auf:

$$\tfrac{1}{2}k(k+1)+m-n+\Sigma_2(k, p_i^h).$$

Aufgabe 3. Es seien in einer Ebene $n=q+k+p_1+p_2+\ldots+p_k$ Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ nur beschränkt frei sind. Von den letzteren sollen k die Spitzen eines einfachen k Eckes bilden, während auf den einzelnen Seiten desselben noch ausserdem je $p_1, p_2 \ldots p_k$ Punkte vertheilt liegen. Man verlangt die Anzahl aller *Geraden, welche durch diese n Punkte bestimmt sind.*

Auflösung. Zuerst geben die k Spitzen der Figur, da sie unter einander gänzlich frei sind, $\frac{1}{2}k(k-1)$ Gerade, in welcher Zahl natürlich die Seiten der Figur, auf denen die $p_1, p_2 \dots p_k$ Punktmassen liegen, mit einbegriffen sind. Ebenso geben diese p_1, p_2 etc. Punkte unter sich $\Sigma_2(p_1, p_2 \dots p_k)$ Gerade. Hierzu kommt aber zweitens die Zahl der Geraden, welche jede der k Spitzen mit den Gruppen $p_1, p_2 \dots p_k$ erzeugt, und zwar mit allen denjenigen, die nicht mit ihr zugleich auf einerlei Seite liegen. Da hiernach jede dieser Gruppen zwei Mal wegfällig wird, so beträgt die Gesammtzahl der so entstehenden Geraden:

$$(k-2)(p_1+p_2+\dots+p_k) = k(p_1+p_2+\dots+p_k) - 2(n-q-k).$$

Es liefern mithin die beschränkt freien Punkte unter sich

$$\frac{1}{2}k(k-1) + \Sigma_2(p_1 \dots p_k) + k(p_1+p_2+\dots+p_k) - 2(n-q-k)$$
$$= \frac{1}{2}k(k-1) - 2(n-q-k) + \Sigma_2(k, p_1 \dots p_k)$$

Gerade. — Da nun die q vollständig freien Punkte unter sich $\frac{1}{2}q(q-1)$ und mit den übrigen $(n-q)$ Punkten noch $q(n-q)$ Gerade erzeugen, so beträgt das Endresultat die Summe:

$$\frac{1}{2}q(q-1) + \frac{1}{2}k(k-1) - 2(n-q-k) + \Sigma_2(k, p_1 \dots p_k) + q(k_1+p_1+p_2+\dots$$
$$+ p_k) = \frac{1}{2}q(q+3) + \frac{1}{2}k(k+3) - 2n + \Sigma_2(q, k, p_1 \dots p_k).$$

Zusatz. Fallen die q vollständig freien Punkte gänzlich weg, so bleiben nur noch die auf die Spitzen und Seiten des k Eckes vertheilten Punkte übrig, und diese erzeugen noch die Zahl von

$$\frac{1}{2}k(k+3) - 2n + \Sigma_2(k, p_1 \dots p_k)$$

geraden Linien, mit Einschluss der Seiten der Figur.

§. 5.

II. **Es seien im Raume n Punkte gegeben; man suche die Anzahl der durch sie bestimmten Geraden.**

Sind die gegebenen Punkte im Raume vollständig frei oder liegen sie entweder sämmtlich oder doch theilweise auf geraden Linien vertheilt, sowie dies in dem Falle I angenommen worden, so gelten alle die unter I entwickelten Formeln, bei denen die gegebenen Punkte in einer Ebene lagen, auch jetzt noch, wo sie als im Raume liegend angenommen werden. Denn da durch zwei Punkte stets eine Gerade bestimmt wird, mögen nun jene in einer Ebene oder im Raume liegen, so ändert sich in den Schlüssen des Falles I nicht das Mindeste, wenn sie auf den vorliegenden Fall II angewendet werden. Neue Bestimmungen können hier erst dann eintreten, wenn die beschränkt freien Punkte auch auf Ebenen vertheilt sind.

Lehrsatz 4. **Sind im Raume $n = q + r_1 + r_2 + \dots + r_m$ Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen nur beschränkt frei und zu je $r_1, r_2 \dots r_m$ auf m verschiedene Ebenen vertheilt sind, in denen sie beziehungsweise $g_1, g_2 \dots g_m$ Gerade bestimmen, — so ist die Zahl der durch sie erzeugten Geraden gleich $\frac{1}{2}q(q-1) + (g_1+g_2+\dots+g_m) + \Sigma_2(q, r_1 \dots r_m)$.**

Denn es geben die q Punkte unter sich $\frac{1}{2}q(q-1)$ Gerade, die Punkte hingegen, welche in denselben Ebenen liegen, beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_k$ Gerade, wodurch die beiden ersten Glieder der Formel erhalten werden. Sodann aber giebt jeder Punkt aus einer der Gruppen $q, r_1, r_2 \ldots r_m$ mit jedem Punkte aller übrigen Gruppen noch eine Anzahl von Geraden, deren Summe der Summe der Binionen aus sämmtlichen Zahlen $q, r_1 \ldots r_m$ gleich sein muss.

Zusatz. Sind die Punkte einer und derselben Gruppe r_i in ihrer zugehörigen Ebene vollständig frei, so wird $g_i = \frac{1}{2}r_i(r_i-1)$ und der oben gefundene Ausdruck verwandelt sich in:

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+\tfrac{1}{2}r_1(r_1-1)+\tfrac{1}{2}r_2(r_2-1)+\ldots+\tfrac{1}{2}r_m(r_m-1)+\Sigma_2(q, r_1 \ldots r_m),$$

ein Werth, der sich offenbar auf $\frac{1}{2}n(n-1)$ reducirt.

In der That sind dann sämmtliche n Punkte vollständig frei, da die Gerade, welche zwei derselben verbindet, falle dieselbe nun in eine der gegebenen Ebenen oder in den Raum, doch durch keinen der übrigen $(n-2)$ Punkte hindurchgehen kann.

Lehrsatz 5. Sind im Raume $n = q + p_1 + \ldots + p_k + r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ aber nur beschränkt frei sind, und zwar zu je $p_1, p_2 \ldots p_k$ auf k Geraden und zu je $r_1, r_2 \ldots r_m$ auf m Ebenen liegen, in denen sie beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_m$ Gerade bilden; — so ist die Gesammtzahl der durch sie bestimmten Geraden gleich:

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+k+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, p_1 \ldots p_k, r_1 \ldots r_m).$$

Zuvörderst geben die $(q+r_1+r_2+\ldots+r_m)$ Punkte unter sich nach dem vorigen Lehrsatze die Zahl von

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, r_1, r_2 \ldots r_m)$$

Geraden. Die auf k Geraden vertheilten Punktmassen unter sich liefern dagegen nach Aufgabe 1, Zusatz 1 die Zahl von $k+\Sigma_2(p_1 \ldots p_k)$ Geraden. Rechnet man hierzu noch die Geraden, welche jeder Punkt der Gruppe $(p_1 \ldots p_k)$ mit jedem Punkte der Gruppe $(q, p_1 \ldots p_k)$ erzeugt, deren Anzahl gleich

$$(p_1+p_2+\ldots+p_k)(q+r_1+r_2+\ldots+r_m)$$

ist, so erhält man für die Gesammtsumme den Werth:

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+k+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, r_1 \ldots r_m)+\Sigma_2(p_1 \ldots p_k)$$
$$+(p_1+p_2+\ldots+p_m)(q+r_1+r_2+\ldots+r_m)$$
$$=\tfrac{1}{2}q(q-1)+k+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, p_1 \ldots p_k, r_1 \ldots r_m).$$

Zusatz. Sind die r_i Punkte in jeder ihrer Ebenen unter sich vollständig frei, so bezeichne man $q+r_1+r_2+\ldots+r_m = v$; dann ist die Zahl der vorhandenen Geraden gleich:

$$\tfrac{1}{2}v(v-1)+(n-v)v+k+\Sigma_2(p_1 \ldots p_k).$$

Lehrsatz 6. Sind im Raume $n = q + h + r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ *nur beschränkt* frei sind, und zwar auf m Ebenen eines

Ebenenbüschels so vertheilt liegen, dass h derselben in die Achse des Büschels, die übrigen zu je $r_1, r_2 \ldots r_m$ auf die einzelnen Ebenen fallen und in ihnen beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_m$ Gerade erzeugen; — so beträgt die Zahl der durch diese n Punkte bestimmten Geraden

$$1+\tfrac{1}{2}q(q-1)+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, h, r_1 \ldots r_m).$$

Denn es liefern zuerst die $q+r_1+r_2+\ldots+r_m$ Punkte unter sich nach Lehrsatz 4 die Zahl von

$$\tfrac{1}{2}q(q-1)+(g_1+g_2+\ldots+g_m)+\Sigma_2(q, r_1 \ldots r_m)$$

Gerade, während die h Punkte unter sich nur eine einzige Gerade bestimmen, nämlich die Achse des Büschels. Zweitens aber liefert jeder der Punkte h mit jedem der übrigen $(n-h)$ Punkte eine Gerade, also $h(q+r_1+r_2+\ldots+r_m)$ in Summe, woraus sich denn die oben gefundene Formel sofort zusammensetzt.

Zusatz. Nimmt man auch hier jede der r_i Gruppen in ihrer Ebene als vollständig frei an, so verwandelt sich die Formel des Lehrsatzes in:

$$\tfrac{1}{2}(n-h)(n-h-1)+1+h(n-h)=1+\tfrac{1}{2}(n-h)(n+h-1),$$

ein Ausdruck, der ungeändert bleibt, wenn $q=0$ gesetzt und damit die ganze Masse der n gegebenen Punkte als beschränkt frei angesehen wird.

Mittelst der vorstehenden Lehrsätze können nun alle Aufgaben über die Anzahl von Geraden, welche durch Punkte im Raume bestimmt sind, gelöst werden, mögen nun diese Punkte auf ganz beliebige Weise unter Strahlenbüschel und Ebenenbüschel vertheilt oder theilweise vollständig frei sein. Namentlich gehört hierher der Fall, wenn die Punkte auf den Ecken, Kanten und Grenzflächen eines Polyeders liegen. Indessen dürfte es überflüssig sein, länger hierbei zu verweilen, da die unter I gelösten analogen Aufgaben sattsam zeigen, wie man hierbei zu verfahren hat.

§. 6.

III. Es seien im Raume n Punkte gegeben; man suche die Anzahl der durch sie bestimmten Ebenen.

Lehrsatz 7. Die Anzahl der Ebenen, welche durch n im Raume vollständig freie Punkte bestimmt wird, beträgt:

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.$$

Jeder einzelne der n Punkte bestimmt mit den übrigen $(n-1)$ Punkten so viele Ebenen, als diese $(n-1)$ Punkte unter sich verschiedene Gerade erzeugen, nämlich $\tfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$. Die Gesammtzahl aller Ebenen würde demnach $\tfrac{1}{2}n(n-1)(n-2)$ sein, wenn dabei nicht jede Ebene drei Mal gezählt wäre, indem sie nämlich von jedem ihrer drei bestimmenden Punkte aus einmal in Rechnung genommen worden ist. Die wahre Anzahl aller Ebenen beträgt daher nur den dritten Theil der vorhin gefundenen Summe.

Lehrsatz 8. Die Anzahl der Ebenen, welche im Raume durch $n = q + p$ Punkte bestimmt werden, von denen q vollständig frei sind, die übrigen p hingegen in einer Geraden liegen, — beträgt:

$$q + \tfrac{1}{2}q(q-1)p + \tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2).$$

Denn die Gerade p giebt zuvörderst mit jedem der q freien Punkte eine Ebene, also zusammen q Ebenen. Sodann bestimmt jeder einzelne Punkt der p mit jeder der $\frac{1}{2}q(q-1)$ Geraden, welche die Gruppe q unter sich erzeugt, eine neue Ebene, wodurch $\frac{1}{2}q(q-1)p$ Ebenen entstehen. Endlich geben die q Punkte unter sich noch $\frac{1}{6}q(q-1)(q-2)$ Ebenen, womit die im Lehrsatze angegebene Gesammtzahl erfüllt ist.

Lehrsatz 9. Die Anzahl der Ebenen, welche durch $n = q + r$ Punkte im Raume erzeugt werden, von denen q vollständig frei sind, während die übrigen r in einer Ebene liegen und in derselben g Gerade bilden, — beträgt:

$$1 + qg + \tfrac{1}{2}q(q-1)r + \tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2).$$

Denn zuerst geben die r Punkte unter sich r Ebenen und die q Punkte unter sich deren $\frac{1}{6}q(q-1)(q-2)$. Sodann liefert jede der g Geraden in der Ebene r mit jedem Punkte der Gruppe q eine Ebene, also in Summe qg Ebenen; und umgekehrt bestimmt jede der $\frac{1}{2}q(q-1)$ Geraden aus der Gruppe q mit jedem Punkte der Gruppe r gleichfalls eine Ebene, also zusammen $\frac{1}{2}q(q-1)r$, womit die im Lehrsatz angegebene Gesammtzahl erfüllt ist.

Zusatz. Sind die r Punkte in ihrer Ebene vollständig frei, so wird $g = \frac{1}{2}r(r-1)$ und damit erhält man als die höchste Zahl von Ebenen, die durch die $n = q + r$ Punkte bestimmt werden, die Summe:

$$1 + \tfrac{1}{2}r(r-1)q + r \cdot \tfrac{1}{2}q(q-1) + \tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2)$$
$$= 1 + \tfrac{1}{6}n(n-1)(n-2) - \tfrac{1}{6}r(r-1)(r-2),$$

ein Resultat, welches dem in Lehrsatz 2, Zusatz 1 erhaltenen analog ist, und sich ganz auf dieselbe Art, wie dieses, auf den Lehrsatz 7 zurückführen lässt.

Lehrsatz 10. Die Anzahl der Ebenen, welche durch $n = p + r$ Punkte im Raume bestimmt werden, von denen p in einer Geraden, die übrigen r hingegen in einer ausserhalb dieser Geraden liegenden Ebene enthalten sind, in welcher sie g Gerade erzeugen, — beträgt:

$$1 + pg + r.$$

Es geben nämlich die r Punkte unter sich 1 Ebene; sodann liefern die durch diese r Punkte bestimmten Geraden g mit den p Punkten der gegebenen Geraden pg Ebenen; und endlich entstehen durch die Verbindung dieser letzten Geraden mit jedem der r Punkte noch r verschiedene Ebenen.

Zusatz. Sind die r Punkte in der Ebene vollständig frei, so erhält

man als die höchste Zahl von Ebenen, die durch die $p+r$ Punkte erzeugt werden kann, die Summe:

$$1+\tfrac{1}{2}r(r-1)p+r.$$

Lehrsatz 11. Die Anzahl der Ebenen, welche durch $n=q+p+r$ Punkte im Raum bestimmt werden, von denen q vollständig, die übrigen beschränkt frei sind, und zwar so, dass p derselben auf einer Geraden, die übrigen r auf einer Ebene liegen, in der sie g Gerade erzeugen, — beträgt:

$$1+\tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2)+g(p+q)+(r+p)+\tfrac{1}{2}q(q-1)(r+p)+qpr.$$

Die aus den n Punkten hervorgehenden Ebenen sind erstens solche, welche aus den Punkten der einzelnen Gruppen q, p, r unter sich bestimmt werden, nämlich aus r nur eine, aus p gar keine und aus q deren $\frac{1}{6}q(q-1)(q-2)$. Damit sind die beiden ersten Glieder des obigen Resultates gewonnen.

Sodann folgen die Ebenen, welche aus je zwei Punkten der einen Gruppe und je einem der übrigen beiden Gruppen entstehen, oder mit anderen Worten, die Ebenen, welche durch eine Gerade der einen und einen Punkt einer anderen Gruppe erhalten werden. Es liefern aber die g Geraden der Gruppe r noch $g(q+p)$ Ebenen, die eine Gerade der Gruppe p noch $p(q+r)$ Ebenen und endlich die $\frac{1}{2}q(q-1)$ Geraden der Gruppe q noch $\frac{1}{2}q(q-1)(p+r)$ Ebenen, womit die drei nächsten Glieder der obigen Gesammtsumme gefunden sind.

Endlich sind noch die Ebenen hinzuzuzählen, welche durch je drei Punkte der drei verschiedenen Gruppen gebildet werden, und deren Zahl nach combinatorischen Gesetzen qpr beträgt.

Lehrsatz 12. Sind im Raume $n=q+p_1+p_2+\ldots+p_k+r_1+r_2+\ldots+r_m$ Punkte gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ nur beschränkt frei sind, und zwar in Gruppen von je $p_1, p_2 \ldots p_k$ auf k verschiedenen Geraden und in Gruppen von je $r_1, r_2 \ldots r_m$ auf m verschiedenen Ebenen liegen, in denen sie beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_m$ Gerade bestimmen; — so ist die Zahl aller durch diese n Punkte erzeugten Ebenen gleich:

$$m+n\{k+g_1+g_2+\ldots+g_m+\tfrac{1}{2}q(q-1)\}+\Sigma_3(q, p_1\ldots p_k, r_1\ldots r_m)$$
$$-(p_1+p_2+\ldots+p_k)-(g_1r_1+g_2r_2+\ldots+g_m r_m)-\tfrac{1}{3}(q+1)q(q-1).$$

Werden die einzelnen Bestandtheile der Gesammtsumme ganz in derselben Weise entwickelt, wie dies im vorangehenden Lehrsatze geschah, so erhalten wir zunächst für die Zahl der Ebenen, die durch die Punkte der Gruppen q, p_i, r_k unter sich erzeugt werden, die Werthe m, 0, $\frac{1}{6}q(q-1)(q-2)$.

Nimmt man zweitens die Ebenen, welche durch die Geraden aus einer Gruppe und alle Punkte der übrigen Gruppen erzeugt werden, so erhält man für die Gruppen r die Summe:

$$g_1(n-r_1)+g_2(n-r_2)+\ldots+g_m(n-r_m)=n(g_1+g_2+\ldots+g_m)-(g_1r_1+\ldots+g_mr_m),$$

während dagegen die Gruppen p den Werth:

$$(n-p_1)+(n-p_2)+\ldots+(n-p_k)=kn-(p_1+p_2+\ldots+p_k),$$

und die Gruppe q den Werth $\frac{1}{2}q(q-1)(n-q)$ giebt. Die Gesammtzahl dieser zweiten Reihe von Ebenen beträgt daher:

$$n\{g_1+g_2+..+g_m+k+\tfrac{1}{2}q(q-1)\}-(g_1r_1+..+g_mr_m)-(p_1+..+p_k)-\tfrac{1}{2}q^2(q-1).$$

Endlich hat man noch die Ebenen zu zählen, welche durch je 3 Punkte dreier verschiedener Gruppen entstehen. Ihre Anzahl ist aber gleich der Summe der Ternionen ohne Wiederholung aus sämmtlichen $(m+k+1)$ Gruppenzahlen, d. h. gleich $\Sigma_3(q, p_1..p_k, r_1..r_m)$. Die Vereinigung dieser drei Partialsummen in eine Gesammtsumme liefert unmittelbar die im Lehrsatze angegebene Formel.

Zusatz 1. Sind die r_i Punkte, welche in einer einzelnen Ebene liegen, unter sich vollständig frei, so wird allgemein $g_i=\frac{1}{2}r_i(r_i-1)$ und man erhält dann für die höchste Zahl von Ebenen, welche unter den Voraussetzungen des Lehrsatzes noch möglich sind, den Werth:

$$\begin{aligned}m+\frac{n}{2}\{2k+r_1(r_1-1)+r_2(r_2-1)+..+r_m(r_{m-1})+q(q-1)\}\\+\Sigma_3(q, p_1..p_k, r_1..r_m)\\-(p_1+p_2+..+p_k)-\tfrac{1}{2}\{r_1^2(r_1-1)+r_2^2(r_2-1)+..+r_m^2(r_{m-1})\}\\-\tfrac{1}{3}(q+1)q(q-1),\end{aligned}$$

der sich auch leicht unter folgende Form bringen lässt:

$$\begin{aligned}m+n(k-1)+\tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2)+\Sigma_3(q, p_1..p_k, r_1..r_m)\\-\tfrac{1}{2}(q^3+r_1^3+..+r_m^3)+\frac{n+1}{2}(q^2+r_1^2+..+r_m^2)-\frac{n-2}{2}(q+r_1+\\..+r_m).\end{aligned}$$

Zusatz 2. Sind im Raume $n=q+r_1+r_2+..r_m$ Punkte gegeben, welche den im Lehrsatze angegebenen Bedingungen entsprechen, so ist die Anzahl der durch sie bestimmten Ebenen noch:

$$\begin{aligned}m+n\{g_1+g_2+..+g_m+\tfrac{1}{2}q(q-1)\}+\Sigma_3(q, r_1..r_m)\\-\{g_1r_1+g_2r_2+..+g_mr_m\}-\tfrac{1}{3}(q+1)q(q-1),\end{aligned}$$

also im günstigsten Falle, wenn jede der r Punktgruppen in ihrer Ebene vollständig frei ist:

$$\begin{aligned}m-\tfrac{1}{2}n^2+\tfrac{1}{6}q(q-1)(q-2)+\Sigma_3(q, r_1..r_m)\\-\tfrac{1}{2}\{q^3+r_1^3+r_2^3+..+r_m^3\}+\tfrac{1}{2}(n+1)\{q^2+r_1^2+r_2^2+..+r_m^2\}.\end{aligned}$$

Zusatz 3. Sind im Raume $n=q+p_1+p_2+..+p_k$ Punkte gegeben, welche den im Lehrsatze angegebenen Bedingungen entsprechen, so ist die Anzahl aller durch sie bestimmten Ebenen gleich:

$$n\{(k-1)+\tfrac{1}{2}q(q-1)\}-\tfrac{1}{3}q(q+2)(q-2)+\Sigma_3(q, p_1..p_k).$$

Zusatz 4. Liegen im Raume $n=p_1+p_2+..+p_k+r_1+r_2+..+r_m$ beschränkt freie Punkte, von denen je $p_1, p_2..p_k$ auf k Gerade und je $r_1, r_2..r_m$ auf m Ebenen vertheilt sind, in denen sie beziehungsweise $g_1, g_2..g_m$ Gerade erzeugen; — so beträgt die Gesammtzahl der durch sie bestimmten Ebenen:

$$m + n(k + g_1 + g_2 + \ldots + g_m) + \Sigma_2(p_1 \ldots p_k, r_1 \ldots r_m)$$
$$- (p_1 + p_2 + \ldots + p_k) - (g_1 r_1 + g_2 r_2 + \ldots + g_m r_m),$$

also im günstigsten Falle, wenn alle r_i Punkte in ihren Ebenen vollständig frei sind:

$$m + n(k-1) + \Sigma_2(p_1 \ldots p_k\, r_1 \ldots r_m) - \tfrac{1}{3}(r_1^3 + \ldots + r_m^3)$$
$$+ \frac{n+1}{2}(r_1^2 + \ldots + r_m^2) - \frac{n-2}{2}(r_1 + \ldots + r_m).$$

Zusatz 5. Die Anzahl der durch $n = p_1 + p_2 + \ldots + p_k$ beschränkt freie Punkte bestimmten Ebenen beträgt, wenn je $p_1, p_2 \ldots p_k$ Punkte in k Geraden liegen:

$$n(k-1) + \Sigma_2(p_1 \ldots p_k).$$

Zusatz 6. Liegen im Raume $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_m$ beschränkt freie Punkte, von denen je $r_1, r_2 \ldots r_m$ in m verschiedenen Ebenen enthalten sind und in diesen beziehungsweise $g_1, g_2 \ldots g_m$ Gerade bilden, so ist die Gesammtzahl der durch sie bestimmten Ebenen gleich:

$$m + n(g_1 + g_2 + \ldots + g_m) - (g_1 r_1 + g_2 r_2 + \ldots + g_m r_m) + \Sigma_2(r_1 r_2 \ldots r_m),$$

also, wenn jede r_i Punkte in ihrer Ebene vollständig frei sind:

$$m - \tfrac{1}{2}n^2 - \tfrac{1}{3}(r_1^3 + \ldots + r_m^3) + \tfrac{1}{2}(n+1)(r_1^2 + r_2^2 + \ldots + r_m^2) + \Sigma_2(r_1 \ldots r_m).$$

§. 7.

IV. Es seien in einer Ebene n Gerade gegeben; man suche die Anzahl der durch sie bestimmten Schnittpunkte.

Lehrsatz 13. Die Anzahl der Schnittpunkte, welche in einer Ebene durch n vollständig freie Gerade erzeugt werden, beträgt:

$$\tfrac{1}{2}n(n-1).$$

Lehrsatz 14. Die Anzahl der Schnittpunkte, welche $n = q + t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ in einer Ebene liegende Gerade erzeugen, von denen q vollständig, die übrigen hingegen beschränkt frei sind und zu je $t_1, t_2 \ldots t_k$ durch k in endlicher oder unendlicher Entfernung gelegene Punkte hindurchgehen; — beträgt:

$$k + \tfrac{1}{2}q(q-1) + \Sigma_2(q, t_1 \ldots t_k).$$

Zusatz. Fallen die vollständig freien Geraden hinweg, so dass nur noch die Strahlen der k Strahlenbüschel oder Strahlenbündel übrig bleiben, so reducirt sich die Anzahl aller noch möglichen Schnittpunkte auf:

$$k + \Sigma_2(t_1 t_2 \ldots t_k).$$

Die Beweise dieser Sätze sind denen der Aufgabe I vollständig analog und können aus letzteren unmittelbar erhalten werden, wenn man in ihnen überall statt Punkt und Gerade beziehungsweise Gerade und Punkt substituirt. Es kann daher die weitere Untersuchung der im vorliegenden Falle möglichen Aufgaben umsomehr erspart werden, als die Endformeln mit denen der No. I (*mutatis mutandis*) völlig übereinstimmen müssen.

§. 8.

V. **Es seien im Raume n Gerade gegeben; man suche d Anzahl der durch sie bestimmten Schnittpunkte und Eben(**

Da zwei Gerade im Raume nur dann einen Schnittpunkt besitz wenn sie in einer Ebene liegen, und nur dann eine Ebene bestimm wenn sie durch einen Punkt hindurchgehen, so folgt, dass die Aufg nur unter den beiden bestimmten Voraussetzungen lösbar ist, dass alle (rade entweder durch einen Punkt oder durch eine Gerade hindur gehen.

A. Sämmtliche Gerade gehen durch einen und denselbe Punkt.

Lehrsatz 15. Liegen von n Geraden, die durch einen u denselben Punkt gehen, nie mehr als zwei in einerlei Eben so bestimmen dieselben

1 Schnittpunkt,

$\frac{1}{2}n(n-1)$ Ebenen.

Lehrsatz 16. Gehen im Raume $n = q + t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ G rade durch einen und denselben Punkt, und sind von ihn q unter sich vollständig, die übrigen aber nur beschrän frei, so dass je $t_1, t_2 \ldots t_k$ derselben in k verschiedenen Eben liegen, so werden durch diese n Geraden bestimmt:

1 Schnittpunkt,

$k + \frac{1}{2}q(q-1) + \Sigma_2(q, t_1 \ldots t_k)$ Ebenen.

Den Beweis dieser Sätze erhält man unmittelbar aus No. I, we man durch das System der n gegebenen Geraden, jedoch ausserhalb ih gemeinschaftlichen Schnittpunktes, eine Ebene legt. Jede der n Gerac wird in dieser Ebene durch ihren Schnittpunkt mit letzterer vertreten, u ebenso findet sich jede der durch zwei der n Geraden bestimmten Eber durch die Schnittlinie repräsentirt, welche sie mit der Hilfsebene bild Die Aufgabe kommt daher gänzlich auf die der No. I zurück.

B. Sämmtliche Gerade gehen durch eine und dieselbe Gerade.

Lehrsatz 17. Durch $n = k + 1$ Gerade im Raume, von den k durch eine und dieselbe $(k+1)^{te}$ geschnitten werden, üb gens aber unter einander vollständig frei sind, werden b stimmt:

k Schnittpunkte und

k Ebenen.

Denn jede der k Geraden bildet mit der letzten $(k+1)^{ten}$ einen Schni punkt und giebt mit ihr zugleich eine Ebene.

Lehrsatz 18. Es seien im Raume $n = 1 + t_1 + t_2 + \ldots + t_k$ G *rade gegeben*, von denen je $t_1, t_2 \ldots t_k$ k räumliche Strahle

büschel bilden und in jedem derselben beziehungsweise je $e_1, e_2 .. e_k$ Ebenen bestimmen, sonst aber vollständig frei sind. Wenn nun die Centra aller k Büschel auf einer und derselben n^{ten} Geraden liegen, so werden durch die n Linien überhaupt bestimmt:

k Schnittpunkte und

$(n-1) + (e_1 + e_2 + .. + e_k)$ Ebenen.

Denn ausser den e_i Ebenen, welche die Strahlen jedes Büschels unter einander erzeugen, liefert auch die Verbindungslinie der k Büschelcentra mit jeder der übrigen $(n-1)$ Geraden noch eine Ebene.

Zusatz. Sind die Strahlen jedes Büschels unter sich vollständig frei, so ist $e_i = \frac{1}{2} t_i (t_i - 1)$, und man erhält für die Gesammtzahl der möglichen Ebenen die Summe:

$$\tfrac{1}{2}\{t_1(t_1-1) + t_2(t_2-1) + .. + t_k(t_k-1)\} + (n-1) = \tfrac{1}{2}\{t_1^2 + t_2^2 + .. + t_k^2\} + \tfrac{1}{2}(n-1).$$

Das Vorstehende reicht vollkommen hin, um in jedem zusammengesetzteren Falle, der hier etwa vorkommen möchte, die verlangten Zahlen zu finden, weshalb ein Eingehen in grösseres Detail füglich unterlassen werden kann.

§. 9.

VI. Es seien im Raume n Ebenen gegeben; man suche die Anzahl der durch sie bestimmten Schnittlinien und Schnittpunkte.

Lehrsatz 19. Durch n im Raume vollständig freie Ebenen werden stets bestimmt:

$\frac{1}{2} n (n-1)$ Schnittlinien,

$\frac{1}{6} n (n-1)(n-2)$ Schnittpunkte.

Die Beweise sind genau denen ähnlich, welche in Lehrsatz 1 und 7 für die analogen Sätze geführt worden sind, und werden aus letzteren unmittelbar erhalten, wenn man in ihnen die Benennungen Punkt und Ebene unter einander vertauscht.

Zusatz. Gehen alle n Ebenen durch einen und denselben Punkt, bleiben aber im übrigen vollständig frei, so geben sie nur noch 1 Schnittpunkt und $\frac{1}{2} n (n-1)$ Schnittlinien. Gehen dagegen die n Ebenen alle durch eine Gerade, so giebt es nur noch diese eine Schnittlinie und gar keinen Schnittpunkt.

Lehrsatz 20. Sind im Raume $n = q + t_1 + t_2 + .. + t_k + s_1 + s_2 + .. + s_m$ Ebenen gegeben, von denen q vollständig, die übrigen $(n-q)$ hingegen nur beschränkt frei sind, und zwar in Gruppen von je $t_1, t_2 .. t_k$ durch k Gerade und in Gruppen zu je $s_1, s_2 .. s_m$ durch m Punkte hindurchgehen, wobei jede der Gruppen s unter sich beziehungsweise $g_1, g_2 .. g_m$ Schnittlinien geben; — so werden durch alle diese n Ebenen bestimmt:

$\frac{1}{2}q(q-1)+k+(g_1+g_2+..+g_m)+\Sigma_2(q,t_1..t_k,s_1..s_m)$ Schnittlinien,

$\left.\begin{matrix} m+n\{k+g_1+g_2+..+g_m+\frac{1}{2}q(q-1)\}+\Sigma_3(q,t_1..t_k,s_1..s_m) \\ -(t_1+..+t_k)-(g_1s_1+g_2s_2+..+g_ms_m)-\frac{1}{6}(q+1)q(q-1) \end{matrix}\right\}$ Schnittpunkte.

Der Beweis der Formel für die Schnittlinien ist analog dem des Lehrsatzes 5, hingegen der für die Schnittpunkte dem des Lehrsatzes 12, und es lassen sich daher für besondere Annahmen auch hier alle die Specialformeln entwickeln, welche in den Zusätzen zu jenen Paragraphen aufgestellt worden sind. — Bei der vollkommenen Analogie, die zwischen No. I und No. II und No. III herrscht, erscheint daher eine weitere Verfolgung dieses Gegenstandes als völlig überflüssig.

Kleinere Mittheilungen.

XXV. Bemerkungen über confocale sphärische Kegelschnitte. Von Dr. HEILERMANN, Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Coblenz.

§. 1. Es seien CD und CE, wie in den früheren Mittheilungen Band 6, zwei sich rechtwinklig schneidende Coordinatenachsen und in Bezug auf dieselben

1) $$\frac{x^2}{tang^2 a}+\frac{y^2}{tang^2 b}=1,$$

1*) $$\frac{x^2}{tang^2 a_1}+\frac{y^2}{tang^2 b_1}=1$$

die Gleichungen zweier confocalen Kegelschnitte. Wird, wie früher,

$$\frac{cos\, a}{cos\, a_1}+\frac{cos\, b}{cos\, b_1}=cos\, \mu$$

gesetzt, so ergiebt sich leicht aus den vorstehenden Gleichungen

2) $$tang^2 a_1=\frac{tang^2 a - tang^2 \mu}{1+tang^2 \mu},\quad tang^2 b_1=\frac{tang^2 b - tang^2 \mu}{1+tang^2 \mu}.$$

In den Kegelschnitten 1) wähle man zwei beliebige entsprechende Punkte $(\xi\eta)$ und (xy) und ziehe nach dem Mittelpunkte C die Halbmesser ϱ und r, es sei also

$$\frac{\xi}{x}=\frac{tang\, a}{tang\, a_1},\quad \frac{\eta}{y}=\frac{tang\, b}{tang\, b_1}$$

und

$$tang^2 \varrho=\xi^2+\eta^2,\quad tang^2 r=x^2+y^2.$$

Wenn man diese Gleichungen verbindet, so entsteht zunächst

$$tang^2 r = \frac{tang^2 a_1}{tang^2 a} \cdot \xi^2 + \frac{tang^2 b_1}{tang^2 b} \cdot \eta^2$$

und durch Anwendung der Gleichungen 2)

$$tang^2 r = \left(\frac{tang^2 a - tang^2 \mu}{tang^2 a} \cdot \xi^2 + \frac{tang^2 b - tang^2 \mu}{tang^2 b} \cdot \eta^2\right) \frac{1}{1 + tang^2 \mu}$$

$$= \frac{\xi^2 + \eta^2 - tang^2 \mu}{1 + tang^2 \mu} = \frac{tang^2 \varrho - tang^2 \mu}{1 + tang^2 \mu}.$$

Dieser Zusammenhang lässt sich auch einfacher durch die Gleichung

3) $$\cos \varrho = \cos r \cos \mu$$

darstellen, und hiernach sind in zwei confocalen sphärischen Kegelschnitten je zwei Halbmesser, welche nach entsprechenden Punkten gezogen werden, Hypothenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, von welchem die andere Kathete constant ist.

§. 2. Aus dem vorstehenden Satze, welcher der bekannten Eigenschaft der ebenen Kegelschnitte und Flächen zweiten Grades genau entspricht, lässt sich wieder ein anderer Satz entwickeln. Es seien in den confocalen Kegelschnitten 1) ausser den entsprechenden Punkten $(\xi\eta)$ und (xy) noch die entsprechenden Punkte $(\xi_1\eta_1)$ und (x_1y_1) gegeben und die Hauptbogen, welche $(\xi\eta)$ mit (x_1y_1) und $(\xi_1\eta_1)$ mit (xy) verbinden, durch d und d_1 bezeichnet. In diesen Zeichen ist (vergl. Gudermann's analyt. Sphärik §. 6)

$$\cos d = \frac{1 + \xi x_1 + \eta y_1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}},$$

$$\cos d_1 = \frac{1 + \xi_1 x + \eta_1 y}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}}.$$

Dazu ist nach dem vorhergehenden §.

$$\cos \varrho = \cos r \cos \mu,$$

oder

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}} = \frac{\cos \mu}{\sqrt{1 + x^2 + y^2}}$$

und

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}} = \frac{\cos \mu}{\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2}},$$

folglich

$$\sqrt{1 + \xi^2 + \eta^2}\sqrt{1 + x_1^2 + y_1^2} = \sqrt{1 + \xi_1^2 + \eta_1^2}\sqrt{1 + x^2 + y^2}.$$

Da ferner $(\xi\eta)$ und (xy), sowie $(\xi_1\eta_1)$ und (x_1y_1) entsprechende Punktenpaare sind, also

$$\frac{\xi}{x} = \frac{tang\, a}{tang\, a_1}, \quad \frac{\eta}{y} = \frac{tang\, b}{tang\, b_1},$$

$$\frac{\xi_1}{x_1} = \frac{tang\, a}{tang\, a_1}, \quad \frac{\eta_1}{y_1} = \frac{tang\, b}{tang\, b_1},$$

so ist auch

$$\xi x_1 = \xi_1 x, \quad \eta y_1 = \eta_1 y,$$

und

$$1 + \xi x_1 + \eta y_1 = 1 + \xi_1 x + \eta_1 y.$$

Die oben angegebenen Ausdrücke für $\cos d$ und $\cos d_1$ stimmen also im Zähler und Nenner überein und es ist

4) $$d = d_1.$$

Hiernach haben die sphärischen Kegelschnitte mit den ebenen und den Flächen zweiten Grades auch folgende Eigenschaft gemeinsam:

Werden zwei beliebige, in zwei confocalen sphärischen Kegelschnitten gelegene Punkte durch einen Hauptbogen verbunden, so ist dieser Bogen gleich demjenigen, welcher die entsprechenden Punkte verbindet.

§. 3. Wenn die rechtwinklig sich schneidenden Coordinatenachsen CD und CE von dem Hauptkreise

$$\frac{x}{\tan g\,\alpha} + \frac{y}{\tan g\,\beta} = 1$$

in den Punkten A und B geschnitten werden, so ist

$$\alpha = CA, \quad \beta = CB.$$

Wird noch vom Anfangspunkte C auf den Hauptkreis 5) die Senkrechte CL gefällt und der Winkel ACL mit φ bezeichnet, so ist in dem rechtwinkligen Dreiecken ACL und BCL

$$\tan g\, CL = \tan g\,\alpha \cos\varphi = \tan g\,\beta \sin\varphi.$$

Soll nun auf dem Hauptbogen CL ausserdem auch der Hauptkreis

$$\frac{x}{\tan g\,\alpha_1} + \frac{y}{\tan g\,\beta_1} = 1$$

im Punkte L_1 senkrecht stehen, so ist auch

$$\tan g\, CL_1 = \tan g\,\alpha_1 \cos\varphi = \tan g\,\beta_1 \sin\varphi,$$

folglich

5) $$\frac{\tan g\, CL}{\tan g\, CL_1} = \frac{\tan g\,\alpha}{\tan g\,\alpha_1} = \frac{\tan g\,\beta}{\tan g\,\beta_1}.$$

Da diese Proportionen von dem Winkel φ, welchen die Senkrechte CL mit der ersten Achse bildet, unabhängig ist, so wird durch dieselben folgende Eigenschaft ausgedrückt:

Wenn auf einem Hauptkreise zwei andere senkrecht stehen, so schneiden diese auf allen Hauptkreisen, welche durch denselben Punkt des ersteren gehen, Stücke ab, deren trigonometrische Tangenten proportional sind.

Wegen dieser Eigenschaft, welche an die Parallelen erinnert, mögen hier die Hauptbogen, welche auf einem durch den Mittelpunkt C gehenden Hauptkreise senkrecht stehen, gleichgerichtet genannt werden. Der Punkt, wo gleichgerichtete Hauptkreise sich schneiden, liegt in der Coordinate DE, d. i. in dem Hauptkreise, dessen Mittelpunkt C ist.

§. 4. Die Hauptkreise, welche die confocalen Kegelschnitte 1) in den Punkten $(\xi\eta)$ und (xy) berühren, sind

6) $$\frac{\xi}{tang^2 a} \cdot u + \frac{\eta}{tang^2 b} \cdot v = 1,$$

6*) $$\frac{x}{tang^2 a_1} \cdot u + \frac{y}{tang^2 b_1} \cdot v = 1,$$

und die Senkrechten p und q, welche vom Mittelpunkte C auf diese gefällt werden, sind bestimmt durch

7) $$\frac{1}{tang^2 p} = \frac{\xi^2}{tang^4 a} + \frac{\eta^2}{tang^4 b},$$

7*) $$\frac{1}{tang^2 q} = \frac{x^2}{tang^4 a_1} + \frac{y^2}{tang^4 b_1}.$$

Sollen nun die Berührenden 6) gleichgerichtet sein, so ist

$$tang\, q : tang\, p = \frac{tang^2 a_1}{x} : \frac{tang^2 a}{\xi} = \frac{tang^2 b_1}{y} : \frac{tang^2 b}{\eta}.$$

Aus diesen Proportionen ergiebt sich sogleich

$$\frac{tang^2 q}{tang^2 p} \cdot \frac{x^2}{tang^2 a_1} = \frac{\xi^2\, tang^2 a_1}{tang^4 a},$$

$$\frac{tang^2 q}{tang^2 p} \cdot \frac{y^2}{tang^2 b_1} = \frac{\eta^2\, tang^2 b_1}{tang^4 b},$$

und weiter durch Summirung dieser Werthe unter Anwendung der Gleichung 1*)
$$\frac{tang^2 q}{tang^2 p} = \frac{\xi^2\, tang^2 a_1}{tang^4 a} + \frac{\eta^2\, tang^2 b_1}{tang^4 b}.$$

Werden nun noch für $tang^2 a_1$ und $tang^2 b_1$ die Werthe 2) eingesetzt, so entsteht

$$\frac{tang^2 q}{tang^2 p} = \left[\frac{\xi^2 (tang^2 a - tang^2 \mu)}{tang^4 a} + \frac{\eta^2 (tang^2 b - tang^2 \mu)}{tang^4 b}\right] \cdot \frac{1}{1 + tang^2 \mu}$$
$$= \left[\frac{\xi^2}{tang^2 a} + \frac{\eta^2}{tang^2 b} - tang^2 \mu \left(\frac{\xi^2}{tang^4 a} + \frac{\eta^2}{tang^4 b}\right)\right] \cdot \frac{1}{1 + tang^2 \mu},$$

und durch Einsetzung der Werthe 1) und 7)

$$\frac{tang^2 q}{tang^2 p} = \left(1 - \frac{tang^2 \mu}{tang^2 p}\right) \cdot \frac{1}{1 + tang^2 \mu}.$$

Hieraus folgt die Gleichung

$$tang^2 q = \frac{tang^2 p - tang^2 \mu}{1 + tang^2 \mu}$$

und mit dieser ist die einfachere

8) $$\cos p = \cos q \cos \mu$$

gleichbedeutend, welche folgenden Satz enthält:

Werden zwei confocale sphärische Kegelschnitte von gleichgerichteten Hauptbogen berührt und auf diese vom Mittelpunkte Senkrechten gefällt, so sind diese immer Hypothenuse und Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen andere Kathete constant ist.

XXVI. Bemerkung über die Rectification der Ellipse. — Unter d verschiedenen Formeln zur Rectification eines aus den Halbachsen a u b construirten Ellipsenquadranten empfiehlt sich für die gewöhnlichen Fä am besten die Legendre'sche Formel*)

$$E = \tfrac{1}{4}\pi(a+b)\left\{1 + \tfrac{1}{4}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^2 + \tfrac{1}{64}\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^4 + \dots\right\},$$

worin der Coefficient von $\left(\frac{a-b}{a+b}\right)^{2n}$ durch den Ausdruck

$$\left(\frac{1.3.5.7\dots(2n-3)}{2.4.6.8\dots(2n)}\right)^2$$

dargestellt wird; bei sehr excentrischen Ellipsen dagegen differirt d Quotient $\frac{a-b}{a+b}$ so wenig von der Einheit, dass die Reihe zu langsam die numerische Rechnung convergirt. Nun hat zwar Legendre noch ei zweite, auf den letzten Fall passende Formel gegeben, aber die Ableitu Legendre's genügt den heutigen Forderungen nach Strenge nicht, u wenn man diesen Mangel beseitigen will, so wird man zu einem Gedank gange genöthigt, der wenigstens für den ersten Unterricht in der höher Analysis nicht verwendbar ist. Vielleicht wird man folgende Entwicl lung brauchbarer finden.

Bezeichnet β das Verhältniss $\frac{b}{a}$, so ist

$$E = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\sqrt{\cos^2\varphi + \beta^2\sin^2\varphi}\,d\varphi = a\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\cos\varphi\sqrt{1+\beta^2\,tang^2\varphi}\,d\varphi;$$

innerhalb des Integrationsintervalles $\varphi = 0$ bis $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ bleibt $\beta\,tang$ nicht immer < 1, daher lässt sich $\sqrt{1+\beta^2\,tang^2\varphi}$ mittelst des binomisch Satzes nicht entwickeln und folglich giebt es auch für E keine Reil welche schlechthin nach Potenzen von β fortschreitet. Um diesem Ueb stande auszuweichen, muss man das Integrationsintervall verkleinern, u hierzu dient der Fagnano'sche Satz, dessen Beweis mittelst der Substi tion $tang\,\varphi = \frac{a}{b}\,tang\,\omega$ leicht zu führen ist. Nennen wir φ_1 die Amplitu welche durch die Gleichung

$$tang\,\varphi_1 = \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

bestimmt wird, s_1 den zugehörigen, vom Endpunkte der kleinen Halbach an gerechneten Ellipsenbogen, und s_2 den Ergänzungsbogen, so haben v nach dem Fagnano'schen Satze

$$s_1 - s_2 = a - b,$$

*) Vergl. Jahrg. II (1857) d. Zeitschr. S. 49 und 414.

ferner

$$s_1 + s_2 = E,$$

mithin

$$E = 2s_1 - (a - b) = 2s_1 - a(1 - \beta)$$

und zugleich ist

$$s_1 = a \int_0^{\varphi_1} \cos\varphi \sqrt{1 + \beta^2 \tan^2\varphi}\, d\varphi.$$

Mit Hilfe der Substitution

$$\tan\varphi = \frac{u}{\sqrt{\beta}}$$

wird daraus

$$s_1 = a\beta \int_0^1 \sqrt{\frac{1 + \beta u^2}{(\beta + u^2)^3}}\, du$$

und durch theilweise Integration

$$s_1 = a \left\{ 1 - \beta \int_0^1 \frac{u^2\, du}{\sqrt{(1 + \beta u^2)(\beta + u^2)}} \right\}.$$

Hier kann $(1 + \beta u^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach dem binomischen Satze entwickelt werden, und man kommt dann auf einzelne Integrale von der Form

$$A_n = \int_0^1 \frac{u^{2n}\, du}{\sqrt{\beta + u^2}}.$$

Die Berechnung derselben geschieht am bequemsten durch eine Recursionsformel, nämlich

$$A_1 = \tfrac{1}{2}\left[\sqrt{1+\beta} - \beta\, l\left(\frac{1 + \sqrt{1+\beta}}{\sqrt{\beta}}\right)\right],$$

$$A_n = \frac{\sqrt{1+\beta} - (2n-1) A_{n-1} \beta}{2n},$$

und es ist dann

$$s_1 = a \left\{ 1 - A_1 \beta + \tfrac{1}{2} A_2 \beta^2 - \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} A_3 \beta^3 + \dots \right\},$$

$$E = 2s_1 - a(1 - \beta).$$

Als Beispiel mag die Annahme $a = 1$, $\beta = 0,1$ dienen, für welche mein College, Herr Professor Fort, die Rechnung auszuführen die Güte hatte. Es findet sich

$A_1 = 0,4309768080$, $A_2 = 0,2298789469$,
$A_3 = 0,1556448958$, $A_4 = 0,1174821776$,
$A_5 = 0,0943074888$, $A_6 = 0,0787558842$,
$A_7 = 0,0676018713$, $A_8 = 0,05921\dots\dots$

$$
\begin{array}{rl}
1 & = 1 \\
A_1\beta & = 0{,}0430976868 \ (-) \\
 & \quad 0{,}9569023132 \\
\tfrac{1}{2} A_2\beta^2 & = 0{,}0011493947 \ (+) \\
 & \quad 0{,}9580517079 \\
\tfrac{1.3}{2.4} A_3\beta^3 & = 0{,}0000583668 \ (-) \\
 & \quad 0{,}9579933411 \\
\tfrac{1.3.5}{2.4.6} A_4\beta^4 & = 0{,}0000036713 \ (+) \\
 & \quad 0{,}9579970124 \\
\tfrac{1\ldots7}{2\ldots8} A_5\beta^5 & = 0{,}0000002579 \ (-) \\
 & \quad 0{,}9579967545 \\
\tfrac{1\ldots9}{1\ldots10} A_6\beta^6 & = 0{,}0000000194 \ (+) \\
 & \quad 0{,}9579967739 \\
\tfrac{1\ldots11}{2\ldots12} A_7\beta^7 & = 0{,}0000000015 \ (-) \\
 & \quad 0{,}9579967724 \\
\tfrac{1\ldots13}{2\ldots14} A_8\beta^8 & = 0{,}0000000001 \ (+) \\
s_1 & = 0{,}9579967725 \\
E & = 1{,}015993545
\end{array}
$$

übereinstimmend mit den Tafeln von Kulik. Da die obige Reihe mit wechselnden Zeichen convergirt, so liefern je zwei aufeinander folgende Zahlenwerthe zwei Grenzen, zwischen denen s_1. liegt, und ist also eine Restuntersuchung überflüssig. SCHLÖMILCH.

XXVII. Ueber die Gleichgewichtscurve einer proportional dem Wege ihres Angriffspunktes sich veränderten Kraft. Von ED. JAC. NOEGGERATH, Lehrer an der königl. Provinzial-Gewerbeschule in Saarbrücken.

1. Wenn eine veränderliche Kraft P_z in der Richtung ihres geradlinig fortschreitenden Angriffspunktes proportional dem zurückgelegten Wege abnimmt, so kann dieselbe in jeder Lage durch eine constante Kraft Q im Gleichgewicht erhalten werden. Die Richtung der constanten Kraft werde bei diesem Vorgange als unveränderlich angenommen und ausserdem vorausgesetzt, dass deren Angriffspunkt in einer Curve fortschreitet und mit dem Angriffspunkt der veränderlichen Kraft P_z durch einen gewichtlosen und undehnbaren Faden derartig verbunden ist, dass derselbe, von beiden Kräften angezogen, mit dem einen Endpunkt in der Richtung der Kraft P_z sich bewegt, während von dem anderen, sich auf der Curve bewegenden Endpunkt aus sich ein Fadenstück über einen festen Punkt dieser Curve als Sehne einspannt. Sei (Fig. 1) P_z die proportional dem Wege z abnehmende Kraft, a deren Angriffspunkt, BN die Führungscurve der constanten Kraft Q, d. h. die Gleichgewichtscurve der veränderlichen Kraft P_z, und seien A und B feste Punkte, über welche der die *Angriffspunkte* a und b verbindende Faden hingleitet. Bezeichnet alsdann

noch $AA_1 = r$ den Weg, während dem die Kraft P_z von P bis 0 abnimmt, und ist die Fadenlänge so abgemessen, dass, wenn der Angriffspunkt a sich in A_1 befindet, der Angriffspunkt b in B lief und in dieser Ausgangsstellung $P = Q$ ist, so folgt für den Werth P_z der veränderlichen Kraft nach einem Wege z die Bedingungsgleichung:

$$\frac{P_z}{Q} = \frac{r - z}{r},$$

und hieraus

$$1) \qquad P_z = \left(1 - \frac{z}{r}\right) Q.$$

Während der Angriffspunkt von a um dz vorrückt, wird daher die mechanische Elementararbeit

$$P_z \,.\, dz = \left(1 - \frac{z}{r}\right) Q \,.\, dz$$

von der veränderlichen Kraft verrichtet. Dabei bewegt sich die constante Gegenkraft Q mit ihrem Angriffspunkt durch ein Element der Curve, dessen Projection auf der Richtung von Q gleich dy ist, und verrichtet mechanische Arbeit:

$$Q \,.\, dy.$$

Das Gleichgewicht der Kräfte bedingt aber die Differentialgleichung:

$$\left(1 - \frac{z}{r}\right) Q \,.\, dz - Q \,.\, dy = 0,$$

woraus sich

$$dy = \left(1 - \frac{z}{r}\right) . \, dz,$$

$$\int dy = \int \left(1 - \frac{z}{r}\right) . \, dz,$$

$$y = \frac{2r - z}{2r} \,.\, z + C,$$

Fig. 1.

und indem man das Integral von 0 bis z erstreckt:

$$2) \qquad y = \frac{2r - z}{2r} \, z,$$

ergiebt. Aus dieser Gleichung folgt, dass y für $z = r$ ein Maximum wird, und alsdann

$$y = \frac{r}{2},$$

d. h. die Ordinate des tiefsten Punktes der Curve gleich der halben Sehne ist, welche sich von diesem nach dem Anfangspunkt erstreckt.

Nimmt man die durch B gehende und auf der Richtung von Q normal stehende gerade Linie behufs Bestimmung der Gleichgewichtscurve BN

mittelst Polarcoordinaten als **Achse** und B als Pol an, so ist die Se
Radius-Vector und der von z mit der Achse gebildete Winkel (
Anomalie der Curve. Da nun

$$sin\,\varphi = \frac{y}{z},$$

also

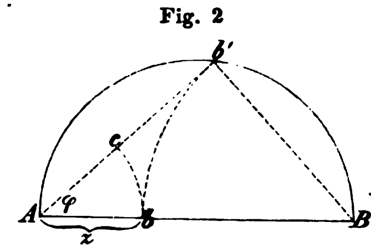
$$sin\,\varphi = \frac{2r - z}{2r},$$

so folgt unmittelbar für die Curve die Polargleichung:

$$3) \qquad z = 2r\,(1 - sin\,\varphi).$$

Die Linie dieser Gleichung ist aber die **Epicycloide**, bei we
Grund- und Erzeugungskreis gleich sind und den Radius r haben, un(
ihrer herzförmigen Gestalt halber, den Namen **Cardioide** erhalten
Der als Pol angenommene Punkt B (Fig. 2) ist dabei der beschreil

Fig. 2



Punkt des Erzeugungskreises in s
Ausgangslage auf dem Grundkreise
die Achse ist die Tangente in di
Punkt an den Grundkreis. Eine ein
Construction für Punkte dieser (
folgt aus 3). Schlägt man nämlich
$AB = 2r$ einen Halbkreis, macht Al
$Bb' = Bb$ und zieht Ab', so ist der W
BAb' gleich φ und, wenn man $Ac = Ab$ macht, c ein Punkt der Curv

Zur näheren Bestimmung der für den vorliegenden Fall bemerl
werthen Eigenschaften der Cardioide bilden wir zunächst aus

$$z = 2r\,(1 - sin\,\varphi),$$

$$\frac{dz}{d\varphi} = -2r\,cos\,\varphi,$$

$$\frac{d^2 z}{d\varphi^2} = 2r\,sin\,\varphi,$$

und finden alsdann durch Substitution dieser Werthe in der allgem(
Gleichung des Krümmungsradius:

$$\varrho = \frac{\left[z^2 + \left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{z^2 + 2\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)^2 - z\,\frac{d^2 z}{d\varphi^2}}$$

für die Cardioide:

$$4) \left\{ \begin{aligned} \varrho &= \frac{[4r^2(1 - sin\,\varphi)^2 + 4r^2 cos^2\varphi]^{\frac{3}{2}}}{4r^2(1 - sin\,\varphi)^2 + 8r^2 cos^2\varphi - 4r^2(1 - sin\,\varphi)\,sin\,\varphi}, \\ &= \frac{4r\sqrt{2(1 - sin\,\varphi)^3}}{1 + sin^2\varphi - 2\,sin\,\varphi + 2\,cos^2\varphi - sin\,\varphi + sin^2\varphi}, \\ &= \tfrac{4}{3}\,r\sqrt{2(1 - sin\,\varphi)}, \end{aligned} \right.$$

und, wenn man berücksichtigt, dass aus

$$z = 2r(1 - \sin\varphi),$$

$$\frac{z}{r} = 2(1 - \sin\varphi)$$

folgt, und diesen Werth in 4) einsetzt:

5) $$\varrho = \tfrac{4}{3}\sqrt{rz}.$$

Aus 2) ergab sich für $z = r$

$$y = \frac{r}{2},$$

und aus 3) ergiebt sich für diesen Werth von z

$$\sin\varphi = \tfrac{1}{2},$$

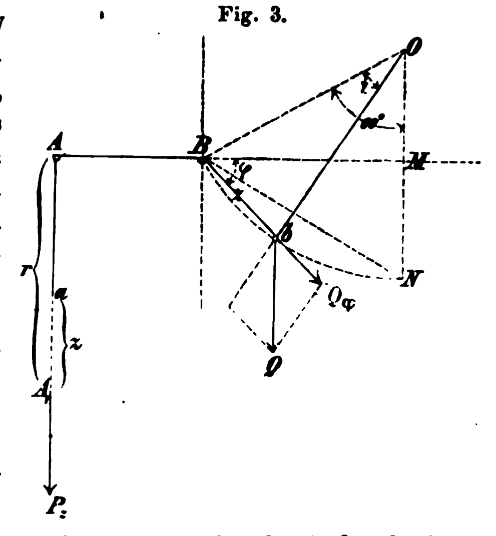
während 5) für den dadurch bestimmten Punkt

6) $$\varrho = \tfrac{4}{3}r$$

feststellt. Hieraus folgt denn aber, dass die nach dem tiefsten Punkt von dem Pol ausgehende Sehne der Cardioide mit der Achse einen Winkel von 30° bildet und der Krümmungsradius dieses Punktes der Curve gleich $\frac{4}{3}r$ ist.

2. Beschreibt man über der von dem Pol B nach dem tiefsten Punkt N des als Gleichgewichtscurve dienenden Cardioidenbogens BN (Fig. 3) ein gleichseitiges Dreieck BNO, so hat der Kreisbogen, welcher von der Ecke O dieses Dreiecks aus mit der Seite durch die beiden anderen Ecken B und N beschrieben wird, den höchsten und tiefsten Punkt mit dem Cardioidenbogen, diesen im letzteren Punkt berührend, gemein. Des letzteren Umstandes und der Eigenschaften des gleichseitigen Dreiecks halber folgt für beide Curven als gemeinsame Eigenschaft, dass die Sehne $BN = 2 . NH$, d. h. doppelt so gross, als die Entfernung des tiefsten Punktes N von der durch den höchsten Punkt B gehenden Achse ist.

Fig. 3.



Betrachtet man daher O als Aufhängepunkt eines Kreispendels, dessen Länge $OB = ON = r$ ist, so wird dasselbe, während der Angriffspunkt der Kraft P_z um r fortschreitet, einen Ausschlag von der höchsten bis zur tiefsten Stellung machen, wenn, wie im vorigen Falle, zwischen den Angriffspunkten a und b der veränderlichen Kraft P_z und ihres constanten

Gegengewichts Q ein gewichtloser und undehnbarer Faden ein ist. Die Componente Q_φ der Kraft Q, welche bei der durch den ' gegebenen Stellung des angespannten Fadens der veränderlichen entgegen wirkt, findet sich, wenn wir den Winkel, den in die das Pendel mit seiner Ausgangsstellung bildet, ψ nennen, mit Proportion:

$$Q_\varphi : Q = \sin(60^\circ - \psi) : \sin\left(90^\circ - \frac{\psi}{2}\right),$$

7) $$Q_\varphi = \frac{Q}{2} \frac{\cos\psi \cdot \sqrt{3} - \sin\psi}{\cos\frac{\psi}{2}}.$$

Berücksichtigt man, dass, wenn wir auch hier $Bb = z$ nennen,

$$\sin\frac{\psi}{2} = \frac{z}{2r},$$

$$\cos\frac{\psi}{2} = \frac{\sqrt{4r^2 - z^2}}{2r},$$

also

$$\sin\psi = \frac{z}{2r^2}\sqrt{4r^2 - z^2},$$

$$\cos\psi = \frac{2r^2 - z^2}{2r^2}$$

ist, so folgt aus jener Gleichung:

8) $$Q_\varphi = \frac{Q}{2} \cdot \frac{(2r^2 - z^2)\sqrt{3} - z\sqrt{4r^2 - z^2}}{r\sqrt{4r^2 - z^2}},$$

während sich bei der Cardioide die der Stellung z entsprechend Richtung der angespannten Sehne wirksame Componente des (wichts Q mittelst

$$P_z = \frac{r - z}{r} \cdot Q$$

ergab. Das Verhältniss beider Kräfte, in durch gleiche Sehnen b ten Stellungen, ist demnach

9) $$\frac{P_z}{Q_\varphi} = \frac{2(r - z)\sqrt{4r^2 - z^2}}{(2r^2 - z^2)\sqrt{3} - z\sqrt{4r^2 - z^2}},$$

oder, wenn $z = \frac{m}{n} r$, unter m und n ganze positive Zahlen versta setzt wird,

10) $$\frac{P_z}{Q_\varphi} = \frac{2(n - m)\sqrt{4n^2 - m^2}}{(2n^2 - m^2)\sqrt{3} - m\sqrt{4n^2 - m^2}}.$$

Wird $n = 10$ angenommen und werden für m die aufeinander f ganzen Zahlen von 0 bis 10 gesetzt, so erhält man für jenes V *folgende* Werthe:

m	$\frac{P_z}{Q\varphi}$
0	1,1547
1	1,1073
2	1,0626
3	1,0196
4	1,9786
5	0,9388
6	0,9000
7	0,8621
8	0,8246
9	0,7846
10	$\frac{0}{0}$

Diese Tabelle zeigt aber, dass zwischen 0,3 und 0,4 der Länge der Sehne vom höchsten bis zum tiefsten Punkt, d. h. zwischen 0,3 und 0,4 des Weges der veränderlichen Kraft, beim Kreispendel die thätige Componente des Gegengewichts gleich, unterhalb dieses Wegtheils kleiner und oberhalb desselben aber grösser ist, als zur Herstellung des Gleichgewichts bedingt wird, dass diese Differenzen innerhalb verhältnissmässig enger Grenzen schwanken und ein Kreispendel der vorbeschriebenen Art daher als eine näherungsweise functionirdende Vorrichtung zur Herstellung des Gleichgewichts bei einer proportional ihrem Wege abnehmenden Kraft, z. B. zur Compensation des Gewichts einer sich auf einem Rade aufwickelnden Kette, benutzt werden kann. Um zu ermitteln, bei welcher Stellung ein derartiges Pendel der gestellten Anforderung genügt, bei welcher Stellung desselben also

$$P_z = Q\varphi$$

ist, setzen wir

$$2(n-m)\sqrt{4n^2-m^2} = (2n^2-m^2)\sqrt{3} - m\sqrt{4n^2-m^2},$$

und bilden hieraus

$$(4n^2+m^2-4nm)(4n^2-m^2) = (2n^2-m^2)^2 \cdot 3,$$
$$(n^2+m^2)(n+m) - 3n^2m = nm(n+m),$$
$$m^3-3n^2m+n^3 = 0.$$

Dies gewährt für m eine reducirte cubische Gleichung und in deren Wurzel

$$m = 0,3472 \, . \, n$$

die Bestimmung der gesuchten Stellung. Dieser Werth zeigt nun, dass diese Stellung nahe an $\frac{1}{3}$ des Weges liegt, welcher vom Angriffspunkt der veränderlichen Kraft beschrieben wird.

Beschreibt man zu dem als Gleichgewichtscurve bedingten Cardioidenbogen BN (Fig. 4) die Evolute, benutzt den dem tiefsten Punkt N entsprechenden Punkt N' derselben als Aufhängepunkt eines Pendels von der Länge $NN' = \frac{4}{3}r$, dessen Faden sich an den Evolutenbogen $N'B$ anlegt, während der Angriffspunkt N auf dem Cardioidenbogen BN sich von N

nach B bewegt, und mit dem Gewicht $Q = P$ belastet ist, so erhält man in einem derartigen Cardioidenpendel eine absolut genaue Compensationsvorrichtung für eine von P bis 0 proportional ihrem Wege $BN = r$ abnehmende Kraft.

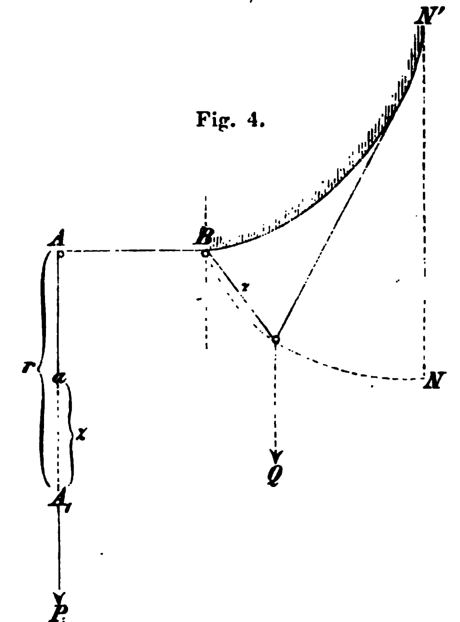


Fig. 4.

3. Wenn die Kraft P_z nicht proportional dem, von ihrem Angriffspunkt bei seinem Fortschreiten zurückgelegten Wege abnimmt, sondern proportional diesem Wege zunimmt, und zwar dabei von dem Werthe 0 bis P wächst, während der Weg $2r$ von ihrem Angriffspunkt zurückgelegt wird, so ist der Werth P_z, den die Kraft nach dem Wege z annimmt, bestimmt durch:

$$P_z = \frac{z}{2r} \cdot P$$

und wenn, auch hier unter Q das Gegengewicht verstanden, $P = nQ$ gesetzt wird,

$$P_z = \frac{nz}{2r} Q.$$

Hieraus folgt dann aber, als Bedingung des Gleichgewichts, mit Bezug auf Fig. 5,

$$\frac{nz}{2r} Q \cdot dz - Q \cdot dx = 0,$$

$$dx = \frac{n}{2r} z \cdot dz,$$

$$\int dx = \int \frac{n}{2r} z \cdot dz,$$

$$x = \frac{n}{4r} z^2 + C.$$

Da aber, wie unmittelbar aus der Figur 5 erhellt,

$$z^2 = x^2 + y^2,$$

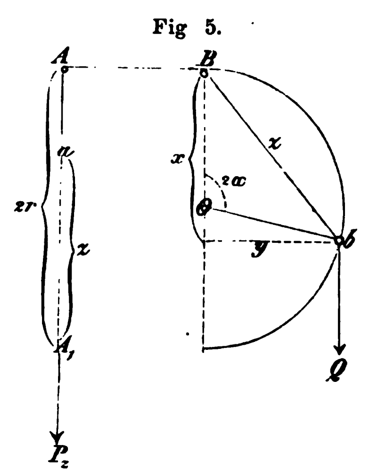
so ergiebt sich, indem man das Integral von 0 bis z erstreckt und diesen Werth für z^2 substituirt,

$$y^2 = x\left(2\frac{2r}{n} - x\right).$$

Dies ist aber Gleichung des Kreises vom Radius $\frac{2r}{n}$, dessen Peripherie *durch den Anfangspunkt* (Führungspunkt) B geht und dessen Mitte auf der

liegt, welche durch diesen Punkt parallel mit der Richtung der ichen Kraft P_z gezogen wird.

n der Angriffspunkt von Q auf herie dieses Kreises die tiefste ingenommen hat, so ist die Sehne dem Gesammtwege $2r$ der ver- ›n Kraft P_z. Bezeichnet 2α den ı z gehörigen Mittelpunktswinkel, emein:



$$z = 2\frac{2r}{n} \sin\alpha,$$

en tiefsten Punkt:

$$2r = 2 . \frac{2r}{n} \sin\frac{\pi}{2},$$

$$n = 2 \sin\frac{\pi}{2},$$

$$n = 2,$$

ırvorgeht, dass n zwischen den Grenzen 0 bis 2 gewählt werden

dem Umstande, dass die Cardioide, deren Bestimmungskreise den ıaben, Gleichgewichtscurve für eine Kraft ist, welche proportio- Wege von P bis 0 abnimmt, und dass der Kreis vom Radius r richtscurve für eine Kraft ist, welche proportional ihrem Wege P zunimmt, folgt, dass beide Curven Gleichgewichtscurven für sind, wie schon J. Bernoulli in anderer Weise dargethan hat. ıt man den Ausgangswerth der von P bis 0 proportional ihrem egten Wege abnehmende Kraft nicht gleich der constanten Ge- sondern gleich einem Vielfachen derselben, setzt also auch hier

$$P = nQ,$$

$$P_z = n\left(1 - \frac{z}{r}\right) Q,$$

s Bedingung des Gleichgewichts, mit Bezug auf Fig. 1

$$\left(1 - \frac{z}{r}\right) n . dz - dy = 0,$$

$$y = n\frac{2r - z}{2r} . z,$$

$$\frac{y}{z} = \sin\varphi,$$

ıs die Polargleichung der Curve

$$z = 2r\left(1 - \frac{1}{n}\sin\varphi\right).$$

mum von y liefert den tiefsten Punkt der Curve. Dies bedingt:

$$\frac{dy}{dz} = n - n\frac{z}{r} = 0,$$

$$z = r.$$

Für den tiefsten Punkt ergiebt sich daher die Anomalie aus der Gleichung

$$r = 2r\left(1 - \frac{1}{n}\sin\varphi\right)$$

durch

$$\sin\varphi = \frac{n}{2},$$

und hieraus der Maximalwerth von n auch in diesem Falle

$$n = 2.$$

XXVIII. Ueber arithmetische Progressionen von Primzahlen. — In den *Meditationes algebraicae* von Waring (Cantubr. 1770) werden ohne Beweis einige Sätze über Primzahlen ausgesprochen. Sie heissen folgendermassen: Stehen drei Primzahlen in arithmetischer Progression, so ist ihr Unterschied durch 6 theilbar, wenn nicht eine derselben die Zahl 3 ist; stehen 5 Primzahlen in arithmetischer Progession, so ist ihr Unterschied durch 30 theibar, wenn nicht eine derselben die Zahl 5 ist. Lagrange bewies beide Sätze in seiner Abhandlung über das gleichfalls ohne Begründung bei Waring zuerst veröffentlichte Wilson'sche Theorem (*Nouveaux Mémoires de l'académie de Berlin, anne* 1771, *pag.* 134 ff.), dehnte den Beweis, jedoch ohne ihn auszuführen, auf einen entsprechenden Satz über 7 Primzahlen aus und knüpfte sogar noch ein „und so weiter" daran. Trotzdem ist der allgemeine Satz meines Wissens noch nirgends ausgesprochen. Ich will ihn deshalb hier mittheilen und zugleich einen Beweis liefern, der sich von dem Lagrange'schen in vielen Beziehungen unterscheidet, wie er auch unabhängig von demselben entstanden ist. Der Satz selbst heisst:

> Ist p eine Primzahl und $2, 3, 5, 7 \ldots p$ das Product sämmtlicher Primzahlen bis zu p, so lässt sich keine arithmetische Progression von p Primzahlen, unter welchen die p selbst sich nicht befindet, aufstellen, ohne dass die Differenz der Progression durch jenes Product theilbar wäre.

Setzt man in diesen Satz $p = 2$, so nimmt er die ohne Weiteres einleuchtende Gestalt an: die Differenz zweier Primzahlen, unter welchen die 2 nicht ist, welche also beide ungerade sind, ist durch 2 theilbar, d. h. gerade.

Wird $p = 3$ und $p = 5$ gesetzt, so entstehen die von Waring, bei $p = 7$ der von Lagrange bemerkte Specialfall.

Zum näheren Beweise des Satzes mögen einige Bezeichnungen und Benennungen hier eingeführt werden. So oft von einer Progression die

Rede ist, soll immer eine arithmetische Progression gemeint sein, deren sämmtliche Glieder Primzahlen sind. Die unmittelbar nach p in der Zahlenreihe folgende grössere Primzahl heisse q. Das Product der Primzahlen $2, 3, 5 \dots p$ soll durch $\Pi_{(p)}$, also auch das Product $2, 3, 5 \dots p \cdot q = q \cdot \Pi_{(p)}$ durch $\Pi_{(q)}$ bezeichnet werden. Die Differenz einer $p$gliedrigen Progression, in welcher p selbst nicht vorkommt, soll D_p heissen. Kommt hingegen p in der $p$gliedrigen Progression vor, so soll die Differenz d_p heissen.

Der zu beweisende Lehrsatz hat nun zwei Seiten, eine positive und eine negative. Letztere ist an sich einleuchtend. Denn da sowohl $p + n \cdot \Pi_{(p)}$ als $p - n \cdot \Pi_{(p)}$ durch p theilbar und somit keine Primzahlen sind, so kann unmöglich $d_p = n \cdot \Pi_{(p)}$ sein.

Die positive Seite des Satzes zerfällt wieder in zwei Theile, in die Untersuchung von D_p und von d_p. Es ergab sich, dass bei $p = 2$ in der That D_2 durch $\Pi_{(2)}$ theilbar ist. Der Satz sei nun richtig bis zur Primzahl p, und es soll daraus bewiesen werden, dass auch

$$D_q \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(q)}).$$

Die erste Primzahl in der jetzt $q$gliedrigen Progression ist jedenfalls durch q untheilbar, also $\equiv \alpha \ (mod\ q)$, wo α eine der Zahlen $1, 2, 3 \dots (q-1)$ bedeutet. D_q dagegen ist, wenn auch vielleicht nicht durch $\Pi_{(q)}$, doch jedenfalls durch $\Pi_{(p)}$ theilbar, wie im Zusammenhange mit der Erforschung d_p nachher gezeigt werden soll. Man kann somit behaupten

$$D_q \equiv \beta \cdot \Pi_{(p)} \ (mod\ \Pi_{(q)}),$$

wo β eine der Zahlen $0, 1, 2, 3 \dots (q-1)$ bedeutet.

Nun würde $\beta = 0$ die Wahrheit unseres Satzes anerkennen. Alle anderen Werthe von β enthalten aber einen Widerspruch in sich. Diese anderen Werthe lassen nämlich, da sowohl $\beta \cdot (\Pi_{(p)}$ als $1, 2, 3 \dots (q-1)$ gegen q relative Primzahlen sind, nach einem der ersten Sätze aus der Lehre von den Congruenzen

$$\beta \cdot \Pi_{(p)},\ 2\beta \cdot \Pi_{(p)},\ 3\beta \cdot \Pi_{(p)} \dots (q-1)\beta \cdot \Pi_{(p)}$$

sämmtlich für den Modulus q incongruent sein. D. h. die Vielfachen der Differenz D_q, nämlich

$$1 \cdot D_q,\ 2 \cdot D_q,\ 3 \cdot D_q \dots (q-1) D_q,$$

entsprechen für den Modulus q, wenn auch nicht in derselben Reihenfolge den Zahlen

$$1,\ 2,\ 3 \dots (q-1).$$

Welcher Zahl

$$(q-1),\ (q-2),\ (q-3) \dots 1$$

also auch der Rest α des ersten Gliedes der Progression gleichkommt, irgend ein folgendes Glied muss durch q theilbar sein, ist also keine Primzahl mehr. Demnach kann nur $\beta = 0$, d. h. D_q durch $\Pi_{(q)}$ theilbar sein.

Es bleibt noch der Nachweis der dabei gemachten Voraussetzung $D_q \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(p)})$ übrig.

Gehen wir wieder von der Primzahl 2 aus, so ist offenbar
$D_2 \equiv 0 \ (mod\ 2)$, $d_2 \equiv 1 \ (mod\ 2)$.

In den Progressionen von zwei Gliedern, in welchen die 2 vorkommt, kann sie entweder die zweite Stelle einnehmen (1—2), oder die erste (z. B. 2—13).

In Bezug auf die Primzahl 3 wird die Progression 1—2—3 (die einzige mehr als zweigliedrige, in welcher auch die 2 vorkommt) einen eigenthümlichen Ausnahmefall in mehr als einer Beziehung bilden. In allen übrigen Fällen muss

$$D_2 \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(2)}),$$

also auch

$$D_3 \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(3)})$$

sein, und gleichfalls mit Ausnahme jener einen Progression ist

$$d_3 \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(2)}).$$

Unter den dreigliedrigen die 3 enthaltenden Progressionen giebt es eine, in welcher die 3 an letzter Stelle steht: 1—2—3, eine, in welcher sie an zweiter Stelle steht und welche auch noch auf vier Stellen ausgedehnt werden kann: 1—3—5—7, in allen übrigen nimmt die 3 nothwendig die erste Stelle ein. Da nun D_3 von d_3 wesentlich verschieden ist, so kann 3 keine viergliedrige Progression beginnen, also sicher in keiner fünfgliedrigen vorkommen, ebensowenig wie in einer solchen die 2 enthalten sein kann.

So ergiebt sich auch für die Primzahl 5, dass, mit Ausnahme jener zweiten exceptionellen Progression 1—3—5—7, immer D_5 durch $\Pi_{(3)}$, also auch durch $\Pi_{(5)}$ und d_5 durch $\Pi_{(3)}$ theilbar ist, sowie dass jede fünfgliedrige die 5 enthaltende Progression mit dieser Primzahl beginnen muss, dass also endlich keine mehr als fünfgliedrige Progression die Primzahlen 2, 3, 5 enthalten kann.

Denken wir uns auch diese Sätze weiter fortgeführt bis zur Primzahl p, so dass D_p durch $\Pi_{(p)}$ theilbar und p in keiner mehr als $p$gliedrigen Progression vorkommen kann, so wenig wie die vorhergehenden Primzahlen 2, 3, 5... Daraus folgt zunächst $D_q \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(p)})$, also auch $D_q \equiv 0$ $(mod\ \Pi_{(q)})$ und $d_q \equiv 0 \ (mod\ \Pi_{(p)})$. In Bezug auf die q enthaltenden Progressionen von q Gliedern waltet noch der Zweifel, ob diese Primzahl an erster oder zweiter Stelle stehen wird, da ja nicht bewiesen worden ist, dass die 1 in dieser Progression nicht vorkommen könne. Die Frage, unter welcher Bedingung die q an zweiter Stelle sich befinden kann, lässt sich sogar beantworten.

Nämlich unter dieser Voraussetzung, dass 1 das erste, q das zweite Glied der Progression wäre, ist

$$d_q = q - 1,$$

folglich $q-1$ durch $\Pi_{(p)}$ theilbar, folglich sicherlich

$$q - 1 > \Pi_{(p)}.$$

Ferner hat schon Euclid bewiesen, dass $\Pi_{(p)}+1$ gegen jede, das Product $\Pi_{(p)}$ bildende Primzahl theilerfremd, also selbst Primzahl oder wenigstens nur durch höhere Primzahlen als p theilbar ist. Da aber q die nächst höhere Primzahl, so muss

$$\Pi_{(p)}+1 \geqq q$$

sein. Diese beiden Bedingungen sind gleichzeitig nur durch

$$q = 2, 3, 5 \ldots p+1$$

zu erzielen. Wenn es also möglich sein sollte, dass eine $q$gliedrige Progression statt mit q mit 1 und dann erst q anfinge, so kann es nur dann eintreten, wenn die auf p in der Zahlenreihe folgende nächst höhere Primzahl $q = \Pi_{(p)}+1$ wäre, ein Fall, der sehr unwahrscheinlich klingt, wiewohl der Beweis seiner Unmöglichkeit mir nicht gelungen ist.

Keinesfalls würde diese Möglichkeit an der Richtigkeit unseres Hauptsatzes etwas ändern. Denn wenn q das zweite Glied einer $q$gliedrigen Progression ist, so kann es wegen der Verschiedenheit von D_q und d_q doch höchstens in einer $(q+1)$ gliedrigen Progression vorkommen, in einer $(q+2)$ gliedrigen schon nicht mehr, während die auf q folgende nächst höhere Primzahl $r \geqq q+2$ sein muss, und es ja bei dem Gange des Beweises nur darauf ankommt, dass weiter in der $r$gliedrigen Progression die 2, 3, 5 ... p, q nicht vorkommen können.

Ein hier sich anschliessender Satz, dessen strenger Beweis mir bisher noch nicht gelungen ist, heisst: Drei auf einander folgende Primzahlen p, q, r, unter welchen die 3 sich nicht befindet, können nicht in arithmetischer Progression stehen. Die Ausnahme wurde natürlich der auch hier wieder auftretenden Reihen 1—2—3 und 3—5—7 wegen ausgesprochen.

Cantor.

XXIX. Darstellung des Sauerstoffgases von H. Sainte-Claire Deville und H. Debray.

Die genannten Gelehrten empfehlen zur öconomischen Darstellung des Sauerstoffgases das schwefelsaure Zinkoxyd, welches man ja bei galvanischen Apparaten in so grossen Quantitäten als Nebenproduct erhält und an dessen zweckmässige Verwendung sich bekanntlich die Frage über die Anwendung der galvanischen Apparate als Motoren anknüpft. Das schwefelsaure Zinkoxyd zersetzt sich nämlich bei einer Temperatur, die die Zersetzungstemperatur des Braunsteins nur um weniges übersteigt, vollständig in weisses leichtes Zinkoxyd, in schweflige Säure und freien Sauerstoff. Leitet man das in einem geschlossenen Raume erzeugte Gasgemisch durch einen Waschapparat voll Natronlauge, so erhält man doppelt schwefelsaures Natron, was man zur Herstellung von unterschwefligsaurem Natron benutzen kann, man kann das durch Waschen mit Natronlauge rein erhaltene Sauerstoffgas zu irgend einem industriellen Zwecke benutzen, während das beim Erhitzen zurückbleibende Zinkoxyd möglicher

Weise eine Verwendung als Zinkweiss finden kann. So scheint denn nun die billige Anwendung galvanischer Ströme für diejenigen Etablissements möglich zu sein, die eine nützliche Anwendung von Sauerstoffgas zu machen wissen. (Zeitschr. f. Chemie u. Pharmacie, IV.)

XXX. Neues Metall. — Auf spectralanalytischem Wege hat Bunsen ein neues Metall entdeckt, welches sich in den Kreutznacher und Dürkheimer Soolquellen und in der Thermalquelle Ungemach zu Baden-Baden vorfindet. Bunsen hat demselben den Namen Caesium von *caesius* (blaugrau) gegeben, weil es zwei blaue Spectrallinien erzeugt. Der Entdecker hat bereits 30° Caesiumchlorid dargestellt, so dass man bald auf weitere Mittheilungen hoffen kann. (Zeitschr. f. Chemie u. Pharmacie, IV.) Aus einem späteren Briefe Bunsen's theilt Roscoe (*Chem. News* 1861, 155) folgende Stelle mit: „Die Substanz, welche ich Ihnen als unreines Caesiumtartrat geschickt habe, enthält ein zweites neues Alkalimetall. Ich bin eben damit beschäftigt, seine Verbindungen darzustellen und werde Ihnen bald eine ausführliche Mittheilung darüber machen. Das Spectrum des neuen Metalls besteht aus zwei violetten Linien, welche zwischen der Strontium δ- und Kalium β-Linie liegen."

XXXI. Ueber die Existenz eines vierten Metalls der Calciumgruppe. — F. W. und A. Dupré (*Chem. News* 1861, 116) geben an, dass sie in dem Quellwasser aus grösserer Tiefe ein solches Metall mit Hilfe des Spectralapparats aufgefunden haben. Dasselbe bringe zwischen der Strontium δ- und der Kalium β-Linie eine mit der Strontium δ-Linie in Bezug auf Glanz und Schärfe rivalisirende blaue Linie hervor. (Die Lage dieser einen blauen Linie wäre demnach eine ähnliche, wie die der zwei violetten Linien, welche das neueste, von Bunsen entdeckte Alkalimetall hervorbringt.) Es ist den Verfassern nicht gelungen, die Verbindungen des neuen Metalls von Calciumverbindungen vollkommen rein darzustellen.

W. Crookes (*Chem. News* 1861, 129) macht hierzu die Bemerkung, er habe bei seinen Spectralbeobachtungen während der letzten acht Jahre gelegentlich bemerkt, dass das Calciumspectrum eine blaue Linie enthalte. Er habe jetzt, veranlasst durch die Publication der Herren Dupré, mit einem vollkommenen Spectralapparat Kalksalze von dem verschiedensten Vorkommen untersucht und gefunden, dass alle eine blaue Linie zwischen Strontium δ und Kalium β erzeugen, die ungefähr zwei Mal so weit entfernt von der ersten, als von der letzten erscheint. Diese Linie sei, wie die Herren Dupré angeben, in Glanz und Schärfe mit Strontium δ übereinstimmend. Er glaubt aus seinen Versuchen schliessen zu dürfen, dass diese blaue Linie einen integrirenden Bestandtheil des Calciumspectrums ausmache.

Schliesslich warnt der Verfasser die Experimentatoren davor, dass sie sich zu viel auf die chromolithographischen Abbildungen der Spectren, welche in dem *Philosophical Magazine* abgedruckt sind, verlassen. Abgesehen von den Unterschieden in der Erscheinung eines Metallspectrums, welche durch die Verschiedenheit in der Intensität des Lichts und in dem Durchmesser des Spalts verursacht werden, müsse Jeder, der einmal die glänzenden Linien durch ein gutes Instrument gesehen habe, vollkommen die Hoffnung aufgeben, dieselben — besonders lithographisch — abbilden zu können. Bunsen's und Kirchhoff's Beschreibung und Illustrationen seien, so weit sie gingen, ausgezeichnet, sie hätten aber bei weitem nicht den Gegenstand erschöpft. Ein aufmerksamer Beobachter würde leicht noch Linien und andere Erscheinungen bemerken, deren sie nicht erwähnt hatten, welche aber jedenfalls in solche Abbildungen aufgenommen werden müssten, wenn dieselben die Spectra mit einiger Genauigkeit wiedergeben sollten. Er sei im Augenblick mit der Darstellung solcher Abbildungen beschäftigt und werde sie mittheilen, sobald sie vollendet seien.

(Zeitschr. f. Chemie u. Pharmacie, IV.)

XXXII. Ueber die Darstellung fester Kohlensäure. — A. Loir und Ch. Drion (*Comp. rend. LII*, 748), welche früher (2. Juni 1860) schon mittheilten, dass man unter gewöhnlichem Atmosphärendruck Kohlensäure bei der Temperatur, welche flüssiges Ammoniak beim Verdunsten im luftleeren Raume erzeugt, flüssig erhalten könne, haben gezeigt, dass man mit Hilfe des Ammoniaks auch feste Kohlensäure darstellen kann, wenn man bei einem Druck von 3 bis 4 Atmosphären arbeitet. Sie bedienen sich folgender Manipulation. Man bringt in eine nach oben offene Glasglocke 150 CC. flüssiges Ammoniak, der Rand der Glasglocke wird in einen Metallring eingekittet, auf welchen eine mit zwei Oeffnungen versehene Platte genau aufgepasst ist. In die mittlere Oeffnung wird eine unten geschlossene Glasröhre befestigt, welche bis auf den Boden der Glocke reicht. Die andere Oeffnung wird mit einer Luftpumpe in Verbindung gesetzt. Die Kohlensäure, welche man in einem Kolben, dessen Hals mit Chlorcalciumstücken angefüllt ist, durch Erhitzen von doppeltkohlensaurem Natrium erzeugt wird, durch ein Bleirohr in die in das flüssige Ammoniak tauchende Glasröhre eingeleitet. Mit dem Kolben steht ein Manometer mit comprimirter Luft in Verbindung. Aus dem Apparat wird vorher die Luft entfernt, und wenn die Temperatur bis in die Nähe des Erstarrungspunktes der Kohlensäure gesunken ist, so beginnt man mit der Kohlensäureentwickelung, indem man dafür sorgt, dass beständig ein Druck von 3 bis 4 Atmosphären erhalten bleibt. Nach einer halben Stunde ist der Theil des Glasrohrs, welcher in das Ammoniak untertaucht, mit einer dicken Krystallkruste erfüllt (ungefähr 50 Gramme wiegend).

Die so erhaltene feste Kohlensäure ist farblos und durchsichtig wie

Eis. Sie kann leicht mit einem Glasstab von den Wänden des Verdichtungsrohrs abgestossen werden. Man erhält dabei 3 bis 4 Millimeter grosse cubische Krystalle, welche an der Luft langsam gasförmig werden, ohne einen Rückstand zu hinterlassen. Auf der Hand bringen sie weder ein Gefühl von Kälte, noch von Wärme hervor. Sie lassen sich schwierig mit den Fingern festhalten. Bei geringem Drücken entschlüpfen sie, als wären sie mit einer fetten Materie überzogen. Wenn es gelingt, zwischen Daumen und Zeigefinger einen Krystall festzuhalten, so empfindet man ein unerträgliches Brennen.

Die Krystalle in einem kleinen Porzellantiegel mit Aether gemischt, erzeugen eine Kälte von — 81°.

Das bei den Versuchen angewendete flüssige Ammoniak wurde nach der Methode von Bussy in einem Kolben, welcher mit flüssiger schwefliger Säure umgeben war, die mit der Luftpumpe verflüchtigt wurde, dargestellt. Man kann nach dieser Methode leicht in weniger als zwei Stunden nahezu zwei Deciliter flüssiges Ammoniak erhalten.

Die Temperaturen wurden mit einem Alkoholthermometer mit zwei bestimmten Punkten (0° bei schmelzendem Eis und — 40° bei schmelzendem Quecksilber) gemessen. (Zeitschr. f. Chemie u. Pharmacie, IV.)

XXXIII. Beiträge zur Kenntniss der Gesetze der Gasabsorption von T. H. Sims. (*Q. J. of Ch. Soc. XIV*, 1.)

Sims hat im Laboratorium von Roscoe eine ausführliche Untersuchung über die Absorption der schwefligen Säure und des Ammoniaks durch Wasser angestellt; wir theilen im Folgenden die Resultate derselben mit.

Die Methoden waren im Wesentlichen die von Roscoe und Dittmar*) bei ihrer Untersuchung über die Absorption des Chlorwasserstoffs und des Ammoniaks in Wasser angewandten: Einige Gramme Wasser wurden in einem Kugelapparat von bekanntem Gewicht und Rauminhalt bei der verlangten Temperatur mit Gas von der gewünschten Spannkraft gesättigt, der Apparat wurde zugeschmolzen und unter Beobachtung von Thermometer- und Barometerstand gewogen. Die Gesammtmenge des eingeschlossenen Gases wurde auf chemischem Wege ermittelt und der Theil desselben, welcher am Ende der Sättigung den leeren Theil des Apparates ausfüllte, wurde aus der Capacität des letzteren, dem speciellen Gewicht des Gases und aus dem annähernd bekannten Volumen der gesättigten Flüssigkeit berechnet.

1) Schweflige Säure. Schönfeld hat bereits vor mehreren Jahren die Löslichkeit dieses Gases in Wasser bei gewöhnlichem Druck für

*) *Ann. Chem. Pharm. CXII*, 327.

eine Reihe von Temperaturen bestimmt*). Derselbe Chemiker hat auch die Absorption von Gemischen aus schwefliger Säure und weniger löslichen Gasen durch Wasser untersucht und aus seinen Versuchen den Schluss gezogen, dass schweflige Säure oberhalb +10° C. dem Absorptionsgesetze gehorche. Die von Schönfeld beigebrachten experimentellen Belege können indessen nicht als entscheidend angesehen werden, da sie nur wenig zahlreich sind und bei allen hierher gehörigen Bestimmungen der Druck der schwefligen Säure immer nur indirect, d. h. durch Verdünnen mit einem zweiten Gase geändert wurde. Der Verfasser hat deshalb, um die Frage zur Entscheidung zu bringen, ob das Absorptionsgesetz auf die schweflige Säure anwendbar sei, die Löslichkeit dieses Gases in Wasser bei vier verschiedenen Temperaturen und jedes Mal für eine Reihe von direct hervorgebrachten Tensionen bestimmt. Ein Strom luftfreier schwefliger Säure von beliebiger Spannung wurde sehr zweckmässig vermittelst eines Vorraths flüssiger schwefliger Säure hergestellt. Die Analysen wurden, unter Beobachtung der von Bunsen angegebenen Vorsichtsmassregeln, mittelst Jodlösung ausgeführt. Die Stärke der letzteren wurde mittelst abgewogener Mengen verflüssigter SO_2 festgestellt.

Die Resultate sind im Folgenden tabellarisch zusammengestellt. P bedeutet den partiellen Druck des Gases in Millimetern Quecksilberhöhe, G die zur Sättigung der Gewichtseinheit Wasser bei der Temperatur t^0 Cent. nöthige Gewichtsmenge schwefliger Säure. Aus den unmittelbaren Versuchsresultaten wurden durch graphische Interpolation vollständige Tabellen abgeleitet. G' bedeutet den durch Abmessen an der Curve gefundenen Werth von G.

1. Temperatur = 7°0 Cels.

a.				b.					
P	G	$G.\frac{760}{P}$	G'	P	G'	P	G'	P	G'
27,0	0,010	0,273	0,010	30	0,010	220	0,055	750	0,174
49,8	0,015		0,015	40	0,013	240	0,059	760	0,176
89,6	0,025		0,025	50	0,015	260	0,064	800	0,185
133,7	0,035		0,035	60	0,017	280	0,069	850	0,196
239,0	0,059		0,059	70	0,020	300	0,073	900	0,207
741,8	0,173	0,177	0,172	80	0,022	350	0,085	950	0,218
757,1	0,174		0,176	90	0,025	400	0,096	1000	0,229
770,8	0,178		0,179	100	0,027	450	0,107		
986,3	0,228		0,226	120	0,032	500	0,118	1100	0,251
1201,0	0,293	0,172	0,293	140	0,036	550	0,130	1200	0,273
				160	0,041	600	0,141	1300	0,295
				180	0,046	650	0,152		
				200	0,050	700	0,163		

*) *Ann. Chem. Pharm.* XCV, 1.

2. Temperatur = 20°0 Cels.

a.				b.			
P	G	$G.\frac{760}{P}$	G'	P	G'	P	G'
32,4	0,006	0,148	0,006	40	0,007	300	0,044
50,1	0,009		0,009	50	0,009	350	0,050
65,0	0,011		0,011	60	0,011	400	0,059
77,3	0,013		0,013	70	0,012	450	0,064
78,4	0,013		0,013	80	0,013	500	0,071
82,2	0,014		0,014	90	0,015	550	0,077
121,8	0,020		0,019	100	0,016	600	0,083
291,0	0,043		0,043	120	0,019	650	0,090
446,6	0,064		0,064	140	0,022	700	0,096
658,2	0,094	0,108	0,091	160	0,025	750	0,103
728,9	0,100		0,100	180	0,028	760	0,104
729,5	0,100		0,100	200	0,030	800	0,110
730,8	0,100		0,100	220	0,033	1000	0,137
1570,0	0,218		0,214	240	0,036	1300	0,178
1911,0	0,260	0,104	0,260	260	0,038	1600	0,218
				280	0,041	1900	0,259

3. Temperatur = 39°8 Cels.

a.				b.			
P	G	$G.\frac{760}{P}$	G'	P	G'	P	G'
205,9	0,017	0,062	0,017	200	0,016	760	0,059
293,1	0,023		0,023	300	0,024	800	0,062
696,0	0,054		0,054	400	0,031	1000	0,077
697,6	0,054		0,054	500	0,039	1500	0,113
701,6	0,053	0,055	0,053	600	0,047	2000	0,149
1565,0	0,116		0,118				
2021,0	0,150	0,056	0,150				

4. Temperatur = 50°0 Cels.

a.				b.			
P	G	$G.\frac{760}{P}$	G'	P	G'	P	G'
191,5	0,011	0,045	0,011	200	0,012	800	0,047
664,0	0,039	0,045	0,039	400	0,024	1000	0,059
1961,0	0,115	0,044	0,120	600	0,035	1500	0,088
				760	0,045	2000	0,112

Aus dieser Zusammenstellung ist ersichtlich, dass die von einer bestimmten Menge Wasser bei constanter Temperatur absorbirte Menge SO_2 dem partiellen Druck dieses Gases im Allgemeinen nicht proportional ist. Die Abweichungen vom Absorptionsgesetze sind indessen um so geringer, je höher die Temperatur; der Werth $G.\frac{760}{P}$ ist bei 7° und bei 20° sehr veränderlich, bei 39°8 wieder nahezu, bei 50° so gut wie völlig constant. —

Aus den Tabellen 1,b 2,b 3,b und 4,b wurde mit Hilfe einer weiteren graphischen Interpolation noch die folgende Tabelle abgeleitet, welche die bei dem constanten partiellen Gasdruck von 760mm von der Gewichtseinheit Wasser absorbirte Gewichtsmenge Gas (G') giebt. V bedeutet das Volumen, welches G' Gewichtstheile Gas bei 0° und 760mm Druck einnehmen, das Volumen der Gewichtseinheit Wasser bei + 4° als Volumeneinheit genommen*).

$P = 760^{mm}$.

t	G'	V	t	G'	V
8°	0,168	58,7	30°	0,078	27,3
10	0,154	53,9	32	0,073	25,7
12	0,142	49,6	34	0,069	24,3
14	0,130	45,6	36	0,065	22,8
16	0,121	42,2	38	0,062	21,6
18	0,112	39,3	40	0,058	20,4
20	0,104	36,4	42	0,055	19,3
22	0,098	34,2	44	0,053	18,4
24	0,092	32,3	46	0,050	17,4
26	0.087	30,5	48	0,047	16,4
28	0,083	28,9	50	0,045	15,6

Die in dieser Tabelle enthaltenen Zahlen stimmen nicht genau mit den von Schönfeld gegebenen überein; es ist jedoch zu berücksichtigen, dass Schönfeld seine direct gefundenen Zahlen, unter Voraussetzung der Giltigkeit des Absorptionsgesetzes, auf 760mm Druck reducirt und dass er dabei versäumte, die Tension des Wasserdampfes von den beobachteten Barometerständen in Abzug zu bringen.

Der Inhalt der obigen Tabelle wird annähernd durch die folgende, von Clifton berechnete Formel wiedergegeben:

$$G.\frac{760}{P} = \frac{2540}{t} - \frac{9250}{t^2} + \frac{100}{P}\left(\frac{10338}{t^2} - \frac{62760}{t^3}\right),$$

wie dies aus der folgenden Zusammenstellung einiger nach dieser Formel

*) 1 Liter $SO_2 = 2,861$ Gr.

berechneten Werthe von $G \cdot \frac{760}{P}$ mit den durch graphische Interpolation haltenen hervorgeht.

P	7° C.		20° C.		40° C.		50° C.	
	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.	Ber.	Gef.
40,0	0,245	0,242	0,149	0,143				
50,0	0,231	0,223	0,140	0,138				
100,0	0,203	0,205	0,122	0,124				
200,0	0,189	0,191	0,113	0,116	0,061	0,062	0,049	0,045
500,0	0,181	0,180	0,108	0,107	0,059	0,059	0,049	0,045
800,0	0,175	0,176	0,108	0,104	0,058	0,059	0,048	0,045
1000,0	0,178	0,174	0,106	0,104	0,058	0,058	0,048	0,045
1200,0	0,177	0,173	0,105	0,104	0,058	0,057	0,048	0,045
1800,0			0,105	0,104	0,058	0,057	0,048	0,044
2000,0			0,105	0,104	0,058	0,057	0,048	0,044

2) **Ammoniak.** Roscoe und Dittmar haben in ihrer oben ci ten Arbeit nachgewiesen, dass die bei 0° von einer bestimmten Me Wasser absorbirte Gewichtsmenge Ammoniak dem partiellen Drucke Gases nicht einmal annähernd proportional ist. Die Beziehungen, wel bei höheren Temperaturen bestehen, lassen sich aus der Arbeit di Chemiker nicht entnehmen, da dieselben zwar Bestimmungen bei Ten raturen über 0°, aber diese immer nur bei gewöhnlichem Drucke ausgefi haben. Herr Schönfeld hat nun auch für die Temperaturen 20, 40 100° die Löslichkeit des Ammoniaks in Wasser jedes Mal für eine R von Drucken ermittelt, und er ist dabei zu folgenden Resultaten gela

a. Directe Versuchsresultate.

1. $t = 20^0$.			2. $t = 40^0$.			3. $t = 100^0$.		
P	G	$G \cdot \frac{760}{P}$	P	G	$G \cdot \frac{760}{P}$	P	G	$G \cdot \frac{760}{P}$
45,5	0,100	1,666	75,8	0,050	0,497	688,4	0,067	0,074
206,1	0,236		184,3	0,112		1078,0	0,104	0,073
735,4	0,508		701,1	0,322		1419,0	0,135	0,073
1525,0	0,811		1590,0	0,522				
2076,0	1,018	0,373	2129,0	0,590	0,214			

b. Aus graphischen Interpolationen abgeleitete Tabellen.

1.

P	20° C.		40° C.		100° C.	
	G'	$G'.\frac{760}{P}$	G'	$G'.\frac{760}{P}$	G'	$G'.\frac{760}{P}$
60	0,119	1,513				
80	0,141		0,052	0,479		
100	0,158		0,064			
120	0,173		0,076			
140	0,187		0,088			
160	0,202		0,099			
180	0,217		0,109			
200	0,232		0,120			
250	0,266		0,145			
300	0,296		0,168			
350	0,325		0,191			
400	0,353		0,211			
450	0,378		0,232			
500	0,403		0,251			
550	0,425		0,269			
600	0,447		0,287			
650	0,470		0,304			
700	0,492		0,320		0,068	0,074
750	0,514		0,335		0,073	0,074
760	0,518	1,518	0,338	0,338	0,074	0,074
800	0,535		0,349		0,078	0,074
850	0,556		0,363		0,083	0,074
900	0,574		0,378		0,088	0,074
950	0,594		0,391		0,092	0,073
1000	0,613		0,404		0,096	0,073
1050	0,632		0,414		0,101	0,073
1100	0,651		0,425		0,106	0,073
1150	0,669		0,434		0,110	0,073
1200	0,685		0,445		0,115	0,073
1250	0,704		0,454		0,120	0,073
1300	0,722		0,463		0,125	0,073
1350	0,741		0,472		0,130	0,073
1400	0,761		0,479		0,135	0,073
1450	0,780		0,486			
1500	0,801		0,493			
1600	0,842		0,511			
1700	0,881		0,530			
1800	0,919		0,547			
1900	0,955		0,565			
2000	0,992	0,377	0,579			
2100			0,594	0,215		

2.

$P = 760.$			
t	G'	t	G'
0° C.	0,899	52° C.	0,274
2 „	0,853	54 „	0,265
4 „	0,809	56 „	0,256
6 „	0,765	58 „	0,247
8 „	0,724	60 „	0,238
10 „	0,684	62 „	0,229
12 „	0,646	64 „	0,220
14 „	0,611	66 „	0,211
16 „	0,578	68 „	0,202
18 „	0,546	70 „	0,194
20 „	0,518	72 „	0,186
22 „	0,490	74 „	0,178
24 „	0,467	76 „	0,170
26 „	0,446	78 „	0,162
28 „	0,426	80 „	0,154
30 „	0,408	82 „	0,146
32 „	0,393	84 „	0,138
34 „	0,378	86 „	0.130
36 „	0,363	88 „	0,122
38 „	0,350	90 „	0,114
40 „	0,338	42 „	0,106
42 „	0,326	94 „	0,098
44 „	0,315	96 „	0,090
46 „	0,304	98 „	0,082
48 „	0,294	100 „	0,074
50 „	0,284		

Ein Blick auf diese Tabellen zeigt, dass der Werth $G.\frac{760}{P}$ bei 20° un 40° sehr veränderlich, bei 100° aber nahezu constant ist. Bei dieser let teren Temperatur ist also das Absorptionsgesetz auch auf Ammoniak Wasser anwendbar. (Zeitschr. f. Chemie u. Pharmacie, IV.)

XIV.

Ueber ein System verwandter Curven und Flächen zweiten Grades.

Von Dr. Heilermann,
Director der Provinzial-Gewerbeschule zu Coblenz.

„Die Theorie der Flächen zweiten Grades ist am meisten dadurch gefördert worden, dass man, von den Curven zweiten Grades ausgehend, vom Besonderen zum Allgemeineren aufsteigend, diejenigen Eigenschaften, welche die bekannten Sätze von den Kegelschnitten als besondere Fälle enthalten, an den vollkommneren Gebilden des Raumes aufsuchte." Auch in den hier folgenden Mittheilungen werde ich denselben Weg verfolgen, indem ich zuerst einige Eigenschaften der Kegelschnitte zusammenstelle und dann die analogen Gesetze über die Flächen zweiten Grades zu ermitteln suche.

§. 1.

Es werde in dem Kegelschnitte

1) $$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{\beta^2}=1$$

ein Punkt $n=(a,b)$ so bestimmt, dass seine Coordinaten a und b Halbachsen eines anderen Kegelschnittes sind, welcher mit jenem confocal ist. ist. Zur Bestimmung dieses Kegelschnittes

2) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

welcher immer eine Ellipse ist, dienen also die Gleichungen

3). $$\begin{cases}\dfrac{a^2}{\alpha^2}+\dfrac{b^2}{\beta^2}=1,\\ \alpha^2-a^2=\beta^2-b^2.\end{cases}$$

Wird der gleiche Werth der vorstehenden Differenzen mit μ bezeichnet, so ist

$$a^2=\alpha^2-\mu,\quad b^2=\beta^2-\mu,$$

folglich

$$4)\qquad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2};$$

und hiernach ist $\pm\sqrt{\mu}$ die Ordinate der Punkte, worin der Kegelschnitt 1) von den Halbirungslinien der Achsenwinkel geschnitten wird, und wenn dieser eine Ellipse, so ist $\sqrt{\mu}$ auch die Senkrechte, welche vom Mittelpunkte auf eine, zwei Scheitel verbindende Sehne gefällt wird.

Für die Coordinaten des Punktes $n=(a, b)$ erhält man

$$5)\qquad a=\pm\frac{\alpha^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},\quad b=\pm\frac{\beta^2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Hiernach giebt es in dem Kegelschnitte 1) vier Punkte, welche den Bedingungen 3) genügen, wenn

$$\alpha^2+\beta^2>0,$$

d. h. wenn dieser Kegelschnitt eine Ellipse ist oder eine Hyperbel, deren Asymptoten mit der realen Achse kleinere Winkel bilden, als mit der imaginären. Diese Punkte liegen im Unendlichen, wenn

$$\alpha^2+\beta^2=0,$$

d. h. wenn der Kegelschnitt 1) eine gleichseitige Hyperbel ist, und drittens sind die Coordinaten a und b imaginär, wenn

$$\alpha^2+\beta^2<0,$$

d. h. wenn der Kegelschnitt 1) eine Hyperbel ist, deren Asymptoten mit der realen Achse grössere Winkel bilden, als mit der imaginären.

Werden die vier Punkte $(\pm a, \pm b)$ verbunden, so entsteht ein Rechteck, welches der Ellipse 2) umgeschrieben und dem Kegelschnitte 1) eingeschrieben ist.

Soll umgekehrt durch den Punkt $n=(a, b)$ ein Kegelschnitt gelegt werden, welcher mit der Ellipse 2) confocal ist, so erhält man aus den Gleichungen 3) zur Bestimmung der Differenz μ die Gleichung

$$6)\qquad \frac{a^2}{a^2+\mu}+\frac{b^2}{b^2+\mu}=1,$$

mithin

$$7)\qquad \mu=\pm ab.$$

Es giebt also auch zwei Paar Werthe von α^2 und β^2, welche den Bedingungen 3) genügen, nämlich

$$8)\qquad \begin{cases}\alpha^2=a(a+b),\ \beta^2=b(b+a),\\ \alpha_1^2=a(a-b),\ \beta_1^2=b(b-a),\end{cases}$$

und daher giebt es auch zwei Kegelschnitte, welche durch die vier Punkte $(\pm a, \pm b)$ gehen und mit der Ellipse 2) confocal sind, nämlich

$$9)\qquad \begin{cases}\dfrac{x^2}{a(a+b)}+\dfrac{y^2}{b(b+a)}=1,\\[2ex] \dfrac{x^2}{a(a-b)}+\dfrac{y^2}{b(b-a)}=1,\end{cases}$$

und zwar ist der erstere eine Ellipse, die zweite eine Hyperbel.

Für den Zusammenhang dieser Curven und der Ellipse 2) sind folgende Gleichungen beachtenswerth

$$10)\quad \begin{cases} \alpha^2+\alpha_1^2=2a^2, & \beta^2+\beta_1^2=2b^2, \\ \alpha^2\alpha_1^2=a^2(a^2-b^2), & \beta^2\beta_1^2=b^2(b^2-a^2), \\ \alpha^2\beta^2=ab(a+b)^2, & \alpha_1^2\beta_1^2=-ab(a-b)^2, \\ \alpha^2+\beta^2=(a+b)^2, & \alpha_1^2+\beta_1^2=(a-b)^2, \\ \alpha^2:\beta^2=a:b, & \alpha_1^2:\beta_1^2=-a:b. \end{cases}$$

Die Geraden, welche die Kegelschnitte 9) in dem Punkte (a, b) berühren, sind

$$\frac{a}{\alpha^2}\cdot x+\frac{b}{\beta^2}\cdot y=1,$$
$$\frac{a}{\alpha_1^2}\cdot x+\frac{b}{\beta_1^2}\cdot y=1,$$

oder, wenn die Werthe von α, β, α_1 und β_1 eingesetzt werden,

$$11)\quad \begin{cases} \dfrac{x}{a+b}+\dfrac{y}{a+b}=1, \\ \dfrac{x}{a-b}+\dfrac{y}{b-a}=1, \end{cases}$$

und schneiden, wie die Form ihrer Gleichungen zeigt, auf den Achsen der Ellipse 2) gleiche Stücke ab, welche der Summe oder Differenz der Halbachsen dieses Kegelschnittes gleich sind. Werden die Berührenden der Kegelschnitte 9) für die vier Punkte $(\pm a, \pm b)$ gezogen, so schliessen sie zwei Quadrate ein, deren Diagonalen in den Achsen der Kegelschnitte gelegen und der Summe oder Differenz derselben gleich sind.

§. 2.

Die Kreise

$$12)\quad \begin{cases} X^2+Y^2=(a+b)^2, \\ X_1^2+Y_1^2=(a-b)^2, \end{cases}$$

welche den zuletzt erwähnten Quadraten umgeschrieben sind, stehen mit dem Kegelschnitte 2) in einem innigen Zusammenhange. Es sei der Punkt $M=(X, Y)$ des grösseren Kreises dem Punkte $m=(x, y)$ der Ellipse 2) entsprechend, d. h. ihre Coordinaten genügen den Proportionen

$$13)\quad \frac{X}{x}=\frac{a+b}{a},\quad \frac{Y}{y}=\frac{a+b}{b};$$

hieraus folgt sogleich

$$14)\quad \frac{x}{X}+\frac{y}{Y}=1,$$

d. h. jeder Punkt m der Ellipse liegt in der Geraden, welche die Fusspunkte der Coordinaten des entsprechenden Punktes M des grösseren Kreises 12) verbindet.

Bezeichnet man diese Fusspunkte mit P und Q, so dass $MP=X$ und $MQ=Y$, so ist $PQ=a+b$ und wird durch den Punkt m, wie die vor-

stehenden Gleichungen zeigen, in die Abschnitte $mP = a$ und $mQ = b$ getheilt.

Ebenso werden durch die Proportionen

$$15)\qquad \frac{X_1}{x} = \frac{a-b}{a}, \quad \frac{Y_1}{y} = \frac{b-a}{b}$$

in dem kleineren Kreise 12) und der Ellipse 2) die entsprechenden Punkte $M_1 = (X_1, Y_1)$ und $m = (x, y)$ bestimmt, und auch diese befriedigen die Gleichung

$$16)\qquad \frac{x}{X_1} + \frac{y}{Y_1} = 1,$$

welche wieder zeigt, dass der Punkt m auch in der Geraden liegt, welche durch die Fusspunkte der Coordinaten des entsprechenden Punktes M_1 in dem kleineren Kreise geht.

Bezeichnet man diese Fusspunkte mit P_1 und Q_1, so dass $M_1 P_1 = X_1$ und $M_1 Q_1 = X_1$, so ist $P_1 Q_1 = \pm (a - b)$ und wird durch den Punkt m äusserlich so getheilt, dass $m P_1 = a$ und $m Q_1 = b$.

Hieraus ergiebt sich nun in Verbindung mit dem Vorhergehenden der folgende bekannte Satz:

Werden um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen Kreise beschrieben, so liegt jeder Punkt der Ellipse in den Geraden, welche durch die Fusspunkte der Coordinaten der entsprechenden, in diesen Kreisen liegenden Punkte gehen und theilt die Verbindungslinien der Fusspunkte, die eine innerlich und die andere äusserlich, in zwei Abschnitte, welche gleich den Halbachsen der Ellipse sind.

Aus den vorstehenden Gleichungen 13) und 15) folgt ferner

$$17)\qquad X + X_1 = 2x, \quad Y + Y_1 = 2y$$

und diese Gleichungen haben für die Lage der entsprechenden Punkte M, M_1 und m folgende Bedeutung:

Werden um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen Kreise beschrieben, so halbirt jeder Punkt der Ellipse die Verbindungslinie der zugehörigen entsprechenden Punkte dieser Kreise.

Die Gerade, welche durch die Punkte $M = (X, Y)$ und $m = (x, y)$ geht, ist bekanntlich

$$y - y_1 = \frac{Y - y}{X - x}(x - x_1),$$

wenn x_1, y_1 die laufenden Coordinaten derselben bezeichnen. Durch Einsetzung der in 13) angegebenen Werthe von X und Y geht diese Gleichung über in

$$18)\qquad \frac{a^2}{a^2 - b^2} \cdot \frac{x_1}{x} + \frac{b^2}{b^2 - a^2} \cdot \frac{y_1}{y} = 1$$

und diese zeigt, dass die dem Punkte m entsprechenden Punkte M und M_1 der Kreise 12) in der Normale des Punktes m liegen.

Die Länge der Linie Mm oder $M_1 m$, welche mit l bezeichnet sei, ist durch die Gleichung

$$l^2 = (X-x)^2 + (Y-y)^2$$

bestimmt, oder durch

$$l^2 = a^2 b^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right) = a^2 + b^2 - x^2 - y^2.$$

Nun ist aber, wenn vom Mittelpunkte auf die Berührende des Punktes m die Senkrechte ξ gefällt wird,

$$\frac{1}{\xi^2} = \frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4},$$

folglich

19) $$l = \frac{ab}{\xi},$$

und da bekanntlich $2.\frac{ab}{\xi}$ der zur Berührenden des Punktes m parallele Durchmsser die Ellipse 2) ist, so ergiebt sich hieraus folgender Satz:

Werden um den Mittelpunkt einer Ellipse mit der Summe und Differenz der Halbachsen Kreise beschrieben, so begrenzen diese auf jeder Normale der Ellipse eine Strecke, welche dem auf derselben Normale senkrechten Durchmesser der Ellipse gleich ist.

§. 3.

Bezeichnet man die Punkte, wo die Normale 18) die Achsen trifft, mit P_0 und Q_0, so ist

$$m P_0^2 = x^2 + \left(y - \frac{b^2 - a^2}{b^2} y\right)^2 = a^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right),$$

$$m Q_0^2 = y^2 + \left(x - \frac{a^2 - b^2}{a^2} x\right)^2 = b^4 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4}\right),$$

oder

20) $$m P_0 = \frac{a^2}{\xi},\ m Q_0 = \frac{b^2}{\xi} \text{ und } P_0 Q_0 = \pm \frac{a^2 - b^2}{\xi}.$$

Diese Gleichungen zeigen, dass

auf jeder Normale einer Ellipse durch die Achsen Strecken abgeschnitten werden, welche mit der Entfernung der zugehörigen Berührenden vom Mittelpunkte Rechtecke von constanter Grösse bilden.

Auch die Hyperbel besitzt dieselbe Eigenschaft und der Unterschied besteht nur darin, dass der Fusspunkt der Normalen dieses Kegelschnittes zwischen den Punkten liegt, wo sie die Achsen schneidet.

Durch Umkehrung dieses Satzes erhält man folgende Erzeugungsweise dieser Kegelschnitte:

Bewegt sich ein rechter Winkel so, dass auf dem einen Schenkel durch zwei auf einander senkrecht stehende Geraden Strecken abgeschnitten werden, welche mit der Entfernung des anderen Schenkels vom Schnittpunkt dieser Geraden Rechtecke von constanter Grösse bilden, so sind die Schenkel des beweglichen Winkels in allen Lagen Normale und Tangente eines Kegelschnittes, dessen Halbachsenquadrate jenen Rechtecken gleich sind.

Wenn man ferner die Gleichungen 20) mit denen unter 19) verbindet, so ergiebt sich

21) $$mM^2 = mM_1^2 = mP_0 \,.\, mQ_0,$$

oder jede Normale einer Ellipse wird von den Achsen und den um den Mittelpunkt mit der Summe und Differenz der Halbachsen beschriebenen Kreisen in vier harmonischen Punkten geschnitten.

Von den harmonischen Strahlen, welche den Mittelpunkt O mit den vier Punkten M, M_1, P_0, Q_0 verbinden, stehen die beiden letzten auf einander senkrecht, mithin halbiren sie die Winkel der beiden anderen. Da ausserdem

$$OM + OM_1 = 2a \text{ und } OM - OM_1 = 2b,$$

wenn

$$a > b,$$

und

$$OM + OM_1 = 2b \text{ und } OM - OM_1 = 2a,$$

wenn

$$b > a,$$

so sind die Punkte M und M_1 die Brennpunkte zweier confocalen Kegelschnitte, welche die Achsen der Ellipse 2) im Mittelpunkte O berühren und die Achsen der letzteren als grosse (reale) Achse enthalten.

§. 4.

Wenn man die auf den Achsen durch die Normale des Punktes $m = (x, y)$ abgeschnittenen Stücke

$$\frac{a^2 - b^2}{a^2} \,.\, x \text{ und } \frac{b^2 - a^2}{b^2} \,.\, y$$

als Coordinaten des Punktes $m_0 = (x_0, y_0)$ ansieht, so ist die Ortscurve dieses Punktes die Ellipse

$$a^2 x_0^2 + b^2 y_0^2 = (a^2 - b^2)^2,$$

oder

22) $$\frac{x_0^2}{a_0^2} + \frac{y_0^2}{b_0^2} = 1,$$

wo zur Abkürzung

$$a_0 = \frac{a^2 - b^2}{a}, \quad b_0 = \frac{b^2 - a^2}{b}$$

gesetzt worden ist.

Man sieht sogleich, dass auch der Punkt $m_0 = (x_0, y_0)$ in dieser Ellipse den Punkten $m = (x, y)$, $M = (X, Y)$ und $M_1 = (X_1, Y_1)$ entspricht, denn es ist offenbar

23) $$\begin{cases} x : X : X_1 : x_0 = a : a + b : a - b : a_0, \\ y : Y : Y_1 : y_0 = b : b + a : b - a : b_0. \end{cases}$$

Dazu ist

$$x \,.\, x_0 = X \,.\, X_1 \text{ und } y \,.\, y_0 = Y \,.\, Y_1$$

und insbesondere

24) $$a \,.\, a_0 = a^2 - b^2 \text{ und } b b_0 = b^2 - a^2.$$

Mithin sind die Brennpunkte der Ellipse 2) harmonisch gelegen sowohl gegen die Scheitel der Ellipsen 2) und 22), als auch gegen die Punkte, wo die grosse Achse der Ellipse 2) von den Kreisen 12) geschnitten wird.

In der Linie $P_0 Q_0$, welche nach 21) durch die Punkte M und M_1 harmonisch und zwar nach dem Verhältnisse

$$P_0 M : Q_0 M = P_0 M_1 : Q_0 M_1 = a : b = b_0 : a_0$$

getheilt wird, liegt der Punkt m so, dass

25) $$P_0 m : Q_0 m = a^2 : b^2 = b_0^2 : a_0^2,$$

oder: theilt man die Linie, welche die Fusspunkte der Coordinaten eines Ellipsenpunktes verbindet, äusserlich nach dem Verhältnisse der Halbachsenquadrate, so ist die Verbindungslinie eine Normale der Ellipse, welche der Theilpunkt beschreibt und dieser ihr Fusspunkt.

§. 5.

In der Fläche zweiten Grades

26) $$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1$$

werde ein Punkt $n = (a, b, c)$ so bestimmt, dass seine Coordinaten a, b und c Halbachsen einer anderen Fläche zweiten Grades sind, welche mit jener confocal ist. Zur Bestimmung dieser Fläche

27) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

welche immer ein Ellipsoid ist, dienen also die Gleichungen

28) $$\begin{cases} \dfrac{a^2}{\alpha^2} + \dfrac{b^2}{\beta^2} + \dfrac{c^2}{\gamma^2} = 1, \\ \alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2 = \gamma^2 - c^2. \end{cases}$$

Wird der gleiche Werth dieser Differenz mit μ bezeichnet, so ist

$$a^2 = \alpha^2 - \mu, \quad b^2 = \beta^2 - \mu, \quad c^2 = \gamma^2 - \mu,$$

folglich

29) $$\frac{2}{\mu} = \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2},$$

und durch Einsetzung dieses Werthes erhält man

$$30)\quad \begin{cases} a = \pm\alpha\sqrt{\dfrac{-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}, \\ b = \pm\beta\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}, \\ c = \pm\gamma\sqrt{\dfrac{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2}}{\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}}}. \end{cases}$$

Um zu beurtheilen, wann diese Werthe real, oder null, oder imaginär sind, nehme ich im Allgemeinen an, dass

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2.$$

Wenn nun zuerst die Fläche 34) ein Ellipsoid, also

$$\alpha^2 > \beta^2 > \gamma^2 > 0,$$

so ist

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} > -\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} > \frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} > 0,$$

folglich sind die Werthe von a, b, c real, wenn auch

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2} > 0.$$

Wenn zweitens die Fläche 26) ein einschaliges Hyperboloid, also

$$\alpha^2 > \beta^2 > 0 > \gamma^2,$$

so ist

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}-\frac{1}{\gamma^2} > 0;$$

soll nun auch der Werth von c real werden, so muss

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} < 0$$

sein, und hierdurch ist wieder bedingt, dass

$$\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} < -\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} < 0,$$

mithin auch a und b real sind.

Wenn drittens $\alpha^2 > 0 > \beta^2 > \gamma^2$,

also die Fläche 26) ein zweischaliges Hyperboloid ist, so ist auch

$$-\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} < 0,$$

folglich kann der Werth von a nur real sein, wenn zugleich

$$\frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2} < 0,$$

nd weiter muss, damit auch b und c real bleiben, der Bedingung

$$\frac{1}{\alpha^2} - \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} > \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} - \frac{1}{\gamma^2} > 0$$

enüge geschehen.

Die acht Punkte $(\pm a, \pm b, \pm c)$ sind die Ecken eines rechteckigen arallelepipedes, welches dem Ellipsoide 27) umgeschrieben und zugleich er confocalen Fläche 26) eingeschrieben ist. Soll umgekehrt durch den unkt $n = (a, b, c)$, dessen Coordinaten die Halbachsen des Ellipsoides 27) nd, eine mit demselben confocale Fläche gelegt werden, so führen die edingungen 28) auf folgende cubische Gleichung

$$31)\qquad \frac{a^2}{a^2+\mu} + \frac{b^2}{b^2+\mu} + \frac{c^2}{c^2+\mu} = 1.$$

Wenn nun

$$a^2 > b^2 > c^2 > 0$$

ngenommen und die drei Wurzeln dieser Gleichung mit

$$\mu > \mu_1 > \mu_2$$

ezeichnet werden, so ist

$$2a^2 > \mu > 2c^2;\; -c^2 > \mu_1 > -b^2;\; -b^2 > \mu_2 > -a^2.$$

ie Entwickelung der vorstehenden Gleichung oder

$$\mu^3 - (a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)\,\mu - 2a^2 b^2 c^2 = 0$$

igt ferner, dass

$$32)\qquad \begin{cases} \mu + \mu_1 + \mu_2 = 0 \\ \mu\mu_1 + \mu_1\mu_2 + \mu_2\mu = -(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2) \\ \mu\mu_1\mu_2 = 2a^2 b^2 c^2, \end{cases}$$

d dass im Allgemeinen

$$33)\qquad \mu = \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2 + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{a^2 b^2 c^2 - \sqrt{D}},$$

enn zur Abkürzung gesetzt wird

$$D = a^4 b^4 c^4 - \tfrac{1}{27}(a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2)^3.$$

Den drei Werthen von μ entsprechen drei Werthe von α, β und γ, elche durch die Gleichungen

$$34)\qquad \begin{cases} \alpha^2 - a^2 = \beta^2 - b^2 = \gamma^2 - c^2 = \mu, \\ \alpha_1^2 - a^2 = \beta_1^2 - b^2 = \gamma_1^2 - c^2 = \mu_1, \\ \alpha_2^2 - a^2 = \beta_2^2 - b^2 = \gamma_2^2 - c^2 = \mu_2, \end{cases}$$

estimmt sind, und mithin giebt es auch drei Flächen zweiten Grades, ämlich

$$35)\qquad \begin{cases} \frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + \frac{z^2}{\gamma^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\alpha_1^2} + \frac{y^2}{\beta_1^2} + \frac{z^2}{\gamma_1^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\alpha_2^2} + \frac{y^2}{\beta_2^2} + \frac{z^2}{\gamma_2^2} = 1, \end{cases}$$

elche den Bedingungen 28) genügen.

Der Zusammenhang unter den Halbachsen dieser Flächen ist aus folgenden Gleichungen ersichtlich:

$$36)\quad \begin{cases} \alpha^2+\alpha_1^2+\alpha_2^2=3a^2,\ \alpha^2\alpha_1^2+\alpha_1^2\alpha_2^2+\alpha_2^2\alpha^2=3a^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2, \\ \qquad \alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2=a^2(a^2-b^2)(a^2-c^2), \\ \beta^2+\beta_1^2+\beta_2^2=3b^2,\ \beta^2\beta_1^2+\beta_1^2\beta_2^2+\beta_2^2\beta^2=3b^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2, \\ \qquad \beta^2\beta_1^2\beta_2^2=b^2(b^2-c^2)(b^2-a^2), \\ \gamma^2+\gamma_1^2+\gamma_2^2=3c^2,\ \gamma^2\gamma_1^2+\gamma_1^2\gamma_2^2+\gamma_2^2\gamma_2=3c^4-a^2b^2-b^2c^2-c^2a^2, \\ \qquad \gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2=c^2(c^2-a^2)(c^2-b^2), \\ \alpha^2+\beta_1^2+\gamma_2^2=\alpha_1^2+\beta_2^2+\gamma^2=\alpha_2^2+\beta^2+\gamma_1^2=a^2+b^2+c^2. \end{cases}$$

Die drei Ebenen

$$37)\quad \begin{cases} \frac{a}{\alpha^2}\cdot x+\frac{b}{\beta^2}\cdot y+\frac{c}{\gamma^2}\cdot z=1, \\ \frac{a}{\alpha_1^2}\cdot x+\frac{b}{\beta_1^2}\cdot y+\frac{c}{\gamma_1^2}\cdot z=1, \\ \frac{a}{\alpha_2^2}\cdot x+\frac{b}{\beta_2^2}\cdot y+\frac{c}{\gamma_2^2}\cdot z=1, \end{cases}$$

welche die drei confocalen Flächen im Punkte $n=(a,b,c)$ berühren, bestimmen auf den Achsen die Stücke $\frac{\alpha^2}{a}, \frac{\alpha_1^2}{a}, \frac{\alpha_2^2}{a}, \frac{\beta^2}{b}, \frac{\beta_1^2}{b}, \frac{\beta_2^2}{b}; \frac{\gamma^2}{c}, \frac{\gamma_1^2}{c}, \frac{\gamma_2^2}{c}$, von welchen die gleichliegende Achse des Ellipsoides 27) das arithmetische Mittel ist, da nach 36)

$$\frac{\alpha^2}{a}+\frac{\alpha_1^2}{a}+\frac{\alpha_2^2}{a}=3a,\quad \frac{\beta^2}{b}+\frac{\beta_1^2}{b}+\frac{\beta_2^2}{b}=3b,\quad \frac{\gamma^2}{c}+\frac{\gamma_1^2}{c}+\frac{\gamma_2^2}{c}=3c.$$

§. 6.

Werden in einer Ebene, welche auf den Coordinatenachsen die Stücke ξ, η, ζ abschneidet, den Schnittpunkten die Gewichte A, B, C beigelegt, so sind die Coordinaten des Schwerpunktes

$$\frac{A}{A+B+C}\cdot\xi,\quad \frac{B}{A+B+C}\cdot\eta,\quad \frac{C}{A+B+C}\cdot\zeta.$$

Legt man also den Punkten, wo die erste Ebene 37) von den Achsen getroffen wird, die Gewichte $\frac{a^2}{\alpha^2}, \frac{b^2}{\beta^2}, \frac{c^2}{\gamma^2}$ bei, so hat der Schwerpunkt, weil hier

$$\frac{a^2}{\alpha^2}+\frac{b^2}{\beta^2}+\frac{c^2}{\gamma^2}=1,$$

die Coordinaten

$$\frac{a^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{a}=a,\quad \frac{b^2}{\beta^2}\cdot\frac{\beta^2}{b}=b,\quad \frac{c^2}{\gamma^2}\cdot\frac{\gamma^2}{c}=c,$$

folglich ist der Punkt $n=(a,b,c)$ der Schwerpunkt dieser Schnittpunkte. Da dasselbe auch von den beiden anderen Ebenen gilt, so ist n der gemeinsame Schwerpunkt der Punkte, worin die Ebenen 37) die Achsen schneiden.

Die Stücke, welche durch eine der Ebenen 37) abgeschnitten werden, sehe ich als Halbachsen eines Ellipsoides an, erhalte also die drei Flächen

$$38)\quad \begin{cases} \left(\frac{aX}{\alpha^2}\right)^2 + \left(\frac{bY}{\beta^2}\right)^2 + \left(\frac{cZ}{\gamma^2}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{aX_1}{\alpha_1{}^2}\right)^2 + \left(\frac{bY_1}{\beta_1{}^2}\right)^2 + \left(\frac{cZ_1}{\gamma_1{}^2}\right)^2 = 1, \\ \left(\frac{aX_2}{\alpha_2{}^2}\right)^2 + \left(\frac{bY_2}{\beta_2{}^2}\right)^2 + \left(\frac{cZ_2}{\gamma_2{}^2}\right)^2 = 1. \end{cases}$$

In diesen Flächen sind nun die Punkte $M = (X, Y, Z)$, $M_1 = (X_1, Y_1, Z_1)$ und $M_2 = (X_2, Y_2, Z_2)$, welche einem beliebigen Punkte $m = (x, y, z)$ des Ellipsoides 27) entsprechen, durch folgende Proportionen bestimmt:

$$39)\quad \begin{cases} x : X : X_1 : X_2 = a : \frac{\alpha^2}{a} : \frac{\alpha_1{}^2}{a} : \frac{\alpha_2{}^2}{a}, \\ y : Y : Y_1 : Y_2 = b : \frac{\beta^2}{b} : \frac{\beta_1{}^2}{b} : \frac{\beta_2{}^2}{b}, \\ z : Z : Z_1 : Z_2 = c : \frac{\gamma^2}{c} : \frac{\gamma_1{}^2}{c} : \frac{\gamma_2{}^2}{c}. \end{cases}$$

Hieraus folgt sogleich, dass

$$40)\quad \frac{x}{X} + \frac{y}{Y} + \frac{z}{Z} = 1, \quad \frac{x}{X_1} + \frac{y}{Y_1} + \frac{z}{Z_1} = 1, \quad \frac{x}{X_2} + \frac{y}{Y_2} + \frac{z}{Z_2} = 1,$$

oder der Satz: Werden durch die Endpunkte der Coordinaten von drei entsprechenden Punkten der Flächen 38) Ebenen gelegt, so schneiden sich diese in dem entsprechenden Punkte des Ellipsoides 27). Zugleich ergiebt sich aus diesen Proportionen, dass jeder Punkt des Ellipsoides 27) der Schwerpunkt von den Punkten, welche auf den Achsen die Coordinaten eines entsprechenden Punktes der Flächen 38) begrenzen, wenn diesen die Gewichte $\frac{a^2}{\alpha^2}, \frac{b^2}{\beta^2}, \frac{c^2}{\gamma^2}$ oder $\frac{a^2}{\alpha_1{}^2}, \frac{b^2}{\beta_1{}^2}, \frac{c^2}{\gamma_1{}^2}$ oder $\frac{a^2}{\alpha_2{}^2}, \frac{b^2}{\beta_2{}^2}, \frac{c^2}{\gamma_2{}^2}$ angehängt werden.

Ferner folgt aus denselben Gleichungen 39), dass

$$41)\quad X + X_1 + X_2 = 3x, \quad Y + Y_1 + Y_2 = 3y, \quad Z + Z_1 + Z_2 = 3z,$$

oder der Satz: Jeder Punkt des Ellipsoides 27) ist der Schwerpunkt der drei demselben entsprechenden Punkte in den Flächen 38), wenn diese gleiches Gewicht haben.

Die Gerade, welche durch die entsprechenden Punkte $m = (x, y, z)$ und $M = (X, Y, Z)$ geht, ist durch die Gleichungen

$$\frac{x_1 - x}{X - x} = \frac{y_1 - y}{Y - y} = \frac{z_1 - z}{Z - z}$$

dargestellt, oder weil

$$X - x = \frac{\mu}{a^2} \cdot x, \quad Y - y = \frac{\mu}{b^2} \cdot y, \quad Z - z = \frac{\mu}{c^2} \cdot z,$$

durch die Doppelgleichung

$$42)\qquad \frac{a^2}{x}(x_1-x)=\frac{b^2}{y}(y_1-y)=\frac{c^2}{z}(z_1-z).$$

Dies ist aber bekanntlich die Gerade, welche im Punkte $m=(x, y, z)$ auf der Fläche 27) senkrecht steht, und da in derselben Geraden auch die Punkte $M_1=(X_1, Y_1, Z_1)$ und $M_2=(X_2, Y_2, Z_2)$ liegen, so folgt hieraus der Satz: Jede Normale der Fläche 27) trifft die Flächen 38) in drei ihrem Fusspunkte entsprechenden Punkten.

Die Länge der Strecke Mm, welche mit l bezeichnet sei, ist durch die Gleichung

$$l^2=(X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2$$

bestimmt, oder durch

$$l^2=\mu^2\left(\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4}\right).$$

Nun ist aber, wenn vom Mittelpunkte auf die Berührungsebene des Punktes $m=(x, y, z)$ die Senkrechte ξ gefällt wird,

$$\frac{1}{\xi^2}=\frac{x^2}{a^4}+\frac{y^2}{b^4}+\frac{z^2}{c^4},$$

folglich

$$43)\qquad l=\frac{\mu}{\xi},\quad l_1=-\frac{\mu_1}{\xi},\quad l_2=-\frac{\mu^2}{\xi},$$

wo $l=Mm$, $l_1=M_1m$ und $l_2=M_2m$ gesetzt ist.

Wird also ein beliebiger Punkt des Ellipsoides 27) mit den entsprechenden Punkten der Flächen 38) verbunden, so sind die Rechtecke aus diesen Verbindungslinien und der Senkrechten, welche vom Mittelpunkte auf die Berührungsebene des ersten Punktes gefällt ist, constant und gleich den Wurzeln der Gleichung 31).

§. 7.

Bezeichnet man die Punkte, wo die Normale des Punktes $m=(x,y,z)$ die Coordinatenebenen trifft, mit P_0, Q_0, R_0, so sind nach der Gleichung 42)

$$0,\quad \frac{b^2-a^2}{b^2}.y,\quad \frac{c^2-a^2}{c^2}.z \text{ die Coordinaten von } P_0,$$

$$\frac{a^2-b^2}{a^2}.x,\quad 0,\quad \frac{c^2-b^2}{c^2}.z \quad ,,\quad ,,\quad ,,\ Q_0,$$

$$\frac{a^2-c^2}{a^2}.x,\quad \frac{b^2-c^2}{b^2}.y,\quad 0,\quad ,,\quad ,,\quad ,,\ R_0.$$

Daraus ergeben sich für die Stücke, welche von diesen Punkten einerseits und dem Punkte m andererseits begrenzt werden, die Werthe

$$44)\qquad mP_0=\frac{a^2}{\xi},\quad mQ_0=\frac{b^2}{\xi},\quad mR_0=\frac{c^2}{\xi},$$

welche zeigen, dass

auf jeder Normale eines Ellipsoides durch die Achsen-

ebenen Strecken abgeschnitten werden, welche mit der Entfernung der zugehörigen Berührungsebene vom Mittelpunkte Rechtecke von constanter Grösse bilden.

Auch die beiden Hyperboloide besitzen dieselbe Eigenschaft und der Unterschied besteht blos darin, dass die Punkte, wo die Achsenebenen eines Hyperboloides von einer Normale getroffen werden, nicht alle mit dem Mittelpunkte auf derselben Seite der zur Normale gehörigen Berührungsebene liegen.

Durch Umkehrung des verstehenden Satzes erhält man folgende Erzeugungsweise der Flächen:

Steht eine Gerade auf einer mit ihr fest verbundenen Ebene senkrecht und bewegt sie sich so, dass die Strecken, welche durch drei aufeinander senkrecht stehende, fest liegende Ebenen auf der Geraden abgeschnitten werden, mit der Entfernung der ersteren Ebene vom Schnittpunkte der letzteren Rechtecke von constanter Grösse bilden, so sind die bewegliche Gerade und Ebene in allen Lagen eine Normale und Berührungsebene einer Fläche zweiten Grades, deren Halbachsenquadrate jenen Rechtecken gleich sind.

Setzt man die aus 43) und 44) entnommenen Werthe von a^2, b^2, c^2 und μ, μ_1, μ_2 in die oben für diese Wurzeln angegebenen Grenzbestimmungen ein, so entsteht

$$2mP_0 > mM > 2mR_0;\quad mR_0 < mM_1 < mQ_0;\quad mQ_0 < mM_2 < mP_0,$$

und nimmt man noch hinzu, dass

$$X > x > X_1 > X_2,$$

so erkennt man, dass der Punkt M_1 in der Strecke R_0Q_0, M_2 in Q_0P_0 und M in der Verlängerung der Strecke P_0R_0 über R_0 hinaus liegt. Durch Verbindung der Gleichungen 43) und 44) erhält man nun

$$MP_0 = \frac{\alpha^2}{\xi},\ MQ_0 = \frac{\beta^2}{\xi},\ MR_0 = \frac{\gamma^2}{\xi}$$

und wenn man diese Werthe, sowie

$$Mm = \frac{\mu}{\xi}$$

in die Gleichung 29) einsetzt, so entsteht

$$45)\qquad \frac{2}{Mm} = \frac{1}{MP_0} + \frac{1}{MQ_0} + \frac{1}{MR_0}.$$

Hiernach ist also $\frac{3}{2}Mm$ das harmonische Mittel von MP_0, MQ_0 und MR_0. Dasselbe gilt offenbar von $\frac{3}{2}M_1m$ und $\frac{3}{2}M_2m$. Dieser Zusammenhang ist auch ausgedrückt durch die Gleichung

$$\frac{mP_0}{MP_0} + \frac{mQ_0}{MQ_0} + \frac{mR_0}{MR_0} = 1,$$

welche entsteht, wenn man in die Gleichung 31) die obigen We[rthe] einsetzt.

Ferner erhält man in derselben Weise aus den Relationen 32) die folgenden:

$$46) \begin{cases} mM - mM_1 - mM_2 = 0, \\ mM.mM_1 + mM_1.mM_2 + mM_2.mM = mP_0.mQ_0 + mQ_0.mR_0 + mR_0.mP_0 \\ mM.mM_1.mM_2 = 2.mP_0.mQ_0.mR_0, \end{cases}$$

und durch Multiplication der auf die Normale durch die Achsenebenen abgeschnittenen Stücke

$$mP_0.mQ_0.mR_0 = \frac{a^2 b^2 c^2}{\xi^3}.$$

Nun ist aber bekanntlich das Product aus den Halbachsen des zur Berührungsebene des Punktes m parallelen Centralschnittes und der auf jene Ebene gefällten Senkrechten ξ gleich dem Product der drei Halbachsen der Fläche, oder

$$d_1 d_2 \xi = abc,$$

wenn die Halbachsen jenes Centralschnittes mit d_1 und d_2 bezeichnet werden, folglich

$$d_1 d_2 = \sqrt[3]{abc.mP_0.mQ_0.mR_0}.$$

Hieraus erhält man nun durch Anwendung der letzten Gleichung unter 46)

$$47) \qquad d_1 d_2 = \sqrt[3]{\tfrac{1}{2}\, abc.mM.mM_1.mM_2}.$$

Ebenso ist nach 44)

$$mP_0.mQ_0 + mQ_0.mR_0 + mR_0.mP_0 = \frac{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2}{\xi^2},$$

und da ausserdem

$$\xi = \frac{abc}{d_1 d_2},$$

so folgt zunächst

$$d_1 d_2 = \sqrt{\frac{mP_0.mQ_0 + mQ_0.mR_0 + mR_0.mP_0}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}$$

und vermittelst der Gleichung 46)

$$48) \qquad d_1 d_2 = \sqrt{\frac{mM.mM_1 - mM_1.mM_2 + mM_2.mM}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}}}.$$

Diese Relationen ersetzen für das Ellipsoid die oben unter 19) und 21) von der Ellipse angeführten Sätze.

§. 8.

Sowie oben unter Gleichung 6) nicht blos die Quotienten $\frac{a^2}{\alpha^2}$, $\frac{a^2}{\alpha_1^2}$ und $\frac{b^2}{\beta^2}$, $\frac{b^2}{\beta_1^2}$ der Bedingung genügten, dass ihre Summe gleich eins, so ist es

auch hier mit den Quotienten $\frac{a^2}{\alpha^2}$, $\frac{a^2}{\alpha_1^2}$, $\frac{a^2}{\alpha_2^2}$ und $\frac{b^2}{\beta^2}$, $\frac{b^2}{\beta_1^2}$, $\frac{b^2}{\beta_2^2}$ und $\frac{c^2}{\gamma^2}$, $\frac{c^2}{\gamma_1^2}$, $\frac{c^2}{\gamma_2^2}$.
Es ist zunächst

$$\frac{a^2}{\alpha^2}\cdot\frac{a^2}{\alpha_1^2}\cdot\frac{a^2}{\alpha_2^2}=\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},\quad \frac{b^2}{\beta^2}\cdot\frac{b^2}{\beta_1^2}\cdot\frac{b^2}{\beta_2^2}=\frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$
$$\frac{c^2}{\gamma^2}\cdot\frac{c^2}{\gamma_1^2}\cdot\frac{c^2}{\gamma_2^2}=\frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}$$

und durch die Verbindung dieser Werthe ergiebt sich weiter

$$49)\qquad \frac{a^6}{\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2}+\frac{b^6}{\beta^2\beta_1^2\beta_2^2}+\frac{c^6}{\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2}=1.$$

Ferner sind dann für die Ellipsen 2) und 22) die entsprechenden Producte zugleich das Verhältniss der gleichliegenden Achsen und der Coordinaten von entsprechenden Punkten; mithin ist hier das Ellipsoid

$$50)\qquad \frac{x_0^2}{a_0^2}+\frac{y_0^2}{b_0^2}+\frac{z_0^2}{c_0^2}=1,$$

worin zur Abkürzung

$$a_0=\frac{\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2}{a^5},\quad b_0=\frac{\beta^2\beta_1^2\beta_2^2}{b^5},\quad c_0=\frac{\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2}{c^5}$$

gesetzt ist, die Fläche, welche der Ellipse 22) analog ist.

Wenn nun $m=(x,y,z)$ und $m_0=(x_0,y_0,z_0)$ entsprechende Punkte in den Flächen 27) und 50) sind, so ist

$$\frac{x}{x_0}=\frac{a}{a_0}=\frac{a^6}{\alpha^2\alpha_1^2\alpha_2^2}=\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$
$$\frac{y}{y_0}=\frac{b}{b_0}=\frac{b^6}{\beta^2\beta_1^2\beta_2^2}=\frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$
$$\frac{z}{z_0}=\frac{c}{c_0}=\frac{c^6}{\gamma^2\gamma_1^2\gamma_2^2}=\frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)},$$

und folglich

$$51)\qquad \frac{x}{x_0}+\frac{y}{y_0}+\frac{z}{z_0}=1,$$

d. h. jeder Punkt des Ellipsoides 27) liegt in einer Ebene, welche auf den Achsen die Coordinaten des entsprechenden Punktes des Ellipsoides 50) abschneidet und zwar ist der erste Punkt der Schwerpunkt der drei Punkte, in welchen die Achsen geschnitten werden, wenn diese die Gewichte $\frac{a}{a_0}$, $\frac{b}{b_0}$, $\frac{c}{c_0}$ haben.

Auch die entsprechenden Punkte M, M_1 und M_2 der Flächen 38) liegen in der Ebene 50), welche die Coordinaten des entsprechenden Punktes m_0 abschneidet. Es ist nämlich zunächst in Bezug auf den Punkt $M=(X,Y,Z)$

$$\frac{X}{x_0}=\frac{a^2\alpha^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}=\frac{a^4}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{a^2\mu}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)},$$
$$\frac{Y}{y_0}=\frac{b^2\beta^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}=\frac{b^4}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{b^2\mu}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)},$$
$$\frac{Z}{z_0}=\frac{c^2\gamma^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=\frac{c^4}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}+\frac{c^2\mu}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)};$$

dazu ist

$$\frac{a^2}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}+\frac{b^2}{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}+\frac{c^2}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}=0,$$

folglich auch

$$\frac{X}{x_0}+\frac{Y}{y_0}+\frac{Z}{z_0}=1,$$

d. h. es liegt auch der Punkt $M=(X, Y, Z)$ in der Ebene, welche auf den Achsen die Coordinaten des entsprechenden Punktes m_0 abschneidet. Da nun die Punkte m und M beide der Normale 42) angehören, so geht auch die Ebene selbst, welche auf den Achsen die Coordinaten eines Punktes des Ellipsoides 50) abschneidet, durch die Normale des entsprechenden Punktes der Fläche 27).

Bezeichnet man die Punkte, wo die Achsen von der Ebene 51) geschnitten werden, mit p_0, q_0, r_0, so dass

$$Op_0=x_0,\ Oq_0=y_0,\ Or_0=z_0;$$

so liegt die Normale 42) in der Ebene des Dreiecks $p_0q_0r_0$ und schneidet die Seiten in den Punkten P_0, Q_0, R_0. Um die Lage derselben in dem Dreiecke $p_0q_0r_0$ zu bestimmen, beachte man, dass

$$p_0R_0^2=\left(x_0-\frac{a^2-c^2}{a^2}x\right)^2+\left(\frac{b^2-c^2}{b^2}y\right)^2=b^4.\left[\left(\frac{a^2-c^2}{a^4}x\right)^2+\left(\frac{b^2-c^2}{b^4}y\right)^2\right],$$
$$q_0R_0^2=\left(\frac{a^2-c^2}{a^2}x\right)^2+\left(y_0-\frac{b^2-c^2}{b^2}y\right)^2=a^4.\left[\left(\frac{a^2-c^2}{a^4}x\right)^2+\left(\frac{b^2-c^2}{b^4}y\right)^2\right];$$

und hieraus erhält man

$$p_0R_0:q_0R_0=b^2:a^2.$$

Wendet man nun auch auf die Stücke der anderen Seiten des Dreiecks $p_0q_0r_0$ dasselbe Verfahren an, so entsteht

$$52)\quad p_0R:q_0R_0=\frac{1}{a^2}:\frac{1}{b^2},\ q_0P_0:r_0P_0=\frac{1}{b^2}:\frac{1}{c^2},\ r_0Q_0:p_0Q_0=\frac{1}{c^2}:\frac{1}{a^2}.$$

Mithin ist die Normale jedes Punktes des Ellipsoides 27) in der Ebene, welche die Coordinaten des entsprechenden Punktes des Ellipsoides 50) auf den Achsen abschneidet, so gelegen, dass ihre Entfernungen von den Schnittpunkten der Achsen sich verhalten, wie die reciproken Werthe der Quadrate dieser Achsen.

Die Vergleichung der Coordinaten der Punkte p_0, q_0, r_0, P_0, Q_0, R_0 zeigt *ferner*, dass unter den vier möglichen Geraden, deren Entfernungen von

den Ecken p_0, q_0, r_0 in dem angegebenen Verhältnisse stehen, die Normale 42) diejenige ist, welche alle Seiten des Dreiecks $p_0 q_0 r_0$ äusserlich theilt.

§. 9.

Die Ebenen

53) $$\frac{x}{a^2}\cdot x_1 + \frac{y}{b^2}\cdot y_1 + \frac{z}{c^2}\cdot z_1 = 1,$$

welche das Ellipsoid 27) im Punkte (x, y, z) berührt, begrenzt auf den Achsen die Stücke

$$Op_1 = \frac{a^2}{x},\ Oq_1 = \frac{b^2}{y},\ Or_1 = \frac{c^2}{z}.$$

Nun sind aber die Producte

$$Op_0 \,.\, Op_1 = \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2},\ Oq_0 \,.\, Oq_1 = \frac{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2},$$

$$Or_0 \,.\, Or_1 = \frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2}$$

constant, und wenn noch auf den Achsen vom Mittelpunkte aus nach beiden Seiten die Strecken

54) $$\begin{cases} Of = Of_1 = \dfrac{\sqrt{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}}{a}, \\ Og = Og_1 = \dfrac{\sqrt{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}}{b}, \\ Oh = Oh_1 = \dfrac{\sqrt{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}}{c}, \end{cases}$$

abgeschnitten werden, so ist

55) $Op_0 \,.\, Op_1 = Of^2 = Of_1^2,\ Oq_0 \,.\, Oq_1 = Og^2 = Og_1^2,\ Or_0 \,.\, Or_1 = Oh^2 = Oh_1^2.$

Diese Gleichungen zeigen, dass es in jeder Achse des Ellipsoides zwei (reale oder imaginäre) Punkte giebt, welche gegen die Berührungsebene 53) und die Normalebene 51) harmonisch liegen, nämlich die realen Punkte f, f_1 und h, h_1 und die imaginären g, g_1. Diese Punkte habe ich Focalpunkte des Ellipsoides genannt. (Ber. der Akad. der Wissenschaften zu Berlin.) Hiernach lässt sich der in den vorstehenden Gleichungen enthaltene Satz in folgender Weise ausdrücken:

Jede Berührungsebene des Ellipsoides 27) und diejenige Normalebene, welche auf den Achsen die Coordinaten des dem Berührungspunkte entsprechenden Punktes des Ellipsoides 50) abschneidet, sind gegen die Focalpunkte des ersteren Ellipsoides harmonisch gelegen.

Da ausserdem

$$a \,.\, a_0 = \frac{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}{a^2},\ b \,.\, b_0 = \frac{(b^2-c^2)(b^2-a^2)}{b^2},$$

$$c \,.\, c_0 = \frac{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}{c^2},$$

so sieht man, dass auch die Scheitel der Ellipsoide 27) und 30) gegen die Focalpunkte des Ellipsoides 27) harmonisch liegen.

Um nun die Lage der Normalebene 51) gegen die beiden Hauptnormalebenen festzustellen, denke man sich durch den Punkt $m = (x, y, z)$ noch die beiden Hyperboloide

56) $$\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} + \frac{z^2}{c_1^2} = 1,$$

56*) $$\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} + \frac{z^2}{c_2^2} = 1,$$

welche mit dem Ellipsoide 27) confocal sind, gelegt. Die Differenzen der gleichliegenden Halbachsenquadrate

$$a^2 - a_1^2 = b^2 - b_1^2 = c^2 - c_1^2 = d_1^2,$$
$$a^2 - a_2^2 = b^2 - b_2^2 = c_2 - c_2^2 = d_2^2$$

sind die Wurzeln der Gleichung

57) $$\frac{x^2}{a^2 - d^2} + \frac{y^2}{b^2 - d^2} + \frac{z^2}{c^2 - d^2} = 1,$$

und aus dieser geht hervor, dass

$$a^2 > d_2^2 > b^2 > d_1^2 > c^2.$$

Die Ebenen, welche das Ellipsoid 27) und die beiden confocalen Hyperboloide 56) berühren, sind

58) $$\frac{x}{a^2} \cdot x_1 + \frac{y}{b^2} \cdot y_1 + \frac{z}{c^2} \cdot z_1 = 1,$$

58*) $$\frac{x}{a_1^2} \cdot x_1 + \frac{y}{b_1^2} \cdot y_1 + \frac{z}{c_1^2} \cdot z_1 = 1,$$

58**) $$\frac{x}{a_2^2} \cdot x_1 + \frac{y}{b_2^2} \cdot y_1 + \frac{z}{c_2^2} \cdot z_1 = 1,$$

und stehen auf einander senkrecht, weil

$$\frac{x^2}{a^2 a_1^2} + \frac{y^2}{b^2 b_1^2} + \frac{z^2}{c^2 c_1^2} = 0,$$
$$\frac{x^2}{a^2 a_2^2} + \frac{y^2}{b^2 b_2^2} + \frac{z^2}{c^2 c_2^2} = 0,$$
$$\frac{x^2}{a_1^2 a_2^2} + \frac{y^2}{b_1^2 b_2^2} + \frac{z^2}{c_1^2 c_2^2} = 0,$$

wie sich sogleich engiebt, wenn man die Gleichungen der Flächen von einander abzieht.

Der Durchmesser $2D$ des Ellipsoides 27), welcher auf der Berührungsebene 58*) senkrecht steht, ist der Lage nach dargestellt durch die Doppelgleichung

$$\frac{a_1^2}{x} \cdot x_1 = \frac{b_1^2}{y} \cdot y_1 = \frac{c_1^2}{z} \cdot z_1$$

und wenn die Grösse dieser Producte mit λ bezeichnet wird, so ist die *Länge desselben* Durchmessers bestimmt durch

$$D^2 = \lambda^2 \left(\frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4}\right).$$

Zur Ermittelung der Grösse λ, welcher der Durchmesser $2D$ proportional ist, beachte man, dass die Endpunkte desselben in dem Ellipsoide 27) liegen, und setze in die Gleichung desselben

$$x_1 = \frac{x}{a_1^2} \cdot \lambda, \; y_1 = \frac{y}{b_1^2} \cdot \lambda, \; z_1 = \frac{z}{c_1^2} \cdot \lambda;$$

dadurch entsteht

$$\left(\frac{x^2}{a^2 a_1^4} + \frac{y^2}{b^2 b_1^4} + \frac{z^2}{c^2 c_1^4}\right) \lambda^2 = 1,$$

folglich ist

$$D^2 = \left(\frac{x^2}{a_1^4} + \frac{y^2}{b_1^4} + \frac{z^2}{c_1^4}\right) : \left(\frac{x^2}{a^2 a_1^4} + \frac{y^2}{b^2 b_1^4} + \frac{z^2}{c^2 c_1^4}\right).$$

Diese Division ergiebt

59) $$D^2 = d_1^2,$$

und mithin sind die Wurzeln der Gleichung 57) zugleich auch die Quadrate der Halbdurchmesser des Ellipsoides, welche auf den Ebenen 58*) und 58**) senkrecht stehen. Da ausserdem diese Wurzeln nach der Gleichung 57) auch den Bedingungen

$$d_1^2 + d_2^2 = a^2 + b^2 + c^2 + x^2 + y^2 + z^2,$$
$$d_1^2 d_2^2 = a^2 b^2 c^2 \left(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\right)$$

genügen, so bilden auch $2d_1$ und $2d_2$ mit dem Durchmesser des Punktes $m = (x, y, z)$ ein System von conjugirten Durchmessern, und weil endlich die Durchmesser $2d_1$ und $2d_2$ auf einander senkrecht stehen, so sind sie die Achsen des zur Berührungsebene des Punktes m parallelen Centralschnittes

60) $$\frac{x}{a^2} \cdot x_1 + \frac{y}{b^2} \cdot y_1 + \frac{z}{c^2} \cdot z_1 = 0.$$

Werden nun vom Mittelpunkte auf die Berührungsebene 58) die Senkrechten ξ, η, ζ gefällt, so sind die Winkel, welche diese mit den Achsen bilden, durch die Gleichungen

$$\cos(\xi a) = \frac{\xi x}{a^2}, \; \cos(\xi b) = \frac{\xi y}{b^2}, \; \cos(\xi c) = \frac{\xi z}{c^2},$$
$$\cos(\eta a) = \frac{\eta x}{a_1^2}, \; \cos(\eta b) = \frac{\eta y}{b_1^2}, \; \cos(\eta c) = \frac{\eta z}{c_1^2},$$
$$\cos(\zeta a) = \frac{\zeta x}{a_2^2}, \; \cos(\zeta b) = \frac{\zeta y}{b_2^2}, \; \cos(\zeta c) = \frac{\zeta z}{c_2^2}$$

bestimmt, und wird ebenso vom Mittelpunkt auf die Normalebene 51) die Senkrechte t gefällt, so ist

$$\cos(ta) = \frac{a^4}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} \cdot \frac{t}{x}, \; \cos(tb) = \frac{b^4}{(b^2 - c^2)(b^2 - a^2)} \cdot \frac{t}{y},$$
$$\cos(tc) = \frac{c^4}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)} \cdot \frac{t}{z}.$$

Da nun bekanntlich

$$\cos(t\eta) = \cos(ta)\cos(\eta a) + \cos(tb)\cos(\eta b) + \cos(tc)\cos(\eta c),$$
$$\cos(t\zeta) = \cos(ta)\cos(\zeta a) + \cos(tb)\cos(\zeta b) + \cos(tc)\cos(\zeta c),$$

so erhält man durch Einsetzung der obigen Werthe

$$\cos(t\eta) = -\frac{t\eta}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\cdot\left(a^4\cdot\frac{b^2-c^2}{a_1^2} + b^4\cdot\frac{c^2-a^2}{b_1^2} + c^4\cdot\frac{a^2-c^2}{c_1^2}\right),$$
$$\cos(t\zeta) = -\frac{t\zeta}{(a^2-b^2)(b^2-c^2)(c^2-a^2)}\cdot\left(a^4\cdot\frac{b^2-c^2}{a_2^2} + b^2\cdot\frac{c^2-a^2}{b_2^2} + c^4\cdot\frac{a^2-c^2}{c_2^2}\right),$$

und durch einige Reductionen

$$\cos(t\eta) = \frac{t\eta\, d_1^4}{a_1^2 b_1^2 c_1^2},\quad \cos(t\zeta) = \frac{t\zeta\, d_2^4}{a_2^2 b_2^2 c_2^2}.$$

Nun ist aber nach dem bekannten Satze von dem constanten Producte der conjugirten Durchmesser einer Fläche zweiten Grades

$$a_1^2 b_1^2 c_1^2 = \eta^2 d_1^2 (d_1^2 - d_2^2),\quad a_2^2 b_2^2 c_2^2 = \zeta^2 d_2^2 (d_2^2 - d_1^2)$$

folglich

$$\cos(t\eta) = \frac{d_1^2}{d_1^2 - d_2^2}\cdot\frac{t}{\eta},\quad \cos(t\zeta) = \frac{d_2^2}{d_2^2 - d_1^2}\cdot\frac{t}{\zeta}.$$

Wenn man noch beachtet, dass die Senkrechten η und ζ auch auf einander senkrecht stehen, dass $d_1^2 < d_2^2$ und dass die drei Senkrechten η, ζ und t in der Centralebene 60) liegen, so ergiebt sich

$$61)\qquad \tang(t\eta) = -\frac{d_2^2\eta}{d_1^2\zeta},\quad \tang(t\zeta) = \frac{d_1^2\zeta}{d_2^2\eta}.$$

Die Gleichung dieses Centralschnittes ist

$$\frac{z^2}{d_2^2} + \frac{y^2}{d_1^2} = 1,$$

da, wie oben bewiesen, d_1 und d_2 die Halbachsen desselben sind; die Senkrechte t, welche vom Mittelpunkte auf die Ebene 51) gefällt wurde, ist durch die Gleichung

$$z = \tang(t\eta)\,.\,y$$

dargestellt, und diese geht durch Einsetzung des Werthes 61) über in

$$62)\qquad \frac{\eta}{d_1^2}\cdot y + \frac{\zeta}{d_2^2}\cdot z = 0.$$

Ferner sind in der Centralebene 60) in Bezug auf die Durchmesser $2d_1$ und $2d_2$ als Coordinatenachsen η und ζ die Coordinaten des Punktes, wo die Normale des Punktes m die Ebene trifft, folglich ist

$$63)\qquad \frac{y}{\eta} - \frac{z}{\zeta} = 0$$

die Gleichung des Durchmessers, welcher durch diesen Punkt geht.

Diese Geraden 62) und 63) sind aber offenbar conjugirte Durchmesser des Centralschnittes 60), bilden also auch mit der vom Mittelpunkte nach dem Punkte m des Ellipsoides gezogenen Geraden ein System von conjugirten Durchmessern dieser Fläche. Die Ebene, welche durch den *Punkt m und* die Gerade 63) geht, ist die normale Centralebene und mithin

ist die Gerade 62) oder die Senkrechte t der zu dieser Ebene conjugirte Durchmesser des Ellipsoides.

Hieraus ergiebt sich folgender Satz:

Die Achsen eines Ellipsoides werden von der Normalebene, welche auf dem zur normalen Centralebene desselben Punktes conjugirten Durchmesser senkrecht steht, und von der Berührungsebene desselben Punktes so geschnitten, dass die Schnittpunkte mit den Focalpunkten ein System von harmonischen Punkten bilden.

XV.

Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie.

Von Dr. ED. ZETZSCHE.

III. Wechsel, Relais, Translation und Zweigsprechen, Schleifen, Blitzableiter.

1. Die Batterie- und Linienwechsel.

Wechsel oder Umschalter nennt man diejenigen Telegraphenapparate, welche dazu dienen, dem elektrischen Strome den nach dem jedesmaligen Zwecke allein zulässigen Weg durch die anderen Apparate anzuweisen. Kaum dürfte es irgend eine Telegraphenstation geben, in welcher gar keine Vorrichtung zum Umschalten vorhanden wäre. Die Wechsel sind daher trotz ihrer grossen Einfachheit sehr wichtige und nützliche Apparate; auch finden sie sich sehr frühzeitig im Gebrauch, da sich bei steigender Benutzung der Telegraphen sehr bald das Bedürfniss herausstellte, den Weg des Stromes in dem einen oder dem anderen Falle zu verlegen, also zwischen zwei oder mehreren Punkten bald eine leitende Verbindung herzustellen, bald wieder dieselbe zu unterbrechen. Die dazu in Anwendung gebrachten Mittel waren zu verschiedenen Zeiten und für verschiedene Zwecke verschieden.

Da es überhaupt nur dann möglich ist, zu telegraphiren, wenn man einen elektrischen Strom abwechselnd eine Zeitlang circuliren lässt und dann wieder unterbricht, so ist bei jedem Telegraphen eine Vorrichtung

nöthig, welche ein abwechselndes Schliessen und Unterbrechen des Stromes gestattet, den dazu bestimmten Apparat nennt man aber, obgleich seine Bestimmung mit der des Wechsels ganz nahe zusammenfällt, Taster, Schlüssel, Zeichengeber, auch wohl Commutator, wenn er Ströme von wechselnder Richtung in die Telegraphenleitung sendet. Zuerst wendete man für den vorliegenden Zweck bewegliche Dräthe an, welche bald in je zwei Quecksilbernäpfchen eintauchten, bald aus ihnen herausgehoben wurden und so in dem einen Falle gewisse Verbindungen zwischen den mit Quecksilber gefüllten Näpfchen und den mit diesen verbundenen, zu den anderen Apparaten oder zur Luftleitung führenden Dräthen herstellten, in dem anderen Falle aber diese Verbindung wieder unterbrachen. Derartige Einrichtungen enthielt nicht nur der zweite mechanische Telegraph von William Fothergill Cooke (im Februar 1837), sondern auch die Telegraphen von Morse, Steinheil und der 1838 patentirte electrochemische Telegraph von Edward Davy (vergl. Shaffner, *telegraph manual*, New-York, 1859, S. 190 u. 196, 437, 165, 255). Später oder wohl selbst gleichzeitig wurden die in Quecksilbernäpfchen eintauchenden Dräthe ersetzt durch federnde Metallstreifen, welche bald auf einem leitenden, bald auf einem isolirenden anderen Theil des Apparates aufschleiften; ein solcher, von Charles Wheatstone und W. F. Cooke für ihren „Einfachen Nadeltelegraph" benutzter Schlüssel ist auf S. 91 des ersten Jahrganges dieser Zeitschrift beschrieben und dort auf Tafel V Fig. 23 abgebildet. Bei den jetzt vorwiegend gebrauchten Morse'schen Drucktelegraphen aber hat der Taster im Wesentlichen die im ersten Jahrgange S. 95 erklärte und daselbst auf Tafel V Fig. 25 abgebildete Einrichtung. Bei anderen Telegraphen ist die Einrichtung des Zeichengebers durch die Einrichtung der übrigen Apparate bedingt und deshalb soll hier nicht weiter darauf eingegangen werden; dass aber an ihnen bis in die neueste Zeit Federn zur Unterbrechung des Stromes wiederholt vorgeschlagen und verwendet worden sind, zeigen schon die vorausgegangenen Artikel I und II über Copirtelegraphen und über Typendrucktelegraphen. (Jahrg. 5, S. 30 und S. 305.)

Auch von den eigentlichen Wechseln giebt es zwei verschiedene Arten; früher bediente man sich der Klemmenwechsel, jetzt fast allgemein der Lamellenwechsel, weil die letzteren mit besonderer Einfachheit und Leichtigkeit eine sehr grosse Mannigfaltigkeit in der Abänderung des Stromlaufes darbieten. Ausserdem unterscheidet man die Batteriewechsel, d. h. diejenigen, welche nur zu dem Zwecke vorhanden sind, dass man nach Maassgabe der Länge oder der Beschaffenheit der Luftleitungen mit einem grösseren oder kleineren Theile der Telegraphir- oder Linienbatterie telegraphiren kann, von den Linienwechseln, durch welche der Stromlauf durch die Apparate abgeändert wird.

Die Klemmenwechsel bestehen aus zweierlei durch den Apparattisch hindurchgehenden Klemmschrauben, in welche unter dem Apparat-

tische je ein Leitungsdrath eingeschraubt ist. Die einen enden über dem Tische in eine kleine Metallplatte und heissen Wechselweibchen; Fig. 1 Taf. V zeigt ein solches im Durchschnitt: *d* ist der Leitungsdrath, *a* die Metallplatte, *T* der Tisch. Die anderen, die Wechselmännchen, tragen über dem Tische noch einen kleinen metallenen Arm, welcher um die Achse der Klemmschraube drehbar ist, aber stets mit ihr in leitender Verbindung bleibt. Jedem Männchen stehen zwei oder mehrere Weibchen gegenüber, wie es Fig. 2 Taf. V deutlich macht, so dass der etwas federnde Arm des Männchens auf die Platte des einen oder des anderen Weibchens aufgelegt werden kann, wodurch der im Männchen eingeschraubte Draht mit dem Drahte desjenigen Weibchens, auf dem der Arm aufliegt, in leitende Verbindung gesetzt wird. Solche Wechsel*) waren noch unlängst in den Telegraphenstationen der österreichischen Staatseisenbahnen in ausgedehntem Gebrauche, so lange man sich dort noch der Bain-Ekling'schen Glockenapparate bediente. So hatte z. B. ein Linienwechsel auf Mittelstationen folgende Einrichtung: die beiden in die Station einmündenden Luftleitungen L_1 und L_2 (Fig. 3 Taf. V) führen nach 1 und 2; vom Weibchen 1 führt ein Draht durch die Apparate *A* und von da nach 2; das Weibchen 3 und das Männchen 4 sind unter sich und mit der Erde *E* leitend verbunden. In der gezeichneten Stellung liegt kein Männchen auf einem Weibchen, folglich geht jeder Strom aus einer der Luftleitungen L_1 oder L_2 durch die Apparate *A* der Mittelstation und dann in die andere Luftleitung L_2 oder L_1 weiter; legt man dagegen den Arm des Männchens 2 auf das Weibchen 1, so geht der Strom aus einer der Leitungen direct in die andere Leitung, und nur ein ganz schwacher Theilstrom geht durch die Apparate *A*, so dass auf diesen die Zeichen nicht mit erscheinen; liegt der Arm des Männchens 2 auf dem Weibchen 3, oder der Arm des Männchens 4 auf dem Weibchen 1, so geht im ersten Falle der Strom aus L_2 direct zur Erde, der Strom aus L_1 durch die Apparate *A*, aber nicht nach L_2 weiter, sondern in die Erde, im zweiten Falle dagegen der Strom aus L_1 direct zur Erde, der Strom aus L_2 durch die Apparate *A* und zur Erde, nicht aber nach L_1; liegt endlich der Arm des Männchens 4 auf 1 und zugleich der Arm des Männchens 2 auf 3, so sind beide Leitungen L_1 und L_2 direct mit der Erde verbunden, was unter Anderem bei Gewittern zur Schonung der Apparate nöthig ist. Genau dieselben Dienste leistet der im Wesentlichen mit diesem Wechsel genau übereinstimmende, anscheinend minder einfache Umschalter, welcher im Katechismus der elektrischen Telegraphie von Galle S. 153 beschrieben ist und auf sächsischen Mittelstationen noch mehrfach gebraucht wird; bei diesem Umschalter legt sich ein starrer

*) Eine frühere Form derselben und ihre Anwendung findet sich ausführlich beschrieben in: Galle, Katechismus der elektrischen Telegraphie. 2. Auflage. Leipzig 1859. S. 150 bis 153.

drehbarer Arm der einen Klemme an federnde Theile der anderen Klemme an, in einer Weise, welche zuerst Siemens und Halske an ihrem Zeigertelegraph (vergl. Schellen, der elektromagnetische Telegraph, 2. Auflage, Braunschweig 1854, S. 128) benutzt zu haben scheinen. Wo eine grössere Mannigfaltigkeit in den Umschaltungen nöthig ist, dürfte der Klemmenwechsel von E. Matzenauer (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1855, S. 29) gute Dienste thun, bei welchem die Männchen im Kreise stehen, und die Weibchen anstatt der Platten über dem Apparattische in ringförmige Streifen enden, welche als Vollkreise concentrisch innerhalb und ausserhalb jenes Kreises liegen, auf welchem die Männchen stehen.

Als Batteriewechsel erhält ein Klemmenwechsel die Anordnung in Fig. 4 Taf. V: um das mittelbar mit der Luftleitung L verbundene Wechselmännchen a stehen im Kreise herum eine Anzahl Weibchen 1, 2 bis 6, welche mit den positiven Polen der Linienbatterien I, II bis VI verbunden sind, während der negative Pol der ersten Batterie I mit der Erde, der negative Pol jeder folgenden Batterie aber immer mit dem positiven Pole der vorhergehenden Batterie verbunden ist. Je nachdem nun der Arm des Männchens a auf 1, 2... oder 6 gestellt wird, wird beim Schliessen der Kette der Strom von einer, zwei . . . oder sechs Batterien in die Leitung gesendet.

Die Lamellenwechsel sind in der Form, in welcher sie zuerst von Steinheil angegeben wurden, noch jetzt in den Stationen der österreichischen Staatstelegraphen gebräuchlich. Fig. 5 Taf. V zeigt einen solchen Wechsel im Grundriss und im Durchschnitt. Zwei über einander liegende, sich kreuzende Reihen von schmalen Messinglamellen sind durch eine isolirende Schicht, z. B. durch eine trockene Holzplatte, von einander getrennt; die Streifen einer jeden Reihe aber sind ebenfalls durch zwischengelegte isolirende Holzstreifen von einander getrennt; an den Kreuzungsstellen sind sämmtliche Messingstreifen durchbohrt und in die eingebohrten Löcher können messingene Stifte oder Stöpsel (Fig. 6 Taf. V) eingesteckt werden, welche von oben und von unten an den Stellen, wo sie in den Lamellen stecken, federnd aufgeschlitzt sind, damit sie sich gut an die Lamellen anlegen; der Kopf der Stifte ist von Elfenbein; wird ein Stift in irgend ein Loch eingesteckt, so verbindet er die beiden an dieser Stelle sich kreuzenden Lamellen. An dem einen Ende einer jeden Lamelle ist noch ein kleineres Loch, in welches ein Leitungsdrath eingesteckt und mittelst einer Klemmschraube befestigt wird. In Fig. 5 wurde der Einfachheit halber nur ein Wechsel mit drei Verticallamellen a, b, c und zwei Horizontallamellen d und e gezeichnet; ein solcher reicht vollkommen hin, um den Klemmenwechsel Fig. 3 zu ersetzen und übertrifft ihn mindestens in der Beziehung, dass er die Möglichkeit bietet, die beiden Leitungen L_1 und L_2 bei völligem Ausschluss der Apparate A entweder unter sich

direct, oder beide mit der Erde zu verbinden. Denkt man sich die eine Luftleitung L_1 mit a, die andere L_2 mit b und die Erdleitung mit c leitend verbunden, von den unter sich gehörig verbundenen Apparaten aber einen Drath nach e und einen anderen nach d geführt, so wird, wenn man einen Stöpsel in das Loch 1 und einen in das Loch 4 steckt, der Strom aus L_1 nach a, durch den Stöpsel in 1 nach d, durch die Apparate nach e und durch den Stöpsel in 4 nach b und L_2 gehen; stöpselt man in 2 und in 3, so geht der Strom aus L_1 zwar auch durch die Apparate und nach L_2, aber er durchläuft die Apparate in der entgegengesetzten Richtung; durch diesen Richtungswechsel wird zugleich eine etwa im Anker der Elektromagnete zurückgebliebene Polarität beseitigt. Stöpselt man in 1, 4 und 6, oder in 2, 3 und 5, so geht der Strom aus L_1 durch die Apparate und c zur Erde, der Strom aus L_2 aber direct nach c und zur Erde; stöpselt man in 1, 4 und 5, oder in 2, 3 und 6, so geht der Strom aus L_1 direct, der Strom aus L_2 aber durch die Apparate zur Erde. Stöpselt man endlich in 1 und 3, oder in 2 und 4, so geht der Strom aus L_1 sofort nach L_2, ohne die Apparate zu durchlaufen; stöpselt man in 1, 3 und 5, oder in 2, 4 und 6, so geht jeder Strom aus L_1 und L_2 direct zur Erde; zugleich bleibt in den beiden letzten Fällen dem Strome, weil zwischen d und e keine leitende Verbindung vorhanden ist, durchaus kein Weg durch die Apparate offen, es kann daher auch nicht einmal ein Zweigstrom durch die Apparate gehen, die Apparate sind völlig ausgeschlossen, also auch gegen atmosphärische Einflüsse, namentlich gegen Blitzschläge geschützt.

Die Lamellenwechsel, welche in Sachsen, Preussen, den Niederlanden u. s. w. im Gebrauch sind (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 78; 1855, S. 59, 177 und 217), unterscheiden sich von dem vorstehend beschriebenen nicht wesentlich; sie enthalten nur weit breitere und stärkere Messinglamellen und erhalten dadurch unnöthiger Weise ein sehr massiges Aussehen; die Stöpsel sind oft nicht geschlitzt, sondern conisch; die Lamellen der unteren Reihe sind an den Kreuzungsstellen verdickt, so dass sie bis zu den oberen heraufreichen, ohne sie zu berühren, und die conischen Löcher sind nun halb in der einen, halb in der anderen Lamelle, in ähnlicher Weise, wie dies Fig. 7 Taf. V zeigt, wo ein kleinerer derartiger Batteriewechsel abgebildet ist; der Drath E führt zur Erde, der Drath T zu dem hinteren Contacte des Tasters, von wo der Strom in die Linie gesendet wird; in 1 ist zu stöpseln, wenn mit einer Batterie, in 2, wenn mit zweien, und in 3, wenn mit drei Batterien gesprochen werden soll.

Der wichtigste Dienst der Linienwechsel besteht darin, dass sie gestatten, die oft zahlreichen, in eine und dieselbe Station (Wechselstation) einmündenden Telegraphenleitungen theils direct, theils auch behufs der Translation (in Translationsstationen) nach Bedarf ganz beliebig unter einander zu verbinden, während zu anderen Zeiten wieder

jede von der anderen getrennt, allein in Betrieb genommen werden kann. Das Schema der Einschaltung einer solchen Translationsstation folgt einige Seiten weiter unten.

2. Das Relais.

Wollte man durch die elektrischen Ströme, welche die Telegraphenleitung durchlaufen und als Linienströme bezeichnet werden mögen, den Morse'schen Schreibapparat unmittelbar in Gang setzen, so müsste man sehr kräftige Batterien anwenden, wenn in grösserer Entfernung von einander gelegene Stationen mit einander verkehren sollten; denn zum Eindrücken des Schreibstiftes in das Papier, ja schon zur Bewegung des Schreibhebels selbst ist eine nicht geringe elektromagnetische Kraft erforderlich. Aber auch bei den kräftigsten Batterien kann man bei sehr langen Leitungen nicht mehr auf völlige Sicherheit des Telegraphirens rechnen und gleichwohl war es für eine gedeihliche Entwickelung der Telegraphie, für ein vielseitiges und wirksames Eingreifen derselben in die verschiedenen Verhältnisse des Lebens unbedingt nothwendig, dass man weitgehende Depeschen, mit thunlichster Vermeidung des Umtelegraphirens oder Weitertelegraphirens derselben durch Menschenhand, auf möglichst grosse Entfernungen unmittelbar fortgeben könne. Am vollkommensten erreicht man dies nur durch die Anwendung zweier vermittelnder Telegraphenapparate: durch Relais und Translatoren. Zunächst wird man nämlich mit derselben Linienbatterie um so weiter telegraphiren können, je geringer die Stromstärke ist, bei welcher die telegraphischen Zeichen auf der Empfangsstation noch deutlich und zuverlässig erscheinen, eine je geringere Kraft also der auf der Empfangsstation in die Leitung eingeschaltete Elektromagnet auszuüben hat. Anstatt daher durch den Linienstrom die Anziehung des Schreibhebels zu bewirken, lässt man viel zweckmässiger den Linienstrom durch die Rollen eines Elektromagnets E in Fig. 8 Taf. V gehen, dessen Anker A an einem möglichst leichten und leicht beweglichen metallenen Hebel ab sitzt; dieser Hebel ist an irgend einer Stelle, z. B. an seiner Drehachse c mit dem einen Pole der Batterie B (der Localbatterie), welche den Schreibhebel des in den Kreis der Localbatterie eingeschalteten Schreibapparats S in Gang setzen soll, verbunden, während das vordere Ende b des Hebels zwischen zwei Stellschrauben s und s_1 spielt, von denen die eine s isolirt, die andere s_1 aber mit dem anderen Pole der Localbatterie B leitend verbunden ist; so oft nun der Anker A des Elektromagnetes E angezogen wird und sich in Folge dessen der Hebel ab mit seinem vorderen Ende b auf die Stellschraube s_1 auflegt, ist der Kreis der Localbatterie B geschlossen, der Schreibhebel wird angezogen und drückt ein Zeichen in den Papierstreifen ein. Die Länge des eingedrückten Zeichens hängt von der Dauer des Linienstroms ab; denn die Localbatterie bleibt genau so lange geschlossen, als der

Linienstrom in der Luftleitung ununterbrochen erhalten wird, und so lange bleibt auch der Schreibstift in den Papierstreifen eingedrückt; hört dagegen der Linienstrom auf, so zieht eine Spannfeder *f* den Relaishebel *ab* in seine Ruhelage zurück, so dass sich sein vorderes Ende *b* wieder an die isolirte Stellschraube *s* anlegt, wodurch der Localstrom unterbrochen und der Schreibhebel ebenfalls durch eine Spannfeder in die Ruhelage zurückgeführt wird. — Da der Schliessungskreis der Localbatterie verhältnissmässig kurz, ihr Widerstand im Schliessungskreis also gering ist, muss auch der Widerstand in der Batterie möglichst verringert werden; man verwendet daher zur Localbatterie nicht, wie zur Linienbatterie, viele kleine Elemente, sondern wenige grosse; die Rollen des Elektromagnetes am Schreibapparate aber bildet man aus wenigen Lagen stärkeren Drathes.

Die Erfindung des Relais fällt bereits in das Jahr 1837. Nach amerikanischen Schriftstellern soll zwar Joseph Henry, Professor am *Princeton College*, schon in der letzten Hälfte des Jahres 1836 eine ähnliche Vorrichtung erdacht und bei seinen Vorlesungen gebraucht haben; doch ist kein weiterer Beleg für diese Behauptung bekannt (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 266). Dagegen fassten William Fothergill Cooke und Charles Wheatstone im April 1837, also bereits zwei Monate nach ihrer Vereinigung, den fruchtbaren Gedanken, einen Localstrom anzuwenden, und erhielten auf den neu erfundenen Apparat ein Patent am 12. Juni 1837 (nach Shaffner und Highton und nach dem Polytechnischen Centralblatte, 1839, S. 456 [nach *Repertory of Patent Inventions* XI, S. 1—33 und 65—76]; in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1855, S. 265, ist der 12. Mai 1837 angegeben); Cooke und Wheatstone wendeten das Relais zuerst für den ihrem Nadeltelegraph beigegebenen Wecker an und zwar so, dass eine durch den Linienstrom abgelenkte Magnetnadel bei ihrer Ablenkung einen Drath in zwei Quecksilbernäpfchen eintauchte und dadurch den Kreis der Localbatterie schloss, deren Strom nun die Anziehung des Ankers eines Elektromagnetes veranlasste, wodurch die Hemmung eines Uhrwerkes am Wecker ausgerückt wurde (Shaffner, *telegraph manual*, S. 194 ff.), oder auch der Klöppel durch die elektromagnetische Anziehung unmittelbar an die Weckerglocke anschlug (Schellen, elektromagnetischer Telegraph, Braunschweig 1854, S. 83 bis 87). Die Anwendung eines Relais bei den Morse'schen Druckapparaten nimmt Morse selbst in seinem Patente vom 11. April 1846 in Anspruch, insofern er es zuerst im Mai 1844 auf der Linie Washington—Baltimore in Anwendung gebracht habe. Der zur Einrichtung und Einführung Morse'scher Telegraphen nach Preussen berufene Amerikaner Robinson brachte 1848 das Relais mit nach Deutschland. Auch für Zeigerapparate kann ein Relais benutzt werden; so wird z. B. beim Zeigerapparate von Kramer der Zeiger nicht durch den Linienstrom, sondern durch einen Localstrom auf der Buchstabenscheibe fortgerückt.

Die in Fig. 8 Taf. V skizzirte Einrichtung des sogenannten Schwanenhalsrelais ist von Morse selbst angegeben worden; der Hebel liegt horizontal, der Elektromagnet steht vertical; dieses Relais ist in Oesterreich fast ausschliesslich in Gebrauch und es arbeitet sich mit ihm sehr gut, da dasselbe ganz einfach und dennoch sehr empfindlich ist und sich bequem handhaben lässt. Minder bequem wird das Relais, wenn der Elektromagnet horizontal, der Relaishebel also vertical wie ein Pendel gestellt wird; eine solche Einrichtung hat das Relais von Nottebohm (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1855, S. 97). Hipp versah das Relais, um dessen Empfindlichkeit zu erhöhen, mit einer zweiten Spannfeder, welche ebenfalls am hinteren Ende *a* des Relaishebels *ab*, aber nach der anderen Seite hin liegt als *f*. Eine Abbildung dieses Relais befindet sich im Polytechnischen Centralblatt, 1853, S. 193, nach dem Polytechnischen Journal, 1852, November, S. 193 (vergl. auch Fig. 10 Taf. V). Siemens und Halske versahen beide Kerne des Elektromagnetes mit flügelförmigen Ansätzen, wie Fig. 9 zeigt, und benutzten eine Verlängerung des einen Ansatzes als Relaishebel; der Kern in der Rolle *a* steht fest, der in der Rolle *b* ist beweglich; beide Kerne bekommen, wenn der Strom sie umkreist, entgegengesetzte magnetische Polarität und ihre Ansätze ziehen sich in Folge dessen an, wodurch sich *c* an s_1 anlegt und die Localbatterie schliesst. Ein anderes Relais von Siemens und Halske wurde auf S. 97 des ersten Jahrganges dieser Zeitschrift beschrieben; es ist in Norddeutschland ziemlich verbreitet, wird aber häufig etwas abweichend construirt. Es wird nämlich der Hebel *ab* (Fig. 10 Taf. V), welcher den Anker des Elektromagnetes bildet, mit einem rechtwinklig gegen *ab* stehenden Arme *c* fest verbunden, welcher, so oft der Anker einmal angezogen wird und darauf in seine Ruhelage zurückgeht, eine Schwingung zwischen den Stellschrauben *s* und s_1 macht; liegt aber *c* an s_1, so ist die Localbatterie geschlossen; der Relaishebel ist mit einer doppelten Spannfeder *f* und f_1 versehen, deren Spannung durch die Stangen *d* und *e* von der Schraube *g* aus regulirt wird. Das Ganze ist in ein dosenförmiges Gehäuse eingeschlossen (daher Dosenrelais) und wird in der in Fig. 10 im Grundriss skizzirten Form besonders von Robert Thümmel in Leipzig gearbeitet.

Alle diese Relais leiden an einem Uebelstande, welcher sie zwar nicht unbrauchbar, aber doch unbequem macht; es muss nämlich bei ihnen die Spannfeder stets nach der Stärke des Linienstromes regulirt werden, wenn die Zeichen auf dem Relais sicher und deutlich erscheinen sollen. Wäre die Feder zu stark gespannt, so würden die Zeichen gar nicht erscheinen, weil der in den Kernen des Elektromagnetes entstehende Elektromagnetismus nicht stark genug wäre, um den von der Feder zurückgehaltenen Relaishebel anzuziehen. Wäre dagegen die Feder zu schwach gespannt, so würde der Relaishebel auch nach dem Aufhören des Linienstromes noch *angezogen bleiben*, weil der Elektromagnetismus in den Kernen nicht

augenblicklich wieder verschwindet, also der Anker noch eine Zeitlang am Elektromagnet haften bleibt; dadurch würden die telegraphischen Zeichen unter einander verschwimmen und zusammenfliessen. Zur Beseitigung des genannten Uebelstandes, welcher leicht zu einer Fehlerquelle werden kann, sind verschiedene Vorschläge gemacht worden. Man könnte die Spannfeder durch einen permanenten Richtmagnet ersetzen, welchen man dem Anker gegenüber stellt; dann muss aber der Anker selbst einen Theil des Kernes des Elektromagnetes bilden. In Fig. 11 ist eine solche Construction skizzirt, welche von De Lafollye angegeben wurde; eine ausführlichere Beschreibung derselben und einiger anderer habe ich im polytechnischen Centralblatte von 1858, S. 1521 nach dem *Bulletin de la société d'encouragement, Paris, avril* 1858 gegeben. A und B sind die beiden Multiplicationsrollen des Relais, der eiserne Relaishebel ab ist bei a drehbar mit dem Kern in der Rolle B verbunden, bildet also eine Fortsetzung dieses Kernes und theilt dessen Magnetismus; M ist der Richtmagnet. Geht kein Strom durch die Linie, so zieht der Richtmagnet M den eisernen Hebel an die isolirte Stellschraube s; geht ein Strom durch die Linie, welcher dem Pole m des Richtmagnetes M gegenüber bei c einen mit m gleichnamigen Pol erzeugt, so wird der Hebel ab entgegengesetzt magnetisch und bleibt an s liegen, weil er von dem näheren Magnete M stärker angezogen wird, als von dem entfernteren elektromagnetischen Kerne c in der Rolle A; geht endlich ein Strom durch die Linie, welcher m gegenüber bei c einen m entgegengesetzten Pol entwickelt, so wird der Hebel ab mit m gleichnamig magnetisch, daher von dem Richtmagnete M abgestossen und gleichzeitig von dem Elektromagnete c angezogen, legt sich an die Stellschraube s_1 an und schliesst die Localbatterie; nach Aufhören des Stromes zieht der Richtmagnet M den entmagnetisirten Hebel ab wieder in die Ruhelage an s zurück. Dieses Relais spricht also nur für Ströme von einer bestimmten Richtung an. In gewisser Beziehung gerade entgegengesetzt ist die von dem preussischen Obertelegraphist Fr. Schaack vorgeschlagene Anordnung (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1858, Heft 9 und 10); der Anker dieses Relais ist ein doppelt T-förmiger permanenter Magnet (Fig. 12 Taf. V) mit zwei Nordpolen N und N_1 und zwei Südpolen S und S_1 und dreht sich um die Achse cc_1; die beiden Kerne in den Rollen des Elektromagnetes sind nicht zu einem Hufeisen verbunden, sondern es stehen die Enden auf beiden Seiten frei aus den Rollen heraus und es tritt das eine Paar der vorstehenden Pole P_1 und P_2 mit N und N_1, das andere Paar P_3 und P_4 mit S und S_1 in Wechselwirkung. Wird mit Strömen von stets gleicher Richtung telegraphirt, so ist die Anordnung nach Fig. 13 Taf. V zu wählen und der Elektromagnet so einzuschalten, dass P_1 und P_2 durch den Linienstrom zugleich Nordpole, P_3 und P_4 zugleich Südpole werden; so lange dann kein Strom in der Linie circulirt, werden die vier Pole des Ankers von den Eisenkernen angezogen, der

Anker dreht sich um *c* und legt sich an den Ruhecontact *s* an; sobald ein Strom durch die Linie gesandt wird, werden *N* und N_1 von den mit ihnen gleichnamig magnetisch gewordenen Polen P_1 und P_2, ebenso *S* und S_1 von den mit diesen gleichnamig magnetisch gewordenen Polen P_3 und P_4 abgestossen, und der Anker schliesst die Localbatterie, indem er sich an den Arbeitscontact s_1 anlegt. Beim Telegraphiren mit Strömen von wechselnder Richtung (z. B. mit Inductionsströmen) müssen P_1 und P_2 auf einerlei Seite des Ankerschenkels NN_1 liegen, wie Fig. 14 Taf. V zeigt, und ausserdem muss der Elektromagnet so eingeschaltet sein, dass beim Schliessen des inducirenden Stromes P_1 durch den inducirten Strom (den Schliessungsstrom) zum Nordpol, P_2 zum Südpol wird; denn dann wird *N* von P_1 abgestossen, N_1 von P_2 angezogen und der Anker schliesst die Localbatterie, indem er sich an s_1 anlegt und daran liegen bleibt, bis beim Aufhören des inducirenden Stromes ein Inductionsstrom von entgegengesetzter Richtung (der Oeffnungsstrom) durch die Linie geht, P_1 zum Südpole und P_2 zum Nordpole macht und somit den Anker wieder in die Ruhelage an die Stellschraube *s* zurückführt, da dann *N* von P_1 angezogen, N_1 aber von P_2 abgestossen wird. Bei der letzteren Einschaltung müssen also stets zwei Ströme von entgegengesetzter Richtung durch die Linie gehen, um ein telegraphisches Zeichen hervorzubringen; allein man kann dabei Zeichen von verschiedener Zeitdauer geben, z. B. Striche und Punkte, wie es bei dem Telegraphiren mit dem Morse üblich ist. Ganz neuerdings dagegen hat Thomas Allan (wie früher Edward Brailsford Bright in Liverpool, in einem Patente vom 13. Januar 1858) vorgeschlagen, anstatt des Morse'schen Alphabetes aus Strichen und Punkten ein Alphabet aus Punkten allein zu benutzen und für dieses hat Allan ein Relais construirt, welches nicht allein keiner Spannfeder bedarf, sondern auch noch einige andere Vortheile bietet. Für jedes telegraphisches Zeichen ist nur ein einziger Strom erforderlich, aber je zwei auf einander folgende Ströme haben stets entgegengesetzte Richtung; dadurch werden in Folge der besonderen Einrichtung des Schreibapparats die Punkte in zwei Reihen in regelmässiger Abwechselung im Zickzack in den Papierstreifen eingedrückt. Allan bildet nun die Vocale *e*, *i*, *a*, *o*, *u*, *y* aus Gruppen von 1 bis 6 Punkten, alle Consonanten und sonstige Zeichen aber aus Combination von je zwei dieser Gruppen mit einem Zwischenraume von der Länge eines Punktes, während zwischen je zwei Buchstaben ein Zwischenraum von der Länge zweier Punkte bleibt. Die Einrichtung des Relais wird aus dem Grundrisse in Fig. 15 Taf. V deutlich: Die Luftleitungen *L* und L_1 sind in die Klemmen *l* und l_1 geführt, welche mit den Rollen zweier Elektromagnete in Verbindung stehen; auf die vier Pole *N* und *S* der beiden Elektromagnete sind durch Schräubchen je ein excentrisches Plättchen *a* aufgeschraubt, durch welche man die Pole ihrem Anker *bc* nach Bedarf nähern, also die Empfindlichkeit des Relais reguliren kann; als Anker und Relaishebel dient

ein permament magnetischer Stahlstab bc, welcher hohl ist, damit er im Verhältniss zu seinem Gewichte die grösste Menge permanenten Magnetismus aufnehmen könne; da, wo der Hebel bc zwischen den beiden Contactschrauben s und s_1 oscillirt, ist er mit einem Platin- oder Goldring d umgürtet, und bei e dreht er sich zwischen zwei vertical stehenden, in die Elfenbeinträger f eingelassenen Metallschrauben um eine verticale Achse; von der untersten dieser Metallschrauben reicht ein Drath bis hinab in das Quecksilbernäpfchen g und taucht in das Quecksilber ein, aus welchem ein anderer Drath nach der Klemmschraube h und von da nach dem einen Pole der Localbatterie B führt; von dem anderen Pole der Localbatterie führt ein Drath durch die Rollen des Elektromagnetes E des in Fig. 16 angedeuteten Schreibapparates zu der metallenen Feder F, welche auf der metallenen Achse i einer metallenen Scheibe G schleift; in den Umfang dieser Scheibe G sind isolirende (in Fig. 16 Taf. V schwarz gezeichnete) Bogenstücke eingesetzt und es schleifen auf dem Umfang der Scheibe zwei metallene Federn D und D_1 derart, dass die eine stets auf einem leitenden Bogenstücke liegt, wenn die andere auf einem isolirenden aufliegt; diese Federn D und D_1 sind durch zwei Dräthe mit den Klemmschrauben k und k_1 und diese endlich mit den Contactschrauben s und s_1 leitend verbunden. Dem Elektromagnet des Schreibapparates steht der Anker A gegenüber, welcher an dem Hebel CH befestigt ist und sich mit diesem um C dreht; so oft nämlich der Elektromagnet E seinen Anker anzieht, geht das vordere Ende des Hebels nieder und übt dabei durch die Stange p und durch den Sperrkegel R zwei verschiedene Wirkungen aus; die Schubstange p greift in ein Sperrrad auf der Rückseite der Scheibe G ein und dreht dieses bei jedem Niedergehen des Hebels CH um einen Zahn fort, wodurch die Federn D und D_1 auf die benachbarten Bogenstücke zu liegen kommen, die eine von einem isolirenden Bogenstücke auf ein leitendes, die andere von einem leitenden auf ein isolirendes, zugleich aber wirken bei dem Umdrehen des Sperrrades aus diesem hervorstehende Stifte abwechselnd auf den einen oder den anderen von zwei Schreibhebeln, so dass die beiden an den Hebeln befindlichen Schreibstifte abwechselnd in den an ihnen vorbeigeführten Papierstreifen eingetrieben werden; der Sperrkegel R dagegen greift in das Sperrrad P ein, schiebt es bei jedem Niedergange um einen Zahn weiter und bewirkt dadurch das schrittweise Fortrücken des Papierstreifens, in welchen die Punkte eingegraben werden. Wenn nun ein Strom durch die Linie geht, welcher die Pole der Elektromagnete so entwickelt, wie sie in Fig. 15 Taf. V als Südpole mit S und S_1 und als Nordpole mit N und N_1 bezeichnet sind, und wenn b der Nordpol, c der Südpol des permanent magnetischen Ankers, so wird b von S angezogen, von N abgestossen und zugleich c von N_1 angezogen und von S_1 abgestossen; es legt sich daher der Anker bc mit d an s an und schliesst die Localbatterie, deren Strom von B über h, g, e, d, s, k, D, i, F und durch die

Rollen des Elektromagnetes E nach B zurückgeht; der Elektromagnet E zieht seinen Anker A an und der Hebel CH schiebt durch R und P den Papierstreifen ein Stück fort, dreht durch die Schubstange p die Scheibe G so, dass D_1 auf ein leitendes, D auf ein isolirendes Bogenstück zu liegen kommt, wodurch der Localstrom unterbrochen wird, obschon der Hebel bc ganz ruhig an s liegen geblieben ist; ausserdem wird mit dem Fortrücken von G auch ein Schreibhebel in Bewegung gesetzt und ein Punkt in den Papierstreifen gedrückt; zuletzt zieht eine Spannfeder den Hebel CH in seine Ruhelage zurück. Der nächste Strom, welcher die Leitung durchströmt, hat die entgegengesetzte Richtung, macht also S und S_1 zu Nordpolen, N und N_1 zu Südpolen, S und N_1 stossen b und c ab, S_1 und N ziehen b und c an, der Hebel bc legt sich mit d an s_1 an und schliesst abermals die Localbatterie, deren Strom jetzt von B nach h, g, e, d, s_1, k_1, D_1, i, F und E nach B geht; dadurch wird der Anker A angezogen und der Hebel CH besorgt wieder die Unterbrechung des Localstroms und das Eindrücken eines Punktes in den Papierstreifen. Die Stellung der Apparattheile ist jetzt wieder genau so, wie im Anfang, und es wiederholt sich fortan stets dasselbe Spiel. Dieses Relais hat also keine Spannfeder, es bleibt vielmehr der Anker bc jedes Mal an der Contactschraube liegen; die Unterbrechung des Localstromes findet ferner auch nicht am Relais statt, sondern an der Scheibe G, es springen also auch hier die Trennungsfunken über und es wird das Relais gegen die oxydirende Wirkung derselben geschützt. Endlich können bei diesem, allerdings minder einfachen Telegraphenapparate die auf einander folgenden Punkte auf dem Papierstreifen nicht in einander fliessen, da sie in verschiedenen Zeilen stehen und durch verschiedene Schreibstifte hervorgebracht werden.*)

Eine ausgedehntere Anwendung hat noch keins dieser Relais ohne Spannfeder gefunden, obgleich die Versuche z. B. mit dem Schaack'schen sehr günstig ausgefallen sein sollen. Es ist aber auch nicht zu übersehen, dass die Anwendung eines Richtmagnetes zum Losreissen des Relaisankers vom Arbeitscontact in ähnlicher Weise, wie auch die Anwendung eines Gegengewichts, der Anwendung einer Spannfeder nachsteht. Es muss nämlich offenbar dahin gestrebt werden, dass die losreissende Kraft im ersten Momente des Losreissens am grössten ist, damit sie trotz dem im Elektromagnet noch zurückbleibenden Elektromagnetismus den Anker ohne Zeitverlust in die Ruhelage zurückführe. Der Anker ist aber im ersten Momente des Losreissens am weitesten vom Richtmagnete entfernt, daher ist die von letzterem auf den Anker ausgeübte Anziehung im Anfange am schwächsten und wird um so kräftiger, je näher der Anker dem Richtmagnet kommt. Auch bedarf die Stärke und Polarität und Stärke des Richtmagnetes einer Ueberwachung, man ist also bei der Anwendung eines

*) Ueber die Vorschläge von Du Moncel, Regnault, Ailhaud, Quéval und Cuche vergl. *Annales télégraphiques* 1860 und 1859.

Richtmagnetes im Grunde nicht eben sehr viel verbessert, besonders da eine weitere Aufmerksamkeit auf die Einschaltung der Apparate zu richten ist, weil der Linienstrom eine ganz bestimmte Richtung haben muss, wenn das Relais ansprechen soll. Das in jüngster Zeit in Oesterreich patentirte Relais ist auch auf mehreren sächsischen Stationen einer Prüfung unterzogen worden, soll aber dabei nicht allen an dasselbe zu stellenden Anforderungen vollkommen entsprochen haben.

3. Die Translation und das Zweigsprechen.

Da bekanntlich die Stärke des elektrischen Stromes um so kleiner ist, je länger der Leiter ist, den der Strom zu durchlaufen hat, so kann man mit Batterien von gegebener elektromotorischer Kraft selbst unter Anwendung eines Relais nur auf eine gewisse Entfernung verständliche telegraphische Zeichen geben. Ist eine Depesche weiter zu befördern, so muss sie entweder durch einen Beamten weiter telegraphirt werden, oder man bedient sich zweckmässiger der Translation oder des Uebertragens, wobei die Apparate der letzten von der telegraphirenden Station unmittelbar noch zu erreichenden Station so eingerichtet werden, dass sie von selbst, ohne Beihilfe eines Beamten, jedes ankommende Zeichen weiter geben. Alle wichtigeren Knotenpunkte des europäischen Telegraphennetzes sind jetzt darauf eingerichtet, dass sie gelegentlich und nach Bedarf übertragen können; dadurch können zwei ganz beliebige, noch so weit von einander entfernte Stationen unmittelbar mit einander correspondiren, sofern es erforderlich und sonst vortheilhaft ist. Nur muss bei einem solchen Sprechen durch mehrere zwischenliegende Translationen hindurch etwas langsamer und gut markirt telegraphirt werden, damit nicht etwa einzelne Punkte ausbleiben; dies ist nämlich bei zu schnellem Telegraphiren zu befürchten, weil doch die Erregung des Elektromagnetismus in den auf einander folgenden Translatoren und die dadurch herbeigeführte Schliessung neuer Batterien nicht vollkommen gleichzeitig und nicht ohne jeden Zeitverlust erfolgt.

Die Lösung der Aufgabe, die Apparate so einzurichten, dass sie die ankommenden Zeichen selbstthätig weiter befördern, ist ganz einfach und die Einrichtung des Translators schliesst sich eng an jene des Relais an: man lässt den Strom am Ende des ersten Theiles der Leitung durch die Rollen eines Elektromagnetes gehen, welcher dadurch, dass er seinen Anker anzieht, diejenige Batterie schliesst, welche ihren Strom in den zweiten Theil der Linie senden soll; die Translatoren werden daher einerseits Aehnlichkeit mit den Tastern haben, durch welche mit der Hand Ströme in die Leitung gesendet werden; andererseits aber unterscheiden sie sich von dem Relais nur insofern wesentlich, als das Relais den Strom einer Localbatterie durch den Schreibapparat, der Translator aber den Strom einer *Linienbatterie in die* Leitung nach einer anderen Station sendet.

Die Erfindung der Translatoren wird von Mehreren als ein ihnen gebührendes Verdienst in Anspruch genommen und dürfte in der That von Mehreren selbstständig gemacht worden sein. So wurde die Translation in Deutschland von Fardely schon 1844 bei seinen Typendrucktelegraphen auf der Taunusbahn angewendet, oder doch mindestens die Idee dazu angeregt (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 298 bis 300). Die Amerikaner schreiben die Erfindung der Translatoren Ezra Cornell aus New-York zu, der 1846 auf der Linie New-York—Buffalo einen Translator angewendet und *connector* genannt haben soll (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 196), wogegen Shaffner (*telegraph manual*, S. 495) den angewendeten Apparat als *Cornell swilch*, Cornell's Ruthe, bezeichnet. Bald nach Cornell gab Oberst John J. Speed einen Translator an und zwar für ein Telegraphiren mit Ruhestrom, wobei die Zeichen durch Unterbrechung der Linienströme gegeben werden. Darauf wurde ein Vorschlag zur Translation durch den nach Preussen berufenen Amerikaner Robinson gemacht und im Juli 1849 auf der Station Minden am Morse wirklich ausgeführt. Für die damals in Oesterreich benutzten Bain'schen Apparate erdachte der jetzige k. k. Telegrapheninspector Engelbert Matzenauer im Jahre 1847 Translatoren, welche auch 1850 auf der Linie Neuhäusel—Pressburg aufgestellt wurden (vergl. Zeitschrift des österreichischen Ingenieurvereins, 1851, No. 4, S. 28 und daraus im Polytechnischen Centralblatte, 1851, S. 717). Nach Shaffner (*telegraph manual*, S. 411) hätte Morse den Gedanken, sich der Translation zu bedienen, schon 1836 und 1837 gefasst.

Bereits im ersten Jahrgange dieser Zeitschrift S. 97 ff. wurde die Translation ausführlich besprochen und gezeigt, wie schon in der von Halske angegebenen Weise mit einem einzigen gewöhnlichen Relais eine Translation möglich wäre, dass jedoch besser zwei sogenannte Translations- oder Doppelcontact-Relais als Translatoren benutzt würden, und dass es noch vorzüglicher und deshalb wohl durchweg üblich sei, nach Steinheil's Vorschlage die Schreibapparate zur Translation zu verwenden, weil bei diesen der Schreibhebel einen sichereren und besseren Schluss der neuen Linienbatterie bewirkt, da er sich fester auf den Arbeitscontact auflegt. Der Hebel des Schreibapparates erhält dann die in Fig. 17 Taf. V skizzirte Gestalt: bei a ist der Schreibstift angebracht, m ist die Drehachse des Schreibhebels; für gewöhnlich liegt der Schreibhebel mit dem Ansatz mn an der mit o verbundenen Stellschraube s an, diese bildet also den Ruhecontact; wird der Anker des Schreibhebels von seinem Elektromagnete angezogen, so legt sich der Hebel mit dem Ende b auf die Stellschraube s_1 (den Arbeitscontact) auf; s_1 ist durch r mit dem einen Pole der Batterie verbunden, welche die ankommenden Zeichen weiter geben soll, die Drehachse aber beständig durch l mit der Linie, in welche diese Zeichen weiter gegeben werden sollen; erscheint also aus dem ersten Theile

der Linie ein Zeichen auf dem Relais der Translationsstation, so schliesst der Relaishebel die Localbatterie, der Anker des Schreibhebels wird angezogen, b legt sich auf s_1 und die Linienbatterie giebt über s_1, b und m das Zeichen in den zweiten Theil der Linie weiter. In der Regel sind nun die Translationsstationen zugleich Wechselstationen und deshalb soll in dem Nachfolgenden das Schema einer solchen Translations- und Wechselstation erläutert werden. Bei drei einmündenden Linien ist zwar die Einschaltung und der Wechsel am einfachsten, wenn zur Translation stets dieselben zwei Schreibapparate benutzt werden und stets derselbe dritte für die einzelne, getrennte Linie; damit aber die gegebene Skizze auch auf eine Station mit beliebig vielen Linien ausgedehnt werden kann, möge vorausgesetzt werden, dass alle Schreibapparate zur Translation geeignet seien, und es soll die Einschaltung so gewählt werden, dass derselbe Schreibapparat und derselbe Taster stets für dieselbe Linie in Gebrauch kommt, mag diese Linie in Translation oder in getrennter Stationslage sein. In Fig. 18 Taf. V sind L_1, L_2 und L_3 die drei einmündenden Linien, welche zunächst an die Klemmen a_1, a_2 und a_3 der drei Taster T_1, T_2 und T_3 geführt sind; die mit dem einen Pole der Linienbatterie B verbundenen Klemmen s_1, s_2 und s_3 führen zu den Arbeitscontacten der Taster, die Klemmen a_1, a_2 und a_3 zu den Achsen der Taster, deren Hebel gewöhnlich auf dem vorderen Contact aufliegen und so a_1, a_2 und a_3 mit den Klemmen b_1, b_2 und b_3 leitend verbinden; beim Niederdrücken des Tasterhebels wird die leitende Verbindung zwischen a und b dieses Tasters unterbrochen, dagegen s mit a leitend verbunden. Von b_1, b_2 und b_3 führen Dräthe nach den Lamellen h_1, h_2 und h_3 des Linienwechsels W; die Lamellen x_1, x_2 und x_3 sind zunächst mit den Klemmen e_1, e_2 und e_3 der Relais R_1, R_2 und R_3 und durch die Rollen der Elektromagnete mit den Klemmen f_1, f_2 und f_3 und endlich über g mit der Erdplatte E verbunden. Von den Lamellen z_1, z_2 und z_3 des Wechsels führen Dräthe nach den Klemmen l_1, l_2 und l_3 der Schreibapparate S_1, S_2 und S_3 und von da nach den Achsen m_1, m_2 und m_3 der Schreibhebel; diese Achsen stehen entweder in der Ruhelage der Schreibhebel durch n_1, n_2 und n_3 über o_1, o_2 und o_3 mit den Lamellen p_1, p_2 p_3 in Verbindung, oder sie stehen, wenn der Schreibhebel angezogen ist (in Fig. 17 also b auf s_1 liegt), über r_1, r_2 und r_3 und q mit dem Pole der Linienbatterie B in Verbindung, welcher mit s_1, s_2 und s_3 verbunden ist, während der andere Pol mit der Erde in Verbindung gesetzt ist. Ausserdem ist die gemeinschaftliche Localbatterie B_1 so eingeschaltet, dass, wenn ein Anker der Relais R_1, R_2 oder R_3 angezogen wird, der Localstrom über u_1, u_2 oder u_3 nach v_1, v_2 oder v_3 durch die Rollen der Schreibapparate S_1, S_2 oder S_3 und über w_1, w_2 und w_3 nach der Batterie B_1 zurück geht, dass also der Schreibhebel des entsprechenden Schreibapparates angezogen wird. Endlich ist die Lamelle t des Wechsels noch mit der Erdleitung E verbunden. Der Weg nun, welchen ein in die so eingeschaltete Station

aus irgend einer Linie eintretender Strom nehmen muss, hängt lediglich von der Art der Stöpselung im Wechsel W' ab; werden diejenigen Kreuzungsstellen der Lamellen des Wechsels, an welchen ein Stöpsel eingesteckt ist, in der Figur durch einen schwarzen Punkt bezeichnet, so treten zunächst bei einer Stöpselung nach Fig. 18 bis 22 folgende Stromläufe auf:

Werden nach Angabe der Fig. 18 die drei Lamellen h_1, h_2 und h_3 durch eingesteckte Stöpsel mit den Lamellen x_1, x_2 und x_3 verbunden, so ist jede Linie von der anderen vollständig getrennt. Der Strom aus irgend einer Linie, z. B. L_1, geht zunächst durch den zugehörigen Taster T_1 von a_1 nach b_1, dann über h_1 und x_1 nach c_1, d_1, e_1, durch das zugehörige Relais R_1 und über g auf dem nächsten Wege zur Erde E, ohne Zweigströme über f_2, e_2, d_2, c_2, x, h_2, b_2 und a_2 in die Linie L_2, oder über f_3, e_3, d_3, c_3, x_3, h_3, b_3 und a_3 in die Linie L_1 zu senden, weil die Zweigströme in diesen Linien einen fast unendlich grossen Widerstand zu überwinden hätten im Vergleich mit dem kürzesten Wege von g nach E zur Erde; während der Linienstrom das Relais R_1 durchläuft, schliesst der Hebel dieses Relais die gemeinschaftliche Localbatterie B_1, deren Strom durch die Rollen des Schreibapparates S_1 geht und durch den Schreibhebel einen Punkt oder Strich in den Papierstreifen gräbt, je nachdem der Linienstrom kürzere oder längere Zeit dauert. Würde aber der Taster T_1 niedergedrückt, so wäre die gemeinschaftliche Linienbatterie B geschlossen und deren Strom geht über s_1 und a_1 in die Linie L_1 nach der Station am Ende der Linie L_1 durch die dortigen Apparate zur Erde und über E zum anderen Batteriepol zurück. Ebenso verhält es sich mit den Linien L_2 und L_3, auch diese sind jede von den beiden anderen völlig getrennt.

Werden dagegen die Stöpsel nach Anleitung der Fig. 19 gesteckt und dadurch die Lamelle h_1 mit x_1, h_2 mit z_3, h_3 mit z_2, sowie p_3 mit x_2 und p_2 mit x_3 verbunden, so ist zwar an der Einschaltung der Linie L_1 nichts geändert und es bleibt daher diese Station von den anderen beiden getrennt und der Stromlauf ist bei ihr noch genau so, wie er eben beschrieben wurde; L_2 und L_3 dagegen sind zur Translation mit einander verbunden. Jeder Strom aus L_2 geht durch den Taster T_2 von a_2 nach b_2 und h_2, von da aber nach p_3 über k_3 und l_3 zur Achse m_3 des Schreibapparates S_3, und da dessen Schreibhebel nicht angezogen ist, über n_3, o_3 nach p_3 und x_2, darauf nach c_2, d_2, e_2 durch das Relais R_2 und von f_2 über g zur Erde E; der Anker des Relais R_2 wird dabei natürlich angezogen, die Localbatterie B_1 geschlossen und diese sendet ihren Strom durch u_2, v_2, w_2 durch die Rollen des Schreibapparates S_2, so dass dessen Anker ebenfalls angezogen und je nach der Dauer des Linienstromes aus L_2 ein längeres oder kürzeres Zeichen in den Papierstreifen eingegraben wird; während aber der Anker des Schreibapparates angezogen ist, ist noch ein anderer Stromkreis geschlossen, denn es geht von dem einen Pole der Linienbatterie B ein Strom über q, r_2 (da m_2 durch den angezogenen Anker mit r_2 oder in

ig. 17 l und m durch b mit s_1 und r verbunden ist) zur Achse m_2, über l_2 ıd k_2 nach z_2, h_3, b_3 und a_3 in die Linie L_3, am Ende dieser Linie zur rde und über E zum anderen Pole der Linienbatterie B zurück. Es wird so jedes aus L_2 kommende Zeichen unmittelbar nach L_3 weiter gegeben, ıd umgekehrt jedes aus L_3 kommende Zeichen unmittelbar nach L_2. Der rom aus L_3 geht nämlich über a_3 und b_3 nach h_3, von da über k_2, l_2, m_2, , o_2, p_2, x_3, c_3, d_3, e_3 durch das Relais R_3 und über f_3 und g zur Erde E; r Anker des Relais R_3 wird angezogen, der Kreis der Localbatterie B_1 durch geschlossen und es geht deren Strom über u_3, v_3 und w_3 durch den hreibapparat S_3, auf welchem der Schreibstift das Zeichen in den Papier-eifen eindrückt; zugleich wird auch die Linienbatterie B geschlos-n und deren Strom geht über q nach r_3, m_3, l_3, k_3, h_2, b_2 und a_2 in die nie L_2, schliesslich in die Erde und kommt über E zum anderen Pole r Batterie B zurück. Auf der in Fig. 18 skizzirten Translationsstation scheinen also jetzt die Zeichen aus L_2 auf dem Schreibapparate S_2, die ichen aus L_3 und S_3; es ist aber nicht unbedingt nöthig, dass die Zei-en auf S_2 und S_3 wirklich mit aufgenommen werden, man wird vielmehr e Papierstreifen der Schreibapparate S_2 und S_3 nur laufen lassen, wenn ın die bei Translation durchgehenden Depeschen in der Translations-ıtion mit aufnehmen will. Die Translationsstation kann jederzeit selbst rechend in die Correspondenz eintreten, denn sie kann mittelst des ısters T_2 oder des Schreibhebels des Schreibapparates S_3 nach L_2 und mit m Taster T_3 oder dem Hebel des Schreibapparates S_2 nach L_3 sprechen.

Die Stöpselung nach Fig. 20 lässt L_2 von L_1 und L_3 getrennt, verbindet er L_1 und L_3 durch Translation; eine Stöpselung nach Fig. 21 dagegen ıst L_3 getrennt und verbindet L_1 und L_2 zur Translation. Die Stromläufe diesen beiden Fällen sind ganz ähnlich wie bei der Translation zwischen und L_3 und lassen sich nach der obigen Beschreibung dieser Translation cht auffinden.

Die Stöpselung nach Fig. 22 endlich schaltet alle Apparate auf sämmt-hen drei Linien aus; denn zu welcher Linie auch der Strom herein-mmt, er gelangt immer durch h_1, h_2 oder h_3 nach z_2 und geht von da über ofort zur Erde E, ohne irgend welchen Apparat der Translationsstation durchlaufen. Eine solche Einschaltung würde also unter Anderem die ıparate der Translationsstation gegen die zerstörenden Einflüsse von itzschlägen sicher stellen; natürlich ist während dieser Stöpselung kei-rlei telegraphische Correspondenz möglich. Zöge man in Fig. 22 den öpsel heraus, welcher die Lamelle z_2 mit t verbindet, so wären zwar ch alle Apparate der Translationsstation ausgeschaltet, aber es könnten ı Stationen auf den Linien L_1, L_2 und L_3 noch gegenseitig mit einander rrespondiren, da jeder Strom aus irgend einer Linie sofort unmittelbar die beiden anderen weiter gehen würde.

Die in Fig. 18 gezeichnete Einschaltung gestattet endlich auch noch

... ein einfaches Zweigsprechen; beim Zweigsprechen wird der Strom, welcher auf einer Linie in eine Telegraphenstation eintritt, von dieser Station aus zu gleicher Zeit in zwei oder mehrere Linien weiter gesendet, entweder mit oder ohne Translation. Stöpselt man z. B. in der Fig. 23 angegebenen Weise und denkt sich dabei die Verbindung zwischen f_1 und y unterbrochen, dafür aber f_1 unmittelbar mit x_2 verbunden, so erscheint jedes Zeichen aus der Linie L_1 auf dem Relais R_1 und dem Schreibapparate S_1, denn der Strom aus L_1 geht über a_1, b_1 und h_1 nach x_1, c_1, d_1, e_1 und f_1, von da aber nach x_2 und über h_2, b_2 und a_2 nach L_2, sowie über h_3, b_3 und a_3 nach L_3 weiter. Ebenso geht jeder Strom aus L_2 zugleich in die Linien L_1 und L_3 und jeder Strom aus L_3 zugleich in die Linien L_1 und L_2 weiter; die Zeichen erscheinen dabei für die Durchgangsstation stets auf R_1 und S_1. Die Stromstärke der in den einzelnen Linien weiter gehenden Zweigströme ist nach dem Ohm'schen Gesetze zu beurtheilen.

Fig. 24 zeigt eine Stöpselung zum Zweigsprechen aus L_1 nach L_2 und L_3 mit Translation; die Einschaltung und Verbindung der Apparate unter einander ist dabei genau so, wie in Fig. 18. Jeder Strom aus L_1 geht über a_1, b_1, h_1, k_2, l_2, m_2, n_2, o_2, p_2, x_1, c_1, d_1, e_1, f_1 und g nach der Erde E; dabei schliesst das Relais R_1 den Strom der Localbatterie B_1 durch den Schreibapparat S_1 und letzterer sendet einen Strom der Linienbatterie B über q, r_1, m_1, l_1, k_1, z_1 und von da getheilt über h_2, b_2 und a_2 nach L_2 und über h_3, b_3 und a_3 nach L_3. Diese Einschaltung leidet indessen an einem kleinen Uebelstande; es kann nämlich nach der entgegengesetzten Seite hin zwar L_3 mit L_1 und L_2 mit L_1 unter Translation sprechen, dabei hört aber L_2 nicht mit, was L_3 nach L_1 spricht, und L_3 hört wiederum nicht, was L_2 nach L_1 spricht. Es kann in Folge dessen möglicher Weise eine Störung der Correspondenz durch unzeitiges Zwischensprechen eintreten; indessen kann bei gutem Stande der Linien dieses Zweigsprechen ohne Bedenken angewendet werden, wenn z. B. eine oder mehrere lange Depeschen von L_1 nach L_2 und L_3 zugleich zu befördern sind. Wollte man eine Störung durch Zwischensprechen unmöglich machen, so müsste, so lange L_2 spricht, der Stöpsel, welcher h_3 mit z_1 verbindet, herausgezogen und so eingesteckt werden, dass er h_3 mit z_2 verbindet, und so lange L_3 spricht, müsste h_2 nicht mit z_1, sondern mit z_2 durch Stöpselung verbunden werden; sollte aber dieses Umstöpseln mit der Hand erfolgen, so wäre es ziemlich unpraktisch, sollte es dagegen unter Vermittelung besonderer Apparate, etwa bei Einhaltung einer bestimmten Stromrichtung, von den elektrischen Strömen selbst besorgt werden, so ginge die kaum entbehrliche Einfachheit der Einschaltung verloren. Es ist zwar auch noch eine andere Einschaltung möglich, durch welche man die Linien zum Zweigsprechen unter Translation so verbinden kann, dass jedes Zeichen aus irgend einer Linie in allen anderen sichtbar wird (vergl. Zeitschrift des *deutsch-österreichischen* Telegraphenvereins, 1857, S. 1); allein diese Ein-

schaltung ist ebenfalls sehr verwickelt und erfordert so viele Apparate, dass sie schwerlich sich mit wesentlichem Vortheil wird anwenden lassen, besonders weil ja das Zweigsprechen der Natur der Sache nach überhaupt verhältnissmässig wenig Anwendung finden kann.

4. Schleifen.

Nicht selten kommt es vor, dass in eine bereits bestehende Telegraphenleitung ein seitwärts liegender Ort noch als Station mit aufgenommen werden soll; es bleibt dann nichts übrig, als an irgend einer Stelle die Hauptleitung zu zerschneiden, von jedem ihrer Enden eine Leitung nach der seitwärts gelegenen Station (wir wollen sie kurz Schleifenstation nennen) zu führen und diese letzteren, eine Schleifenlinie bildenden Leitungen durch die Apparate der Schleifenstation hindurch zu verbinden. So wurde z. B. in die bereits bestehende, der Eisenbahn entlang laufende Linie Dresden—Leipzig Grossenhain als Station aufgenommen, durch eine von Priestewitz nach Grossenhain geführte Schleife. Auch bei Neubauten sind nicht selten Schleifen anzulegen. Wäre an der Stelle, wo die Schleife von der Hauptleitung abgezweigt wird, eine Telegraphenstation, so würde diese mit einem Wechsel versehen und man wird meist gar nicht eine Schleife, sondern nur eine einfache Leitung von der Wechselstation nach dem seitwärts gelegenen Orte führen. Die Anlegung einer Schleife lässt also annehmen, dass an der Stelle des Abzweigens keine Station liegt; will man daher, dass die Correspondenz in der Hauptleitung nicht den Umweg durch die Schleifenstation machen soll, und will man sie zugleich von allen auf der Schleife etwa vorkommenden Störungen und Unterbrechungen unabhängig machen, so muss man an der Stelle des Abzweigens der Schleife Apparate aufstellen, welche selbstthätig entweder die Schleife in die Hauptlinie einschalten, oder sie ausschalten, je nachdem die Schleifenstation an der Correspondenz Theil nehmen soll oder nicht. Eine Apparatverbindung für diesen Zweck hat zuerst A. Bernstein in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1857, S. 25 ff. vorgeschlagen; das Wesentliche derselben wird durch eine kurze Erklärung der Skizze in Fig. 25 deutlich werden.

Auf der Stelle, an welcher die Schleife abgezweigt ist, sind drei Relais R, R_1, R_2 aufgestellt, von denen das mittlere R_1 ein ganz gewöhnliches ist, während die Hebel der beiden anderen R und R_2 permanente Magnete sind und zur Erhaltung ihrer Polarität noch je einen anderen Magnet E und E_2 neben sich stehen haben; die Pole liegen in den Hebeln nun so und die Einschaltung der Relais selbst ist so gewählt, dass, wenn ein positiver Strom aus dem Ende L der Hauptleitung oder ein negativer aus dem Ende L_1 der Hauptleitung kommt, der um a drehbare Hebel des Relais R sich an die Stellschraube s, der um a_2 drehbare Hebel des Relais R_2 dagegen an s_4 anlegt; kommt dagegen ein negativer Strom aus

der Leitung L oder ein positiver aus der Leitung L_1, so legt sich der Hebel von R an die Stellschraube s_1, der Hebel des Relais R_2 aber an die Stellschraube s_3; für gewöhnlich ziehen die Federn f und f_2 den Hebel von R an s_1 und den Hebel von R_2 an s_3; man könnte demnach auch sagen: das Relais R spricht nur auf positive, das Relais R_2 nur auf negative Ströme an, welche aus der Leitung L kommen. Das Relais R_1 endlich hat einen um a_1 drehbaren, nicht magnetischen Anker, welcher für gewöhnlich durch die Wirkung der Feder f_1 an der Stellschraube s_2 anliegt, sich aber an die Schraube s_3 anlegt, so lange der Strom der Batterie B durch die Rolle r_1 des Relais R_1 geht. Die Schleifenlinien l und l_1 sind durch die Rollen r_3 eines Relais R_3 der Schleifenstation S verbunden, und ausserdem muss auf der Station S noch ein anderes, für die eigentliche Correspondenz bestimmtes Relais vorhanden sein, da R_3 für die Aufnahme von Depeschen auf der Schleifenstation nicht zu gebrauchen ist. Der um a_3 drehbare Hebel des Relais R_3 ist ebenfalls permanent magnetisch und das Relais R_3 so eingeschaltet, dass der Hebel in Folge seiner vom Magnet E_3 erhaltenen Polarität nur von negativen, aus der Leitung L kommenden und durch die Rollen r_3 hindurchgehenden Strömen an die Stellschraube s_7 herangezogen wird, während er für gewöhnlich durch die Spannfeder f_3 an die Stellschraube s_6 gezogen wird und daran um so fester liegen bleibt, wenn positive Ströme aus L kommend die Leitung durchlaufen. Die Stationen in der Hauptleitung endlich müssen ausser den sonst nöthigen Apparaten noch mit einem Stromwender versehen sein, durch welchen sie in Stand gesetzt werden, den Strom in einer bestimmten Richtung in die Leitung zu senden; denn es ist nöthig, dass der positive Strom in der Hauptleitung in der Richtung von L nach L_1 gehe, wenn die Schleife in die Hauptleitung eingeschaltet sein, also die Schleifenstation an der Correspondenz Theil nehmen soll; dagegen muss der positive Strom in der Hauptleitung in der Richtung von L_1 nach L, also der negative in der Richtung von L nach L_1 gehen, wenn die Schleife ausgeschaltet sein soll. Kommt nämlich ein positiver Strom aus L nach der Stelle, wo die Schleife von der Hauptleitung abgezweigt ist, so durchläuft er zunächst die Rollen r des Relais R, gelangt über b nach f_1, vom Hebel des Relais R_1 nach der Stellschraube s_2, über c durch die Rollen r_2 des Relais R_2 nach l, nach der Schleifenstation S und daselbst durch die Rollen r_3 des Relais und endlich durch l_1 nach L_1 weiter; an der Abzweigungsstelle spricht zwar das Relais R an, das Relais R_2 dagegen nicht und deshalb bleibt der Stromkreis der Batterie B offen, so dass also auch das Relais R_1 nicht anspricht; ebenso spricht auch in der Schleifenstation S das Relais R_3 nicht an. Jede Correspondenz mit positivem Strome in der Richtung von L nach L_1 durchläuft also auch die Schleife und kann auf der Schleifenstation S aufgenommen werden. Kommt dagegen ein negativer Strom aus L, so durchläuft er wieder die Rollen r des jetzt nicht ansprechenden Relais, dessen Hebel also an der Stell-

schraube s_1 liegen bleibt, über b, f_1, a_1, s_2 c geht dann der negative Strom durch die Rollen r_2 des Relais R_2 und durch l nach S, daselbst durch die Rollen r_3 und darauf durch l_1 nach L_1; dabei sprechen die beiden Relais R_2 und R_3 an und in Folge dessen treten jetzt noch einige Nebenwirkungen auf; zunächst schliesst der Hebel des Relais R_2, indem er sich an die Stellschraube s_5 anlegt, den Kreis der Batterie B, deren Strom nun über f, a, s_1, d, c durch die Rollen r_2 des Relais R_2 über e nach a_2, s_5, g durch die Rollen r_1 des Relais R_1 nach der Batterie B zurückgeht; dadurch legt sich der Hebel des Relais R_1 an die Stellschraube s_3, so dass der negative Strom aus L nun durch r über b, f_1, a_1, s_3 und h direct nach L_1 geht, ohne die Schleife zu durchlaufen; die Batterie muss nun so eingeschaltet sein, dass ihr negativer Strom r_2 in der Richtung von c nach e durchläuft, also den Hebel des Relais R_2 auf der Stellschraube s_5 festhält, auch wenn der negative Strom aus L nach L_1 nicht mehr durch die Rollen r_2 hindurchgeht; eine andere Nebenwirkung tritt gleichzeitig in der Schleifenstation S ein, wo der Hebel des Relais R_3 sich an die Stellschraube s_7 angelegt und so die Batterie B_1 geschlossen hat, deren Strom nun über k, f_3, a_3 nach s_7, durch die aus wenigen Windungen bestehenden Rollen r_4*) des Relais R_3 und über m zur Batterie zurückgeht und den Hebel des Relais in seiner Lage an s_7 erhält. So lange demnach jetzt in der Hauptleitung mit negativen Strömen in Richtung von L nach L_1 oder mit positiven in Richtung von L_1 nach L telegraphirt wird, bleibt die Schleife vollständig ausgeschaltet, und auf der Schleifenstation giebt der an s_7 liegende Hebel des Relais R_3 das Zeichen, dass auf der Linie LL_1 mit Ausschaltung der Schleife correspondirt wird. Soll endlich die Schleife wieder eingeschaltet werden, so geschieht es einfach dadurch, dass man einen positiven Strom in der Richtung LL_1 durch die Leitung sendet; dieser legt nämlich den Hebel des Relais R an die Stellschraube s, unterbricht dadurch den Strom der Batterie B, worauf die Feder f_1 den Hebel des Relais R_1 wieder an die Stellschraube s_2 heranzieht und auch der Hebel des Relais entweder durch die Feder f_2 oder die Wirkung des noch andauernden positiven Stromes sich an s_4 anlegt; so ist also dem positiven Strome der Weg durch die Schleife geöffnet und auf der Schleifenstation muss der Strom durch die Rollen r_3, wodurch der Hebel bei r_3 an s_6 herangezogen wird.

Gegen diese an sich sehr sinnreiche Apparatzusammenstellung wurde der begründete Einwand erhoben, dass zu viele Apparate zur blosen Aus- oder Einschaltung nöthig seien, dass eine besondere Batterie erforderlich sei und dass überhaupt die Zuverlässigkeit von mehreren Regulirungen abhinge, ja durch einen schmutzigen Contact die Leitung gänzlich unterbrochen werden könne. Wenn es blos darauf ankäme, die Zahl der Ap-

*) Die Rollen r_4 und r_3 können über einen gemeinschaftlichen Kern gewickelt sein; in Fig. 25 wurden sie nur der Deutlichkeit wegen getrennt gezeichnet.

parate und den durch sie in die Leitung gebrachten Widerstand zu vermindern, so dürfte man nur das Relais R_2 weglassen und nach Anleitung der Skizze Fig. 26 einschalten, d. h. s_2 unmittelbar mit l verbinden und den aus den Rollen r_1 austretenden Drath nach der Stellschraube s führen; dann spricht das Relais R auf positive Ströme nicht an, diese gehen daher aus L durch r über a_1 und s_2 nach l, l_1 und L_1, auf einen negativen Strom aber spricht das Relais R an, schliesst durch r_1, s und a den Kreis der Batterie B, deren Strom der Hebel des Relais R_1 an s_2 anlegt und so die Schleifenlinie ausschaltet, bis wieder ein positiver Strom in Richtung von L nach L_1 die Linie durchläuft, wobei sich der Hebel des Relais R an s_1 anlegt, die Batterie B öffnet und die Schleife wieder einschaltet. Noch mehr: man kann sogar die Batterie B und das Relais R_1 entbehren und eine Unterbrechung der Linie durch einen unreinen Contact unmöglich machen, wenn man die in Fig. 27 angedeutete, von dem Telegrapheninspector Frischen in Hannover in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1858, S. 19 angegebene Einschaltung wählt, wobei das Relais R wieder nur auf negative Ströme ansprechen darf; die positiven Ströme gehen dann aus L durch die Rollen r des Relais R über n nach l und schliesslich aus l_1 nach L_1; die negativen Ströme dagegen schalten die Schleife aus, indem sie den Hebel des Relais R an die Stellschraube s_1 anlegen, und nehmen dann ihren Weg aus L durch r über n, a und s_1 nach L_1. Der nächstfolgende positive Strom legt den Relaishebel wieder an s und schaltet die Schleife wieder ein. Auch wenn der Relaishebel an s_1 liegt, bleibt indessen die Schleife eingeschaltet, und es geht ein Zweigstrom von n durch l und l_1 nach L_1; dass jedoch dieser Zweigstrom auf der Sshleifenstation Zeichen hervorbringen könnte, wie Frischen meint, ist gewiss nur bei sehr empfindlichen Galvanometern und kurzen Schleifen möglich; wohl aber kann die ausgeschaltete Schleifenstation die Correspondenz in der Hauptleitung stören, denn selbst ohne Anwendung einer Erdleitung ist der Kreis der Linienbatterie der Schleifenstation geschlossen, nämlich über l, n, a, s_1 und l_1; es kann daher die Schleifenstation selbst die Schleife ein- oder ausschalten, was ebensowohl ein Vorzug, als ein Nachtheil der von Frischen angegebenen Einschaltung gegenüber den beiden vorher beschriebenen Einschaltungen genannt werden kann. Alle drei Einschaltungen leiden aber an dem Uebelstande, dass sie nicht unbedingt die Hauptleitung gegen die Nachtheile der Störungen auf der Schleifenlinie schützen, sondern nur in dem Falle, dass bei einer auf der Schleifenlinie eintretenden Unterbrechung die Schleife bereits ausgeschaltet war, oder dass bei der Unterbrechung das gegen L liegende Ende der zerrissenen Schleifenlinie zufällig mit der Erde in Verbindung kommt; denn sonst kann von der Hauptlinie aus eine Ausschaltung der Schleife nicht mehr bewerkstelligt werden. Will man auch diesen Uebelstand beseitigen, so *wähle* man die Einschaltung nach Fig. 28: Das Relais R mit permanent

magnetischem Hebel spricht ebenfalls auf positive und negative Ströme an, aber die Achse a seines Hebels ist einerseits mit dem einen Ende der Multiplicationsrollen r, andererseits mit der Contactschraube s_1 verbunden, zwischen der Achse und der Contactschraube ist durch einen Rheostaten W ein entsprechender Widerstand eingeschaltet; ausserdem steht die Contactschraube s_1 mit den beiden Leitungen L_1 und l_1, die Contactschraube s mit der Leitung l in Verbindung. Jeder aus L kommende positive Strom geht durch die Rollen r und legt den Relaishebel an s an, daher hat der Strom einen Weg von a über s und l nach der Schleifenstation und dann durch l_1 über b nach L_1 und zugleich einen anderen Weg von a durch den Rheostat W über s_1 und b nach L_1; der Widerstand des Rheostates ist demnach so zu wählen, dass der durch die Schleife ll_1 gehende Theilstrom in der Schleifenstation deutliche Zeichen giebt. Der erste negative Strom legt den Relaishebel an s_1 und schaltet so die Schleife vollständig aus, wogegen L und L_1 über a, s_1 und b kurz verbunden sind; der nächstfolgende positive Strom führt den Hebel wieder nach s und schaltet dadurch die Schleife ein. Weder bei ausgeschalteter, noch bei eingeschalteter Schleife übt der Rheostat einen nachtheiligen Einfluss auf den Strom in der Hauptlinie aus; wenn dagegen eine Unterbrechung in der Schleife bei irgend einer Stellung des Relaishebels eintritt, so bleibt sicher dem Strome in der Hauptlinie noch der Weg von L durch r nach a, durch W nach s_1, b und L_1 übrig und jedenfalls kann so noch der Relaishebel an die Contactschraube s_1 herangezogen werden, behufs der Herstellung einer kurzen Verbindung von L mit L_1. Obwohl die Schleifenstation bei ausgeschalteter Schleife die Correspondenz in der Hauptlinie ohne Anwendung einer Erdleitung nicht zu stören, noch etwas an der Einschaltung der Schleife zu ändern vermag, bleibt ihr doch durch Anlegung einer Erdleitung die Möglichkeit, für den Fall des Bedarfs eine Notiz nach L und L_1 zu geben; denn dann würde ihr Strom aus l_1 sich in b nach L_1 und über s_1 und a auch nach L verzweigen.

5. Die Blitzableiter.

Da die Telegraphenleitungen sich viele Meilen weit als ununterbrochene Leiter über die Oberfläche der Erde hin erstrecken und im freien Felde ihre Umgebung hoch überragen, so sind sie verschiedenen Einwirkungen von Seite der atmosphärischen Elektricität ausgesetzt. Es können leicht die Dräthe und Leitungsstangen geradezu vom Blitze getroffen werden und Theile von diesen Blitzschlägen auf grosse Entfernungen hin an den Dräthen fortlaufen, bis sie endlich einen günstigen Uebergang zur Erde finden; es können ferner durch die über die Leitung dahinziehenden elektrischen Wolken und bei jedem in der Nähe der Leitung niederfahrenden Blitze, selbst wenn er die Leitung nicht unmittelbar trifft, gewaltige Inductionsströme in der Leitung erregt werden, ja es können sich sogar in

der Atmosphäre vorhandene, vielleicht durch Witterungsverhältnisse erzeugte elektrische Gegensätze, auch wenn sie örtlich weit von einander entfernt sind, durch die Leitungsdräthe ausgleichen. Die Folgen dieser Einwirkungen sind theils Störungen im Betrieb des Telegraphen, theils gewaltsame Zerstörungen der Leitungen und Apparate. Sofern nämlich blos schwache Ströme atmosphärischer Elektricität in der Leitung fortgehen und durch Telegraphenapparate ihren Weg nehmen, werden dieselben in den Apparaten genau dieselben Wirkungen hervorbringen, wie die galvanischen Telegraphirströme: die Anker der Elektromagnete werden angezogen, Galvanometernadeln werden abgelenkt und dergleichen mehr, je nach der Beschaffenheit der Apparate; auch kann man diese Ströme selbst fühlen, wenn man ihnen durch entsprechendes Berühren der Leitung einen Weg durch den Körper öffnet. Sind dagegen die durch die atmosphärische Elektricität in der Leitung erregten Ströme kräftiger, so richten sie nicht selten bedeutende Zerstörungen an: sie schmelzen Dräthe in den Stationen, verbrennen und zertrümmern die isolirende Umhüllung und Bedeckung der Dräthe, vernichten den Magnetismus constanter Magnete, kehren auch wohl deren Polarität ganz um, zerschmettern die Isolatoren, auf welchen der Drath an den Tragsäulen liegt, zersplittern die Säulen auch selbst und werfen sie um, wobei nach Befinden der Leitungsdrath zerreisst, — ja wiederholt wurden sogar die am Apparate arbeitenden Beamten oder die mit der Linie beschäftigten Arbeiter und Aufseher verletzt und gelähmt. Ein langes Register solcher Verheerungen findet sich im elektromagnetischen Telegraph von Schellen, 2. Auflage, S. 210 bis 218, andere Belege sind in den verschiedenen Jahrgängen der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins zerstreut; mitunter wurden bis 20 Tragsäulen hinter einander ganz oder theilweise zersplittert*), ja in einzelnen Fällen zeigten selbst 60 bis 70 Säulen Spuren davon, dass Antheile des Blitzes an ihnen zur Erde niedergegangen waren, in der Leitung aber lief der Blitz nicht selten 10, ja 30 bis 40 Meilen weit fort.

Natürlich ist es eine nicht unwichtige Aufgabe der Telegraphie, derartigen Beschädigungen möglichst vorzubeugen, und zu diesem Zwecke stellt man an einzelnen Punkten Blitzableiter auf. Durch Blitzableiter kann man aber bis jetzt nur die zerstörenden Wirkungen verhüten, die störenden dagegen bleiben unbeseitigt; die Apparate und die an ihnen arbeitenden Beamten werden zwar durch die Blitzableiter der Gefahr der Verletzung entrückt, dass aber bei Gewittern die atmosphärische Elektricität in das Telegraphiren mit dreinspricht, dass sie auf den Druckapparaten unbeabsichtigte Punkte und Striche druckt, die Zeiger der

*) Die ausgesplitterten Stellen laufen gewöhnlich in einer Spirallinie um die Stangen herum; ist dies eine Folge der Structurverhältnisse der Stangen, oder wählt *der Blitz sich* selbst diesen Weg und warum?

Zeigerapparate fortrücken lässt und bei Nadeltelegraphen die Nadeln ablenkt, ohne Rücksicht auf den Willen des Telegraphisten, dies lässt sich nicht verhüten.

Wie verschiedenartig auch die Blitzableiter für Telegraphen in ihren einzelnen Theilen gestaltet sind, in Ansehung des Grundes ihrer Wirksamkeit zerfallen sie nur in zwei grosse Gruppen. Bei der einen Classe von Blitzableitern ist nämlich Vorkehrung getroffen, dass jeder kräftigere Strom, durch welchen die Apparate zerstört werden könnten, sich selbst den Weg nach den Apparaten abbricht; es steht indessen bei diesen Blitzableitern zu befürchten, dass gelegentlich doch etwa bereits vor dem Abbrechen des Weges nach den Apparaten ein so kräftiger Strom in die Apparate gelangt, dass die Apparate dadurch Schaden leiden. Schon im Jahre 1846 wurden zwei von einander verschiedene Blitzableiter dieser Art vorgeschlagen: in Frankreich von Breguet und in Amerika von James D. Reid in Philadelphia. Die Wirksamkeit der Blitzableiter der anderen Classe stützt sich auf den bekannten Erfahrungssatz über das Verhalten der Elektricitäten verschiedenen Ursprungs, nämlich auf die Thatsache, dass die Reibungselektricität, die Inductionselektricität und die atmosphärische Elektricität verhältnissmässig grosse isolirende Zwischenräume zwischen zwei Leitern überspringen kann, während die galvanische Elektricität selbst sehr kleine Zwischenräume nicht überspringt. Diese Verschiedenheit der erwähnten Elektricitäten macht es möglich, dass man die Luftelektricität von den telegraphischen Apparaten abhalten kann, indem man ihr einen kürzeren und besseren Weg zur Erde öffnet, während die galvanische Elektricität, ohne Sprünge, ruhig und ungestört ihren Weg durch die Apparate nehmen muss. Man braucht dazu blos der Luftleitung, bevor sie zu den Apparaten geführt wird, eine andere möglichst kurze Leitung von entsprechend grossem Querschnitte gegenüber zu stellen, welche einerseits ohne Unterbrechung bis zur Erde reicht (daher Erdleitung genannt), andererseits aber die Luftleitung nicht unmittelbar berührt, sondern in einer möglichst geringen Entfernung von derselben endet; diese geringe Entfernung kann die galvanische Elektricität nicht überspringen, sondern sie muss durch die Apparate gehen; die Luftelektricität dagegen wird zum grössten Theil den kleinen Zwischenraum überspringen und auf dem kürzesten Wege zur Erde abfliessen. Auch der Gedanke, auf diese Weise die Telegraphenapparate gegen die zerstörenden Einwirkungen der atmosphärisshen Elektricität zu schützen, wurde bereits im Jahre 1846 in zwei Ländern gefasst und zur Ausführung gebracht: in Deutschland zuerst von Steinheil und in England in etwas anderer Weise von Highton in London. Steinheil, Highton, Breguet und Reid haben also in demselben Jahre, scheinbar ganz unabhängig von einander, die ersten Blitzableiter für Telegraphen angegeben; jeder von einem anderen Gesichtspunkte ausgehend. Gegenwärtig sind in Europa allgemein Blitzableiter

der zweiten Classe in Gebrauch; an einigen sehr verbreiteten dagegen ist zugleich dafür Sorge getragen, dass ein nach den Apparaten gehender Blitzstrahl sich selbst den Weg unterbreche.

Breguet schlug vor, die eigentliche Telegraphenleitung nur bis auf eine Entfernung von 15 bis 18 Fuss an die Station heranzuführen, von da ab aber einen ganz feinen Drath zur Verbindung der Leitung mit den Stationsapparaten zu benutzen, in der Voraussetzung, dass jeder atmosphärische Strom, welcher seinen Weg durch diesen dünnen Drath nach den Apparaten nehmen wolle, den dünnen Drath bis zum Abschmelzen erhitzen und sich so den Weg zu den Apparaten selbst unterbrechen werde (vergl. Schellen, der elektromagnetische Telegraph, S. 223). Auf diese Weise allein würden aber die Apparate wohl kaum sicher genug gegen die zerstörenden Einwirkungen der atmosphärischen Elektricität geschützt werden, und überdies würde ein häufiges Ersetzen des langen dünnen Drathes unbequem und nicht zu billig sein; wohl aber wird eine ähnliche Einrichtung, welchem einem Blitzableiter der zweiten Classe als Zugabe beigefügt ist, dessen Wirksamkeit erhöhen.

Reid benutzte nicht die Wärmeentwickelung, sondern die elektromagnetische Wirkung des Stromes zur Unterbrechung des Weges nach den Apparaten und wählte dazu folgende Anordnung: Die in die Station eintretende Luftleitung L (Fig. 29 Taf. V) wird zunächst zu dem einen Ende der Multiplicationsrollen eines Elektromagnetes M geführt; diese Rollen enthalten aber nur 16 Windungen eines starken mit Seide übersponnenen Drathes; das andere Ende der Rollen steht mit der Achse a eines messingenen Hebels bc in leitender Verbindung, dessen vorderes Ende b mit der Stellschraube s durch die Spannfeder f auf einen Metallständer e aufgedrückt wird, welcher durch den Drath A mit den telegraphischen Apparaten in leitender Verbindung steht; am anderen Ende c des Hebels bc befindet sich eine zweite Stellschraube, welche sich auf den durch den Drath E mit der Erde verbundenen Metallständer g auflegt, so oft und so lange der Elektromagnet E seinen Anker d anzieht. Die Spannfeder f ist nun so stark gespannt, dass in Folge des durch einen galvanischen Telegraphirstrom erregten Elektromagnetismus der Elektromagnet M seinen Anker nicht anziehen kann; daher nehmen die Telegraphirströme aus L ihren Weg durch M über a, b, s, e und A nach den telegraphischen Apparaten. Geht dagegen ein starker Strom atmosphärischer Elektricität durch den Elektomagnet M, so zieht derselbe seinen Anker an, die Stellschraube s verlässt dabei ihren Ständer e und der Weg nach den Apparaten ist dadurch unterbrochen, dafür aber der Luftelektricität von a aus über c und die jetzt auf ihrem Ständer g aufliegende Stellschraube s_1 ein kurzer Weg durch den entsprechend dicken Drath E nach der Erde eröffnet. Sobald die Luftelektricität nach der Erde abgeflossen ist, zieht die Feder f den Hebel bc mit der Stellschraube s wieder auf ihren Ständer e auf und stellt

so den Weg nach den Apparaten für die Telegraphirströme wieder her. Dieser sinnreiche Blitzableiter, für dessen Erfindung Reid von dem *Franklin Institute* in Philadelphia mit der silbernen Medaille belohnt wurde, soll sich (nach Shaffner, *telegraph manual*, S. 567 und 568) bei vielen Gelegenheiten unter heftigen Gewittern gut bewährt haben, obwohl man fürchten könnte, dass bei der grossen Geschwindigkeit des elektrischen Stromes die Luftelektricität zu den Apparaten gelangen könnte, bevor noch der Hebel bc aus der einen Lage in die andere übergegangen wäre; indessen darf wohl auch nicht übersehen werden, dass die Luftelektricität selbst dann, wenn die Stellschraube s auf ihrem Ständer e aufliegt, den kurzen Weg durch E zur Erde wählen kann, weil sie dazu nur den kleinen Zwischenraum zwischen der Stellschraube s_1 und dem gegenüberliegenden Ständer g zu überspringen braucht.

Highton's Blitzableiter ist höchst einfach: der Leitungsdrath wird auf eine Länge von 6 bis 8 Zoll mit Seide oder lockerem Papier umwickelt und diese Hülle mit einer Anzahl von Metalldräthen umgeben, welche mit der Erde in Verbindung stehen; ein jeder Apparat einer Station soll auf jeder Seite mit einer solchen schützenden Vorrichtung versehen werden; am einfachsten und billigsten wird die mit Löschpapier umwickelte Stelle des Leitungsdrathes durch eine kleine, mit einer Zinnplatte ausgelegte hölzerne Büchse hindurch geführt, in dieser mit feinem Eisendrath umgeben und die Zinnplatte mit der Erde verbunden. Die gute Wirkung solcher Blitzableiter (Shaffner, *telegraph manual*, S. 566) dürfte auf die grosse Anzahl kleiner Uebergangspunkte vom Leitungsdrathe zu den umgebenden Ableitungsdräthen zu schreiben sein. Eine diesem Blitzableiter nahe verwandter Blitzableiter zum Herableiten des Blitzes an den Telegraphensäulen wurde 1855 von Matzenauer vorgeschlagen.

Steinheil's Blitzableiter bestand aus zwei Kupferplatten von sechs Zoll Durchmesser; diese Platten standen auf dem Dache des Hauses, gegen die Feuchtigkeit der Luft geschützt, mit den breiten Flächen ganz nahe an einander, waren aber durch ein dünnes Blatt Seidenzeug von einander isolirt; von jeder Platte führte ein Drath nach den Apparaten der Station und in der Mitte war jede Platte mit dem einen Ende des über dem Hause durchschnittenen Leitungsdrathes verbunden. Der die Leitung durchlaufende galvanische Strom musste also die Apparate durchlaufen, da das Seidenzeug ihm den Uebertritt von einer Platte zur anderen verwehrte; die Luftelektricität dagegen lief mit Ueberspringung des kleinen Zwischenraumes zwischen den Platten in der Leitung weiter, ohne in die Apparate einzutreten; ein Weg zur Erde war freilich der Luftelektricität auch nicht geboten. William Fardely vereinfachte 1847 diesen Blitzableiter dadurch, dass er mit Weglassung der Platten die beiden Enden des Leitungsdrathes unter einem kleinen Dächelchen auf der Tragsäule einfach einander gegenüber stehen liess, so nahe an einander, dass die Luftelektricität leicht

überspringen konnte; von den Drathenden aber führten zwei wenigstens zwanzig Fuss lange feine Dräthe nach den Stationsapparaten, damit so die Apparate umsomehr geschützt seien. Auch eröffnete Fardely dem Blitz einen kurzen Weg zur Erde (vergl. Polytechnisches Centralblatt, 1849, S. 1166), indem er dem Leitungsdrathe eine Erdleitung so nahe gegenüber stellte, dass der Blitz auf die Erdleitung überspringen konnte; die Erdleitung wurde zum Theil ähnlich wie ein gewöhnlicher Blitzableiter mit einer Auffangestange versehen. Endlich fügte Fardely noch eine Vorrichtung hinzu, durch welche die Apparate bei Gewittern ganz aus der Leitung ausgeschaltet werden konnten. Im Jahre 1849 erst wurde vom Professor Meissner in Braunschweig der Blitzableiter von Steinheil in Blitzplatten umgewandelt; die Blitzplatten können im Stationszimmer selbst aufgestellt werden und bestehen für Endstationen aus zwei Platten, von denen aber nur die eine mit der Luftleitung, die andere der ersteren nahe gegenüber stehende mit der Erde verbunden ist. Realschuldirector Krüger in Fraustadt schlug die Benutzung von Leydener Flaschen anstatt der Platten vor.

Nach dem Steinheil'schen Princip sind eine sehr grosse Anzahl verschiedener Blitzableiter für Telegraphenapparate construirt worden, und eine bunte Mannigfaltigkeit herrscht in dieser grossen Gruppe, in welcher charakteristische Verschiedenheiten theils in der Form der Theile, zwischen welchen der Funke überspringt, theils in dem Stoffe, durch welchen derselbe überspringt, theils endlich bezüglich des Ortes, an welchem der Blitzableiter aufgestellt wird, hervortreten.

Rücksichtlich der Form der Theile, zwischen welchen der Blitz überspringt, lassen sich unterscheiden:

1. Die Blitzplatten. Eine in Sachsen vielfach verwendete zweckmässige Construction der Blitzplatten für einfache Mittelstationen besteht aus drei über einander liegenden, durch zwischenliegende dünne Kautschukstreifen von einander isolirten gusseisernen Platten; die mittelste *cd* (Fig. 30 Taf. V) ist durch den Drath *E* mit der Erde, die unterste *ab* mit der einen Luftleitung *L*, die oberste *ef* mit der anderen Luftleitung L_1 verbunden; durch die Dräthe *g* und *h* stehen die Apparate *A* mit den Platten *ef* und *ab* in Verbindung; der galvanische Strom geht von *L* durch *ab* und *h* nach *A* und dann durch *g* und *ef* nach L_1 weiter; die Luftelektricität springt von *ab* oder *ef* auf die Platte *cd* über und fliesst durch *E* zur Erde ab, und damit dies recht leicht geschehen könne, sind die Platten an den einander zugewandten Flächen kreisförmig gerieft und greifen auch durch einander hindurch. Für Stationen mit mehreren Linien sind in den Niederlanden die Blitzplatten so construirt, dass die Leitungen mit starken Messingstreifen verbunden sind, über welche ein Blatt glattes Papier und darauf eine schwere, mit der Erde verbundene Zinkplatte gelegt wird (*vergl. Zeitschrift* des deutsch-österreich. Telegraphenvereins, 1858, S. 187).

2. Spitzenblitzableiter. Schon Professor Meissner wendete anstatt der Platten zwei sich nahe gegenüberstehende Spitzen an, welche er übrigens genau so einschaltete wie die Platten; trotzdem dass die Elektricität von Spitzen leichter überfliesst, zeigten sich im Sommer 1849 die Spitzen nicht so wirksam, als die Platten (vergl. Schellen, elektromagnetischer Telegraph, S. 227). Später construirte Nottebohm für die preussischen Leitungen einen Spitzenableiter, bei welchem ein Doppelkegel in der Mitte zwischen zwei Spitzen stand, welche einerseits mit den beiden Leitungen, andererseits mit den Apparaten verbunden waren, während der Doppelkegel mit der Erde in Verbindung stand. Breguet wählte als mittleren, mit der Erde verbundenen Theil eine breitere, sägenartig gezackte Platte und stellte derselben zwei ebenfalls sägenartig gezahnte Platten gegenüber, welche einerseits mit den Luftleitungen, andererseits mit den Apparaten verbunden wurden. Ein ähnlicher Blitzableiter wurde bei den französischen Eisenbahntelegraphen angewendet, aber zugleich dafür Sorge getragen, dass der nach den Apparaten gehende Strom atmosphärischer Elektricität beim Durchgange durch einen feinen Drath diesen schmelze und sich so den Weg nach den Apparaten selbst abbreche; Shaffner beschreibt in seinem *Telegraph manual*, S. 579 bis 583 drei verschiedene Arten dieser Blitzableiter, von denen zwei so eingerichtet sind, dass man die Luftleitung entweder unmittelbar unter Ausschaltung des Blitzableiters, oder mittelbar durch den Blitzableiter mit den Apparaten verbinden, dass man sie aber auch unmittelbar mit der Erdleitung verbinden kann; auf Stationen, welche mit einem Linienwechsel versehen sind, ist die letztere Einrichtung überflüssig, da durch den Wechsel selbst schon, wie früher gezeigt wurde, jede Linie mit der Erdleitung unmittelbar verbunden werden kann. Die in neuester Zeit in Frankreich angewendeten Spitzenableiter bestehen aus zwei Metallplatten, von denen die eine mit der Erde, die andere einerseits mit der Luftleitung, andererseits mit den Apparaten in leitender Verbindung steht; aus jeder dieser beiden Platten stehen zwei Spitzen heraus, deren äusserste Punkte nur ganz wenig von der anderen Platte abstehen, wie es Fig. 31 anschaulich macht. In England construirte Charles V. Walker schon vor 1849 einen Spitzenableiter so, dass er die Erdleitung (vergl. Shaffner, *telegraph manual*, S. 583) mit einer kupfernen Röhre verbindet, welcher an jedem Ende eine Scheibe gegenübersteht, aus welcher gegen die Röhre gerichtete Spitzen hervorstehen; die eine Scheibe war mit der Luftleitung, die andere mit den Apparaten verbunden, von der einen endlich ging ein in der Achse der Röhre liegender Metallstab aus, an welchen sich ein feiner Metalldrath, in einigen Windungen auf einer hölzernen Spule nahe an der inneren Röhrenfläche gelegen, anschloss und bis zur zweiten Scheibe führte; auf dem Metallstabe endlich standen ebenfalls mehrere Spitzen heraus und endeten knapp vor der inneren Fläche der Kupferröhre. Obwohl dieser Blitzableiter durch seine

vielen Spitzen ein leichtes Ueberspringen an vielen Stellen zugleich ermöglicht und im Nothfalle noch durch Schmelzung des feinen Metalldrathes die Apparate zu schützen verspricht, leidet er doch an dem grossen Uebelstande, von welchem auch die Blitzableiter nicht ganz frei sind, nämlich dass er sich nicht bequem überwachen lässt, weil man bei den eingeschlagenen Theilen nicht erkennen kann, ob die Spitzen in gehöriger Nähe an der Röhre stehen. Prof. Dr. Luigi Magrini änderte daher diesen Ableiter so um, dass aus einer mit der Luftleitung und den Apparaten verbundenen hohlen Röhre zwei Reihen von Spitzen vorstehen, denen zwei mit der Erde verbundene Metallplatten mit ihrer inneren vergoldeten Fläche gegenübergestellt sind; diese Platten bilden die obere und untere Wand des Gehäuses für den Blitzableiter, während die beiden Seitenwände von Glas sind, so dass man jederzeit den Abstand der Spitzen von den Platten beobachten kann (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 248 ff.). Diese Blitzableiter dürften aber zu zusammengesetzt und kostspielig sein, da schon ein weit einfacherer, in Oesterreich allgemein in Gebrauch befindlicher Spitzenableiter, bei Anwendung der nöthigen Sorgfalt und Aufmerksamkeit von Seite der Beamten, ganz vortreffliche Dienste leistet. Es enthält dieser, auch in der Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1854, S. 252 beschriebene und in der halben natürlichen Grösse abgebildete Blitzableiter auf einem Bretchen unter einem ganz einfachen Glaskästchen für jede in die Station einmündende Leitung drei Messingständer *a*, *b* und *c* (Fig. 32); die Leitung *L* wird nach dem mittleren Ständer *b* geführt, welcher mit dem hinteren Ständer *a* durch einen sehr dünnen, gewundenen Messingdrath und von da durch den dickeren Kupferdrath *A* mit den Telegraphenapparaten verbunden ist, während von dem vorderen Ständer *c* ein dicker Drath *E* nach der Erde führt; in die beiden Ständer *b* und *c* sind stellbar zwei einander zugewandte metallene Kegel eingelegt, deren vorderste Spitzen von Platin sind. Je näher die Spitzen einander gestellt werden, desto leichter kann die Luftelektricität vom Ständer *b* auf den Ständer *c* übergehen und durch den Drath *E* zur Erde abfliessen, während die galvanischen Telegraphenströme ihren Weg durch den feinen und schlechter leitenden Messingdrath nach den Apparaten nehmen müssen; will ein stärkerer Strom der Luftelektricität nach den Apparaten gehen, so wird sich der dünne Drath bis zum Schmelzen erhitzen. Oft habe ich es erlebt, dass bei diesen wirksamen Blitzableitern die Platinspitzen durch einen Blitzschlag bis zur Grösse einer grossen Stecknadelkuppe zusammengeschmolzen wurden, ohne dass die Apparate verletzt wurden; eine gute Erdleitung von entsprechendem Querschnitte ist natürlich auch hier unerlässlich. Diese Blitzableiter waren eine Zeitlang auch in Preussen gebräuchlich, es wurden aber dort später anstatt der Spitzen kreisförmige Schneiden (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreich. Telegraphenvereins, 1854, S. 40) eingesetzt, welche

nicht so oft zu erneuern sind als die dafür billigeren Spitzen. Auch in Schweden bedient man sich der Spitzenableiter.

3. In Amerika sind zwar die von Charles T. Smith angegebenen kupfernen Blitzplatten mit zwei zwischen gelegten Papierstreifen im allgemeinsten Gebrauche, doch wurden auch Bürstenblitzableiter angewendet, bei denen einer mit der Erdleitung verbundenen Kupferplatte eine Drathbürste gegenüberstand, welche aus dünnen, aus einem 4 Zoll langen und 2 Zoll breiten Lederstreifen hervorstehenden und durch eine zweite Kupferplatte mit der Luftleitung in Verbindung stehenden Dräthen bestand.

Als Stoff, in welchem der Funke überspringt, wurde gewählt:

1. Der luftleere oder doch luftverdünnte Raum nach einem Vorschlage von Barthelemy Bianchi; der Leitungsdrath ist mit einer Metallkugel verbunden, welche in einer grösseren, aus zwei Halbkugeln bestehenden gläsernen Hohlkugel eingeschlossen ist; die Halbkugeln sind durch einen mit der Erde verbundenen kupfernen Ring verbunden, aus welchem Spitzen nach der Metallkugel herausragen; aus der gläsernen Hohlkugel wird die Luft ausgepumpt. Ferner hat Siemens in Berlin auch Blitzplatten construirt, bei denen der Funke im luftverdünnten Raume überspringt.

2. Die atmosphärische Luft bei den meisten der bereits erwähnten Blitzableiter; vergl. *Comptes rendus* XXXVIII, No. 20, S. 877.

3. Papierstreifen bei den Blitzableitern von Highton, Wenkebach und den amerikanischen Blitzplatten.

4. Seidenzeug bei dem Blitzableiter von Steinheil, von Highton in der früher beschriebenen Weise, oder auch so, dass der mit Seide umwickelte Leitungsdrath durch einen mit der Erde verbundenen, mit Feilspänen gefüllten hohlen Cylinder geführt wurde (nach einem Patente vom 7. Februar 1850; vergl. *Repertory of Patent Inventions*, 1850, S. 143); ferner bei dem noch näher zu beschreibenden Stangenableiter von Matzenauer.

5. Kohle, von C. Turner in Cheraw auf den Linien in Louth-Carolina angewendet; die Kohle befindet sich in kleinen, mit der Erde leitend verbundenen Metallcylindern und in der Achse des Cylinders ist der Leitungsdrath durch die Kohle hindurchgeführt.

6. Alkohol. Pouget-Maisonneuve schlug einen Alkohol von 40 Volumenprocent vor (vergl. Zeitschrift des deutsch-österreichischen Telegraphenvereins, 1856, S. 232, aus Becquerel, *traité d'électricité etc.*). Masson wählte 90procentigen Alkohol, in welchen die Spitzen zweier Scheiben eintauchen, von denen eine mit der Erde, die andere mit der Leitung verbunden ist; zwar isolirt der Alkohol für galvanische Ströme und wird von der Luftelektricität durchsprungen, doch dürfte er zu stark verdunsten und zu gefährlich sein, weil er durch den Blitz leicht entzündet werden kann.

Der Ort, an welchem der Blitzableiter aufgestellt wird, ist:

1. gewöhnlich das Apparatzimmer der Telegraphenstation, weil vorzugsweise die in diesem befindlichen Beamten und Apparate geschützt werden sollen; so waren fast alle bisher genannten Blitzableiter dazu bestimmt, in der Station selbst aufgestellt zu werden.

2. Wo man jedoch auch den Leitungsdrath und die ihn tragenden Säulen gegen die Zerstörung oder Beschädigung durch die atmosphärische Elektricität schützen will und wo man verhüten will, dass Blitzströme auf lange Strecken in der Leitung fortlaufen, muss man Blitzableiter auf den Tragsäulen selbst anbringen. Im Jahre 1854 waren die auf der preussischen Ostbahn zum Schutz der in den Wärterhäusern aufgestellten telegraphischen Glockenwerke angewandten Blitzableiter auf den Säulen befestigt; diese Blitzableiter bestanden aus Messingplatten, welche am Umfange mit Platinschneiden versehen waren, haben sich aber als unzureichend erwiesen. Der k. k. österreichische Telegrapheninspector Matzenauer schlug 1848 vor, über die Leitungen vor dem Eintritt in die Station, also auf den Tragstangen, querüber im Zickzack einen mit der Erde verbundenen Drath zu legen und ihn auf den Leitungsdräthen durch seidene Schleifen so zu befestigen, dass er durch die Seide zugleich gegen die Leitungsdräthe zwar isolirt wäre, die Luftelektricität aber doch durch die Seide hindurch schlagen und zur Erde gelangen könnte. 1849 wurden auf der Linie Wien-Lundenburg zuerst Blitzableiter angewendet, welche jetzt auf sehr vielen Linien in Gebrauch sind und gute Dienste leisten: Ein Drathseil oder Blechstreifen läuft an der Säule herab bis zur Erde, oben aber endet er gabelförmig in zwei eiserne Spitzen, und diesen stehen zwei andere Spitzen einer mit der Leitung verbundenen eisernen Gabel gegenüber; die Luftelektricität springt leicht an den Spitzen über und fliesst zur Erde ab, die galvanische dagegen vermag es nicht. 1850 machte Matzenauer wieder einen anderen Vorschlag, nämlich die Leitung auf eine gusseiserne Glocke an der Säule aufzulegen, einen in die Glocke eingesteckten eisernen Kern aber leitend mit der Erde zu verbinden, gegen die Glocke aber ihn durch zwei auf ihn gesteckte Elfenbeinscheibchen, auf welchen die Glocke ruhen sollte, zu isoliren. — Wenn man nun Blitzableiter auf den Tragstangen anbringt, so ist es doch keineswegs nöthig, alle Stangen damit zu versehen, sondern man wird zwischen je zwei Stangen mit Blitzableitern stets eine Anzahl ohne Blitzableiter stehen lassen, wie viel? das lässt sich nicht allgemein bestimmen, sondern hängt von der meteorologischen Beschaffenheit des Ortes und der Güte der Blitzableiter ab.

Zum Schluss noch die Beschreibung des ganz eigenthümlichen Blitzableiters, welchen sich George Edward Dering am 27. Juni 1851 in England patentiren liess. Zwei mit gleichnamiger Elektricität geladene Körper stossen sich bekanntlich ab, während zwei mit entgegengesetzter Elektricität geladene Körper sich anziehen. Dering lässt nun von einem mit der *Luftleitung leitend* verbundenen Metallstücke an Dräthen möglichst leicht

beweglich zwei Metallkugeln herabhängen und stellt zur Seite sehr nahe neben die Kugeln zwei mit der Erde verbundene Metallplatten, an welche die Kugeln anschlagen, sobald sie pendelnd auseinander gehen. Das Ganze ist zum Schutz gegen Beschädigung von aussen mit einem Glascylinder umschlossen. Während galvanische Ströme in der Leitung circuliren, bleiben die Kugeln aneinander liegen und die Ströme können nur nach den Apparaten gelangen; erhalten die Kugeln dagegen eine starke Ladung Luftelektricität, so stossen sie sich ab, werden zugleich von entgegengesetzt elektrisch gewordenen seitlichen Platten angezogen, legen sich an diese Platten an und eröffnen so der Luftelektricität einen kurzen Weg nach der Erde; nach dem Abfliessen der Luftelektricität aber fallen die Kugeln wieder zusammen und dann ist die Leitung wieder gegen die Erde isolirt.

Kleinere Mittheilungen.

XXXIV. Ueber einige bestimmte Integrale. — Setzt man

$$P=\int_0^\infty \frac{e^{-zu}}{1+u^2}\,du,$$

so ist

$$P^2=\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{e^{-z(u+v)}}{(1+u^2)(1+v^2)}\,du\,dv,$$

und hieraus wird durch Einführung zweier neuen Variabelen r und ω, welche mit den vorigen durch die Gleichungen $u=r\omega$, $v=r(1-\omega)$ verbunden sind,

$$P^2=\int_0^\infty r e^{-zr}\,dr\int_0^1 \frac{d\omega}{[1+r^2\omega^2][1+r^2(1-\omega)^2]}.$$

Eine ganz ähnliche Behandlung gestattet das Integral

$$Q=\int_0^\infty \frac{u e^{-zu}}{1+u^2}\,du=-\frac{dP}{dz};$$

man erhält nämlich

$$Q^2 = \int_0^\infty r^2 e^{-zr}\, dr \int_0^1 \frac{\omega(1-\omega)\, d\omega}{[1+r^2\omega^2][1+r^2(1-\omega)^2]}.$$

Die Addition von P^2 und Q^2 liefert weiter

$$P^2 + Q^2 = \int_0^\infty r e^{-zr}\, dr \int_0^1 \frac{1 + r^2\omega(1-\omega)}{[1+r^2\omega^2][1+r^2(1-\omega)^2]}\, d\omega$$

$$= \int_0^\infty e^{-zr}\, dr \int_0^1 \left\{ \frac{r\omega}{1+r^2\omega^2} + \frac{r(1-\omega)}{1+r^2(1-\omega)^2} \right\} d\omega$$

oder nach Ausführung der auf ω bezüglichen Integration

$$P^2 + Q^2 = \int_0^\infty e^{-zr} \frac{l(1+r^2)}{r}\, dr.$$

Dieses Resultat lässt sich noch anders darstellen, wenn man die bekannte Formel

$$\frac{1}{r} e^{-zr} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos zu}{r^2 + u^2}\, du$$

anwendet; es wird nämlich

$$P^2 + Q^2 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{l(1+r^2)}{r^2+u^2} \cos zu\, dr\, du$$

und durch Integration in Beziehung auf r

$$P^2 + Q^2 = 2 \int_0^\infty \frac{\cos zu}{u}\, l(1+u)\, du.$$

Die Werthe der mit P und Q bezeichneten Integrale lassen sich bekanntlich durch den Integralsinus und Integralcosinus ausdrücken, nämlich

$$P = \int_0^\infty \frac{\sin zu}{1+u}\, du = \cos z \int_z^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv - \sin z \int_z^\infty \frac{\cos v}{v}\, dv,$$

$$Q = \int_0^\infty \frac{\cos zu}{1+u}\, du = \sin z \int_z^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv + \cos z \int_z^\infty \frac{\cos v}{v}\, dv,$$

und wenn man diese in die vorigen Gleichungen substituirt, so gelangt *man zu* der Formel

$$\left[\int_z^\infty \frac{\cos v}{v}\, dv\right]^2 + \left[\int_z^\infty \frac{\sin v}{v}\, dv\right]^2$$
$$= \int_0^\infty \frac{l(1+r^2)}{r} e^{-zr}\, dr = 2\int_0^\infty \frac{l(1+u)}{u} \cos zu\, du, .$$

welche das Seitenstück zu der Formel $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ darstellt.

(Aus einem Briefe von Dr. Enneper.)

XXXV. Ueber die Lambert'sche Reihe. — Wie man weiss, ist es noch nicht gelungen, die von Lambert aufgestellte Reihe

$$S = \frac{x}{1-x} + \frac{x^2}{1-x^2} + \frac{x^3}{1-x^3} + \frac{x^4}{1-x^4} + \ldots\ldots$$
$$= x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 2x^5 + 4x^6 + \ldots$$

zu summiren und mittelst der Differentialquotienten von S die Anzahl der Theiler einer gegebenen Zahl analytisch zu bestimmen; man kennt nur die von Clausen herrührende Transformation (Crelle's Journal, Bd. III, Seite 95)

$$S = \frac{1+x}{1-x} x + \frac{1+x^2}{1-x^2} x^4 + \frac{1+x^3}{1-x^3} x^9 + \ldots,$$

welche zwar bei kleinen x sehr vortheilhaft ist, aber bei solchen x, die wenig von der Einheit differiren, keinen Nutzen gewährt. Unter diesen Umständen wird es vielleicht von Interesse sein, wenn ich zeige, dass sich die Lambert'sche Reihe durch ein bestimmtes Integral summiren und in die folgende Reihe umsetzen lässt

$$S = \frac{0{,}5772157 - ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)} + \tfrac{1}{4}$$
$$- \frac{1}{144} l\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{86400}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3 - \frac{1}{7620480}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^5 - \ldots,$$

wonach gerade in dem vorhin erwähnten ungünstigen Falle die numerische Berechnung von S sehr rasch geschehen kann.

Bezeichnet man die Bernoulli'schen Zahlen $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{30}$, $\frac{1}{42}$ etc. der Reihe nach mit B_1, B_3, B_5 etc. und macht bei positiven ω Gebrauch von der Reihenentwickelung

$$\frac{1}{e^{2\pi\omega} - 1} = e^{-2\pi\omega} + e^{-4\pi\omega} + e^{-6\pi\omega} + \ldots,$$

so gelangt man leicht zu folgenden drei Integralformeln

1) $$\int_0^\infty \frac{\omega^{2k-1}\,d\omega}{e^{2\pi\omega}-1} = \frac{B_{2k-1}}{4k},$$

2) $$\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha}\right\},$$

3) $$\int_0^\infty \frac{1-\cos\alpha\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,\frac{d\omega}{\omega} = \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{2}\left\{l(1-e^{-\alpha}) - l\alpha\right\},$$

deren letzte auch durch Differentiation in Beziehung auf α leicht zu verificiren ist. Aus No. 2) ergiebt sich

$$\frac{1}{e^{\alpha}-1} - \frac{1}{\alpha} = -\frac{1}{2} + 2\int_0^\infty \frac{\sin\alpha\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega;$$

Hierin nehmen wir der Reihe nach $\alpha = \xi, 2\xi, 3\xi \ldots 2n\xi$, addiren alle entstehenden Gleichungen und erhalten unter Anwendung einer bekannten Summenformel

$$\frac{1}{e^{\xi}-1} + \frac{1}{e^{2\xi}-1} + \frac{1}{e^{3\xi}-1} + \ldots + \frac{1}{e^{2n\xi}-1}$$
$$-\left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n}\right)\frac{1}{\xi}$$
$$= -n + \int_0^\infty \frac{1}{e^{2\pi\omega}-1}\left\{\sin 2n\xi\omega + (1-\cos 2n\xi\omega)\cot\tfrac{1}{2}\xi\omega\right\}d\omega.$$

Ferner ist nach Formel 3) für $\alpha = 2n\xi$

$$\frac{l(2n)}{\xi} = n + \frac{l(1-e^{-2n\xi}) - l\xi}{\xi} - \frac{2}{\xi}\int_0^\infty \frac{1-\cos 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,\frac{d\omega}{\omega}$$

mithin durch Addition beider Gleichungen

$$\frac{1}{e^{\xi}-1} + \frac{1}{e^{2\xi}-1} + \frac{1}{e^{3\xi}-1} + \ldots + \frac{1}{e^{2n\xi}-1}$$
$$-\left\{\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{2n} - l(2n)\right\}\frac{1}{\xi}$$
$$= \frac{l(1-e^{-2n\xi}) - l\xi}{\xi} + \int_0^\infty \frac{\sin 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega$$
$$-\int_0^\infty \left(\frac{2}{\xi\omega} - \cot\frac{\xi\omega}{2}\right)\frac{1-\cos 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega.$$

Setzt man zur Abkürzung

$$4)\qquad \tfrac{1}{1}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n}-l(2n)=C_{2n}$$

und bestimmt den Werth des ersten Integrales mittelst der Formel 2), so hat man folgende Gleichung

$$5)\qquad \frac{1}{e^{\xi}-1}+\frac{1}{e^{2\xi}-1}+\frac{1}{e^{3\xi}-1}+\ldots+\frac{1}{e^{2n\xi}-1}$$

$$=\frac{C_{2n}-l\xi+l(1-e^{-2n\xi})}{\xi}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^{2n\xi}-1}-\frac{1}{2n\xi}\right\}$$

$$-2\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{\xi\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\xi\omega\right)\frac{1-\cos 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega.$$

Bei unendlich wachsenden n wird $Lim\, C_{2n}$ gleich der Constante des Integrallogarithmus, die wir C nennen wollen, daher

$$6)\qquad \frac{1}{e^{\xi}-1}+\frac{1}{e^{2\xi}-1}+\frac{1}{e^{3\xi}-1}+\ldots$$

$$=\frac{C-l\xi}{\xi}+\tfrac{1}{2}-2\,Lim\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{\xi\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\xi\omega\right)\frac{1-\cos 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega.$$

Der angedeutete Grenzenübergang lässt sich auf verschiedene Weisen ausführen, unter Anderem dadurch, dass man das Integral

$$7)\qquad J_{2n}=2\int\limits_0^\infty\left(\frac{1}{\xi\omega}-\tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}\xi\omega\right)\frac{1-\cos 2n\xi\omega}{e^{2\pi\omega}-1}\,d\omega$$

in eine halbconvergente Reihe verwandelt. Hierzu dienen folgende Betrachtungen.

Wenn die Function $F(x)$ nebst ihren Differentialquotienten $F'(x)$, $F''(x)\ldots F^{(2n+1)}(x)$ endlich und stetig bleibt, während x bis auf $x+h$ anwächst, so gilt bekanntlich die Gleichung

$$hF'(x)=\Delta F(x)-\tfrac{1}{2}h\Delta F'(x)$$

$$+\frac{B_1h^2}{1.2}\Delta F''(x)-\frac{B_3h^4}{1.2.3.4}\Delta F^{IV}(x)+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^n\frac{B_{2n-3}h^{2n-2}}{1.2\ldots(2n-2)}\Delta F^{(2n-2)}(x)$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{B_{2n-1}h^{2n+1}}{1.2.3\ldots(2n)}F^{(2n+1)}(x+\vartheta h),$$

worin $\Delta x=h$ und ϑ ein nicht näher bestimmter positiver echter Bruch ist; der letzte Summand bildet den Rest der Reihe und ist hier in der allgemeinen, von Malmstén angegebenen Form dargestellt (Zeitschr. f. Math. u. Phys. Jahrg. I, S. 205). Für $x=0$, $h=u$, $n=k+1$ wird die vorige Gleichung zur folgenden

$$u F'(0) = F(u) - F(0) - \tfrac{1}{2}[F'(u) - F'(0)]$$
$$+ \frac{B_1 u^2}{1.2}[F''(u) - F''(0)] - \frac{B_3 u^4}{1.2.3.4}[F^{IV}(u) - F^{IV}(0)] + \dots$$
$$\dots + (-1)^{k-1}\frac{B_{2k-1} u^{2k}}{1.2\dots(2k)}[F^{(2k)}(u) - F^{(2k)}(0)]$$
$$+ (-1)^k \frac{B_{2k+1} u^{2k+3}}{1.2\dots(2k+2)} F^{(2k+3)}(\vartheta u),$$

und daraus erhält man mittelst der Specialisirung $F(u) = \sin u$

$$\frac{1}{u} - \tfrac{1}{2}\cot\tfrac{1}{2}u = \frac{B_1 u}{1.2} + \frac{B_3 u^3}{1.2.3.4} + \dots$$
$$\dots + \frac{B_{2k-1} u^{2k-1}}{1.2\dots(2k)} + \frac{B_{2k+1} u^{2k+1}}{1.2\dots(2k+2)}\frac{\cos\vartheta u}{\sin u}.$$

Für $u = \xi\omega$ lässt sich diese Gleichung zur Transformation von No. 7) anwenden, und man kommt dabei auf einzelne Integrale von der Form

$$2\int_0^\infty \frac{\omega^{2m-1}(1 - \cos 2n\xi\omega)}{e^{2\pi\omega} - 1} d\omega,$$

deren Werthe sich aus den Gleichungen 2) und 3) finden. Setzt man nämlich zur Abkürzung

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z},$$

so führt die $(2m-1)$malige Differentiation der Gleichung

$$2\int_0^\infty \frac{\sin\xi\omega}{e^{2\pi\omega} - 1} = \tfrac{1}{2} + f(z)$$

zu der Formel

$$2\int_0^\infty \frac{\omega^{2m-1}\cos z\omega}{e^{2\pi\omega} - 1} d\omega = (-1)^{m-1} f^{(2m-1)}(z)$$

mithin

$$2\int_0^\infty \frac{\omega^{2m-1}(1 - \cos 2n\xi\omega)}{e^{2\pi\omega} - 1} d\omega = \frac{B_{2m-1}}{2m} + (-1)^m f^{(2m-1)}(2n\xi).$$

Nach diesen Erörterungen erhält man

8) $$J_{2n} = \frac{B_1\xi}{1.2}\left[\frac{B_1}{2} - f'(2n\xi)\right] + \frac{B_3\xi^3}{1.2.3.4}\left[\frac{B_3}{4} + f'''(2n\xi)\right] + \dots$$
$$\dots + \frac{B_{2k-1}\xi^{2k-1}}{1.2\dots(2k)}\left[\frac{B_{2k-1}}{2k} + (-1)^k f^{(2k-1)}(2n\xi)\right] + R_{2k-1},$$

und zwar ist der mit R_{2k-1} bezeichnete Rest

9) $$R_{2k-1} = \frac{B_{2k+1}\xi^{2k+2}}{1.2\dots(2k+2)} \cdot 2\int_0^\infty \frac{\omega^{2k+2}}{e^{2\pi\omega} - 1}\,\frac{1 - \cos 2n\xi\omega}{\sin\xi\omega}\cos\vartheta\xi\omega\, d\omega.$$

m diesen in Grenzen einzuschliessen, bemerken wir zunächst, dass die unction

$$\varphi(u) = \frac{1 - \cos 2nu}{\sin u}$$

lgende Eigenschaften besitzt

$$\varphi(0) = \varphi(\pi) = \varphi(2\pi) = \varphi(3\pi) \ldots = 0,$$

$$\varphi(u) = \varphi(\pi - u) = -\varphi(\pi + u) = -\varphi(2\pi - u) = +\varphi(2\pi + u) \ldots$$

so die nämliche Periodicität wie $\sin u$ darbietet. Man braucht deshalb ur innerhalb des ersten Quadranten den Verlauf von $\varphi(u)$ zu betrachten id dann ist leicht zu sehen, dass die Differenz $\frac{1}{2}\pi \sin u - u$ immer positiv eibt, folglich

$$\frac{1}{\sin u} < \frac{\pi}{2u} \text{ und } \varphi(u) < \frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos 2nu}{u}$$

t; daher gilt für alle positive u die Ungleichung

$$-\frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos 2nu}{u} < \varphi(u) < +\frac{\pi}{2} \frac{1 - \cos 2nu}{u}.$$

Vendet man dies auf die Gleichung 9) an und beachtet, dass $\cos \vartheta \xi \omega$ die renzen -1 und $+1$ nicht überschreitet, so erhellt augenblicklich, dass $_{2k}$ einen positiven oder negativen Bruchtheil von

$$\frac{\pi}{2} \frac{B_{2k+1}\,\xi^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+2)} \cdot 2 \int_0^\infty \frac{\omega^{2k+1}(1 - \cos 2n\xi\omega)}{e^{2\pi\omega} - 1}\,d\omega$$

$$= \frac{\pi}{2} \frac{B_{2k+1}\,\xi^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+2)} \left[\frac{B_{2k+1}}{2k+2} + (-1)^{k+1} f^{(2k+1)}(2n\xi)\right]$$

usmacht. In Folge aller dieser Bemerkungen lässt sich die Gleichung 5) urch die nachstehende ersetzen

$$10)\quad \frac{1}{e^{\xi} - 1} + \frac{1}{e^{2\xi} - 1} + \frac{1}{e^{3\xi} - 1} + \ldots + \frac{1}{e^{2n\xi} - 1}$$

$$= \frac{C_{2n} - l\xi + l(1 - e^{-2n\xi})}{\xi} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{e^{2n\xi} - 1} - \frac{1}{2n\xi}\right\}$$

$$-\frac{B_1 \xi}{1.2}\left[\frac{B_1}{2} - f'(2n\xi)\right] - \frac{B_3 \xi^3}{1.2.3.4}\left[\frac{B_3}{4} + f'''(2n\xi)\right] - \ldots$$

$$\ldots - \frac{B_{2k-1}\,\xi^{2k-1}}{1.2\ldots(2k)}\left[\frac{B_{2k-1}}{2k} + (-1)^k f^{(2k-1)}(2n\xi)\right]$$

$$-\frac{1}{2}\pi\varrho \frac{B_{2k+1}\,\xi^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+2)}\left[\frac{B_{2k+1}}{2k+2} + (-1)^{k+1} f^{(2k+1)}(2n\xi)\right],$$

obei ϱ einen nicht näher bestimmten positiven oder negativen echten ruch bedeutet.

Die hier vorkommenden Differentialquotienten von $f(z)$ können mit lst einer von Malmstén (Grunert's Archiv, Bd. VI, S. 45) gegebenen ormel entwickelt werden, welche lautet

$$(-1)^m D^m\left(\frac{1}{e^z-1}\right)$$

$$=\frac{a_1}{e^z-1}+\frac{a_2}{(e^z-1)^2}+\frac{a_3}{(e^z-1)^3}+\ldots+\frac{a_{m+1}}{(e^z-1)^{m+1}},$$

$$a_p=(p-1)_0 p^m-(p-1)_1(p-1)^m+(p-1)_2(p-2)^m-(p-1)_3(p-3)^m+\ldots;$$

zugleich ersieht man, dass $f^{(m)}(z)$ bei unendlich wachsenden z gegen die Null convergirt. Demnach ergiebt sich aus No. 10) für $n=\infty$

11)
$$\frac{1}{e^{\xi}-1}+\frac{1}{e^{2\xi}-1}+\frac{1}{e^{3\xi}-1}+\ldots$$

$$=\frac{C-l\xi}{\xi}+\frac{1}{4}-\frac{(B_1)^2\xi}{1.2.2}-\frac{(B_3)^2\xi^3}{1.2.3.4.4}-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(B_{2k-1})^2\xi^{2k-1}}{1.2\ldots(2k).2k}-\frac{1}{2}\pi\varrho\frac{(B_{2k+1})^2\xi^{2k+1}}{1.2\ldots(2k+2)(2k+2)},$$

oder, wenn $e^{\xi}=x$ gesetzt wird,

12)
$$\frac{x}{1-x}+\frac{x^2}{1-x^2}+\frac{x^3}{1-x^3}+\ldots$$

$$=\frac{C-ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)}+\frac{1}{4}-\frac{(B_1)^2}{1.2.2}l\left(\frac{1}{x}\right)-\frac{(B_3)^2}{1\ldots4.4}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^3-\ldots$$

$$\ldots-\frac{(B_{2k-1})^2}{1\ldots(2k).2k}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2k-1}-\frac{1}{2}\pi\varrho\frac{(B_{2k+1})^2}{1\ldots(2k+2)(2k+2)}\left[l\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{2k+1},$$

wobei die vorkommenden Constanten folgende Werthe haben

$$C=0{,}5772156649\ldots,$$

$$\frac{(B_1)^2}{1.2.2}=\frac{1}{144},$$

$$\frac{(B_3)^2}{1\ldots4.4}=\frac{1}{86\,400},$$

$$\frac{(B_5)^2}{1\ldots6.6}=\frac{1}{7\,620\,480},$$

$$\frac{(B_7)^2}{1.2\ldots8.8}=\frac{1}{290\,304\,000},$$

$$\frac{(B_9)^2}{1\ldots10.10}=\frac{1}{6322\,821\,120},$$

u. s. w.

Obschon die nach Potenzen von $l\left(\frac{1}{x}\right)$ fortschreitende Reihe nur halbconvergent ist, so bietet sie doch ein vorzügliches Mittel zur Summirung der Lambert'schen Reihe, falls $l\left(\frac{1}{x}\right)$ weniger als die Einheit, mithin x *mehr als* $\frac{1}{e}=0{,}36788$ beträgt. Für die noch nicht sehr vortheilhafte An-

ahme $x = 0{,}4$ möge die vollständige Rechnung, welche mein College, lerr Professor Fort, auszuführen und durch die Clausen'sche Formel zu ontroliren die Güte hatte, hier Platz finden. Schreibt man statt No. 12) infach

$$S = X_0 + \tfrac{1}{4} - X_1 - X_2 - X_3 - \ldots,$$

ist für $x = 0{,}4$

$$\begin{array}{rl} l\dfrac{1}{0{,}4} = & 0{,}9162907319 \\ ll\dfrac{1}{0{,}4} = & -\,0{,}0874215717 \\ X_0 = & 0{,}7253562799 \\ \tfrac{1}{4} = & 0{,}25 \\ \hline X_0 + \tfrac{1}{4} = & 0{,}9753562799 \\ & 0{,}0063721209 \\ \hline S = & 0{,}9689841590 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} X_1 = & 0{,}0063631301 \\ X_2 = & 0{,}0000089040 \\ X_3 = & 0{,}0000000848 \\ X_4 = & 0{,}0000000019 \\ X_5 = & 0{,}0000000001 \\ \hline & 0{,}0063721209 \end{array}$$

agegen giebt die Clausen'sche Formel, welche durch

$$S = Y_1 + Y_2 + Y_3 + Y_4 + \ldots$$

argestellt werden möge,

$$\begin{array}{rl} Y_1 = & 0{,}9333333333 \\ Y_2 = & 0{,}0353523810 \\ Y_3 = & 0{,}0002979928 \\ Y_4 = & 0{,}0000004521 \\ Y_5 = & 0{,}0000000001 \\ \hline S = & 0{,}9689841593. \end{array}$$

Ist $x \geqq 0{,}9$, so hat man bereits auf sieben Decimalen genau

$$S = \frac{C - ll\left(\frac{1}{x}\right)}{l\left(\frac{1}{x}\right)} + \tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{144}\, l\left(\frac{1}{x}\right),$$

ährend man in demselben Falle wenigstens 13 Glieder der Clausen'schen eihe berechnen müsste, um die nämliche Genauigkeit zu erreichen.

Angesichts der Formel 11) liegt der Gedanke nahe, dass es kürzer in würde, in der bekannten Summenformel

$$f(0) + f(\xi) + f(2\xi) + \ldots + f(\overline{q-1}\,\xi)$$
$$= \frac{1}{\xi}\int_0^{q\xi} f(x)\,dx - \tfrac{1}{2}\left[f(q\xi) - f(0)\right]$$
$$+ \frac{B_1\,\xi}{1\,.\,2}\left[f'(q\xi) - f'(0)\right] - \frac{B_3\,\xi^3}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\left[f'''(q\xi) - f'''(0)\right] + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^{k+1}\frac{B_{2k+1}\,\xi^{2k+1}}{1\,.\,2\ldots(2k)}\left[f^{(2k-1)}(q\xi) - f^{(2k-1)}(0)\right] + R$$

Substitution

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}$$

vorzunehmen und nachher q ins Unendliche wachsen zu lassen. Man gelangt allerdings zu derselben Reihe, aber man stösst auch bei der Untersuchung des Restes auf eine Schwierigkeit. Man kennt nämlich nur zwei Hauptformen des Restes R; die erste ist allgemein und lautet

$$R = (-1)^k \varepsilon \frac{B_{2k+1}\, \xi^{2k+1}}{1.2 \ldots (2k+2)} q M,$$

worin M den absolut grössten Werth bezeichnet, welchen $f^{(2k+2)}(x)$ zwischen $x=0$ und $x = q\xi$ erreicht. Begreiflicher Weise lässt sich hiervon bei unendlich wachsenden q kein Gebrauch machen. Die andere Form des Restes ist

$$R = (-1)^{k+1} \frac{\varrho\, B_{2k-1}\, \xi^{2k-1}}{1.2.3 \ldots (2k)} \left[f^{(2k-1)}(q\xi) - f^{(2k-1)}(0) \right]$$

und gilt unter der Bedingung, dass $f^{(2k)}(x)$ innerhalb des Intervalles $x=0$ bis $x = q\xi$ sein Vorzeichen nicht ändert. Auch diese Form des Restes gewährt keinen Nutzen, weil die Function

$$f(x) = \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{2x}{(2\pi)^2 + x^2} + \frac{2x}{(4\pi)^2 + x^2} + \frac{2x}{(6\pi)^2 + x^2} + \ldots$$

der obigen Bedingung nicht genügt. Man findet nämlich

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^{k+1}\, 2.1.2 \ldots (2k) \left\{ \frac{\sin(2k+1)\,\vartheta_1}{(r_1)^{2k+1}} + \frac{\sin(2k+1)\,\vartheta_2}{(r_2)^{2k+1}} + \ldots \right\},$$

$$r_n = \sqrt{(2n\pi)^2 + x^2}, \quad tang\, \vartheta_n = \frac{x}{2n\pi},$$

und hieraus ist leicht zu ersehen, dass der Zeichenwechsel von $f^{(2k)}(x)$ ungefähr ebenso vor sich geht, wie bei $\sin(2k+1)\,\vartheta_1$. Nach der Malmstén'schen Formel hat man z. B.

$$f^{IV}(x) = \frac{1}{e^x - 1} + \frac{15}{(e^x-1)^2} + \frac{50}{(e^x-1)^3} + \frac{60}{(e^x-1)^4} + \frac{24}{(e^x-1)^5} - \frac{24}{x^5}$$

und bei numerischer Berechnung für $x = l7 = 1{,}9459$ und für $x = l5700 = 8{,}6498$

$$f^{IV}(1{,}9459) = +\,0{,}00400; \quad f^{IV}(8{,}6498) = -\,0{,}00032.$$

Unter diesen Umständen musste zu einem anderen Verfahren gegriffen werden, und zwar dürfte sich dieses in allen den Fällen empfehlen, wo $f(x)$ als Werth eines bestimmten Integrales von der Form

$$f(x) = \int_\alpha^\beta \psi(\omega) \sin x\omega\, d\omega$$

dargestellt werden kann, vorausgesetzt, dass die Gleichungen

$$f^{(m)}(x)=\int_{\alpha}^{\beta}\omega^{m}\,\psi(\omega)\,\sin\left(\tfrac{1}{2}m\pi+x\omega\right)d\omega,$$

$$\int_{0}^{x}f(x)\,dx=\int_{\alpha}^{\beta}\psi(\omega)\,\frac{1-\cos x\omega}{\omega}\,d\omega$$

richtig sind und dass $\psi(\omega)$ zwischen $\omega=\alpha$ und $\omega=\beta$ sein Vorzeichen nicht wechselt.

SCHLÖMILCH.

XXXVI. Ueber die graphische Bestimmung der Kegelschnitte nach Sätzen von Pascal und Brianchon. Von Dr. WILH. FIEDLER.

Die Construction eines beliebigen sechsten Peripheriepunktes eines Kegelschnittes aus fünf gegebenen Punkten nach dem Satze von Pascal und die Construction einer beliebigen sechsten Tangente eines Kegelschnittes aus fünf gegebenen Tangenten nach dem Satze von Brianchon sind beide so leicht ersichtlich und von dem in graphischen Operationen Geübten so leicht bequem zu gestalten, dass an diesem Orte nicht wohl von ihnen selbst die Rede sein kann; denn es ist doch wohl eine Ausnahme von der Regel, wenn in einem ganz kürzlich erschienenen, für eine höhere Unterrichtsanstalt bestimmten Lehrbuche der analytischen Geometrie die Meinung ausgesprochen wird, diese Bestimmung sei analytisch wie constructiv schwierig und complicirt. Es wäre schlimm für den darstellenden Geometer, wenn dem so wäre!

Aber es ist für die graphische Darstellung von besonderem Werth, zu den Punkten der Curve die Tangenten oder zu den Tangenten die Berührungspunkte bestimmen zu können. Allerdings erlaubt der Satz von Pascal, aus fünf Peripheriepunkten die Tangente eines derselben und der Satz von Brianchon, aus fünf Tangenten den Berührungspunkt einer derselben zu construiren, indem man die Tangente als die gerade Verbindungslinie zweier zusammenfallender Punkte und den Berührungspunkt als den Durchschnitt zweier zusammenfallender Tangenten der Curve betrachtet. Aber es giebt eine bisher unbeachtete Form beider Sätze, welche gestattet, zu einer Gruppe von sechs Punkten eines Kegelschnittes die sechs Tangenten und zu einer Gruppe von sechs Tangenten eines solchen die sechs Berührungspunkte in einer einzigen Construction zu bestimmen. Dieser Form und Construction ist die gegenwärtige kurze Mittheilung gewidmet.

Man darf die drei Paare gegenüber liegender Seiten des umschriebenen Secksecks als drei dem Kegelschnitt umschriebene Linien zweiter Ordnung und ebenso die drei Paare gegenüber liegender Ecken des eingeschriebenen Sechsecks als drei dem Kegelschnitt eingeschriebene Oerter

zweiter Classe betrachten; bekanntlich gelten die Sätze von Brianchon und Pascal auch in der so gewonnenen allgemeinen Gestalt. Diese Sätze selbst lassen sich alsdann aussprechen, wie folgt, und gewinnen Zusätze, deren Giltigkeit aus demselben Beweisverfahren erhellt und die auch, wie die voranstehende Abhandlung zeigt, für Oberflächen zweiten Grades ihre Richtigkeit behalten.

1. Der Satz von Brianchon. Wenn drei Paare von geraden Linien einem und demselben Kegelschnitt umschrieben sind, so schneiden sich die Diagonalen der aus je zweien dieser Paare entstehenden Vierseite vier Mal zu dreien in einem Punkte und die Berührungssehnen der drei umschriebenen Linienpaare durchschneiden sich in den Durchschnittspunkten der Diagonalen und der Gegenseitenpaare des so entstandenen Vierecks.

In Fig. 33 Tafel V erscheint der Satz in seiner Bedeutung und Anwendung. *ABCDEF* ist das umschriebene Sechseck, die Verbindungslinien seiner Gegenecken schneiden sich in einem und demselben Punkte *P*. Die drei aus den Paaren seiner Gegenseiten entstehenden Vierecke sind respective *Aa Dd*, *Bb Ee*, *Cc Ff*. In *P*, *Q*, *R*, *S* hat man die vier Punkte, in denen sich die Diagonalen dieser Vierecke zu je drei begegnen. Endlich sind *L*, *M*, *N* die Durchschnittspunkte der Gegenseiten und Diagonalen des Vierecks *PQRS* und die Durchschnittspunkte der geraden Linien *LM*, *MN*, *NL* mit den entsprechenden Seiten des Sechsecks, nämlich l, l', m, m', n, n', die Berührungspunkte dieser letzteren mit dem Kegelschnitt. Ist also ein Kegelschnitt durch seine Tangenten bestimmt, so kann man durch eine und dieselbe in dem ausgesprochenen Satze enthaltene Construction für jede Gruppe von sechs derselben die Berührungspunkte finden.

2. Der Satz von Pascal. Wenn drei Paare von Punkten einem und demselben Kegelschnitt eingeschrieben sind, so liegen die Durchschnittspunkte der Gegenseiten der aus je zweien dieser Punktenpaare entstehenden Vierecke vier Mal zu je dreien in einer geraden Linie und die Tangentenpaare, welche den drei eingeschriebenen Punktenpaaren entsprechen, durchschneiden sich in den Durchschnittspunkten der Gegenseitenpaare und Diagonalen des so entstandenen Vierseits.

Diesem Satze entspricht Fig. 34 Tafel V. In derselben bezeichnen alle Buchstaben gerade Linien, wie in der vorigen Punkte; es sind *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* die Seiten des dem Kegelschnitt eingeschriebenen Sechsecks, die Durchschnittspunkte seiner Gegenseiten liegen in derselben geraden Linie *P*. Die drei aus den Paaren seiner Gegenseiten entstehenden Vierseiten sind *Aa Dd*, *Bb Ee*, *Cc Ff*; in *P*, *Q*, *R*, *S* hat man die vier geraden Linien, in denen die Gegenseiten dieser Vierseite sich schneiden. Endlich

sind L, M, N die Diagonalen des von ihnen gebildeten Vierseits und daher l, l', m, m', n, n', die geraden Verbindungslinien der Ecken des Dreiseits LMN mit den eingeschriebenen Punktenpaaren die Tangenten des Kegelschnitts in diesen letzteren. Auf diese Weise bestimmen sich zu jeder Gruppe von sechs Peripheriepunkten eines Kegelschnitts die entsprechenden Tangenten desselben durch eine einzige Construction.

Von Mr. Burnside in Dublin ist kürzlich folgender Satz gefunden und von Rev. G. Salmon mir mitgetheilt worden: Der Durchmesser des Kreises, welcher dem aus zwei Tangenten einer Ellipse und ihrer Berührungssehne gebildeten Dreieck umschrieben ist, ist die vierte Proportionale zu den den beiden Tangenten parallelen Halbdurchmessern und zu dem senkrechten Abstand der Berührungssehne vom Centrum.

Man kann zu dem Beweis dieses Satzes auf mehrere einfache, mehr oder minder directe Arten gelangen. Er wird im Folgenden an den für alle Curven ebenso, wie für Kegelschnitte giltigen Satz geknüpft: Wenn in die Gleichung eines Kegelschnitts die Coordinaten eines Punktes substituirt werden, so ist das Resultat der Substitution dem Rechteck proportional, welches die Segmente einer durch den Punkt in gegebener Richtung gezogenen Sehne bestimmen. (Siehe „Analytische Geometrie der Kegelschnitte“, Art. 286.)

Bezeichne man durch b', b'' jene den gegebenen Tangenten parallelen Halbdurchmesser, durch p den senkrechten Abstand der Berührungssehne vom Centrum des Kegelschnittes und durch d den fraglichen Kreisdurchmesser, so wird behauptet, dass

$$d : b' = b'' : p$$

ist.

Durch S werde das Resultat der Substitution der Coordinaten des Durchschnittspunktes der Tangenten in die Gleichung des Kegelschnitts bezeichnet, das Resultat der Substitution der Mittelpunktscoordinaten in dieselbe Gleichung sei $= 1$, wie es bei der auf die Achsen bezogenen Gleichung der Fall ist; sind dann t', t'' die Längen der Tangenten von ihrem Durchschnittspunkt bis zum Berührungspunkt, so hat man

$$t'^2 : b'^2 = S : 1$$
$$t''^2 : b''^2 = S : 1,$$

somit

$$t' . t'' = b' . b'' . S.$$

Aber auch die vom Durchschnittspunkt der Tangenten auf die Berührungssehne gefällte Senkrechte steht zu dem senkrechten Abstande p der Berührungssehne vom Centrum in dem Verhältniss

$$= S : 1,$$

und man findet daher den Durchmesser jenes Kreises

$$d = \frac{t' t''}{pS} = \frac{b' b''}{p}.$$

Für den Kreis hat man stets

$$d = \frac{r^2}{p}.$$

Bezeichnet man die senkrechten Abstände der beiden Tangenten vom Centrum durch p', p'', so findet man

$$d = \frac{a^2 b^2}{p p' p''}.$$

XXXVII. Ueber die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte der Flächen zweiten Grades.

Bei den elliptischen Schnitten der Flächen zweiten Grades pflegt man den speciellen Fall der Kreisschnitte genauer zu betrachten; dem analog sollte man auch die gleichseitig-hyperbolischen Schnitte nicht mit völligem Stillschweigen übergehen, wie es in allen bekannteren Lehrbüchern geschieht. Dass eine solche Untersuchung manches Bemerkenswerthe darbietet, mag das Folgende zeigen.

I. Das einfache Hyperboloid, der elliptische Kegel und das getheilte Hyperboloid können durch die gemeinschaftliche Gleichung

1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \varepsilon$$

ausgedrückt werden, wobei den genannten drei Fällen die Werthe $\varepsilon = +1$, $\varepsilon = 0$, $\varepsilon = -1$ entsprechen; setzt man zur Abkürzung

$$\frac{c^2}{a^2} = m, \quad \frac{c^2}{b^2} = n,$$

so wird bequemer

2) $$m x^2 + n y^2 - z^2 = \varepsilon c^2.$$

Diese Fläche werde von einer Ebene geschnitten, deren Horizontalspur durch einen beliebigen Punkt gh der xy-Ebene geben und mit der x-Achse den Winkel ψ einschliessen möge. Den Punkt gh nehmen wir zum Anfangspunkte, die genannte Horizontalspur zur Abscissenachse eines neuen, in der Schnittebene liegenden rechtwinkligen Coordinatensystems $x' y'$, und bezeichnen mit ϑ den Neigungswinkel der Ebene $x' y'$ gegen die Ebene xy. Aus der Gleichung 2) erhalten wir sofort die Gleichung des Schnittes durch Substitution der folgenden Werthe (s. d. Verf. Anal. Geom. des Raumes, S. 100, No. 8)

3) $$\begin{cases} x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\vartheta + g, \\ y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\vartheta + h, \\ z = y' \sin\vartheta; \end{cases}$$

die entstehende Gleichung ist von der Form

4) $$A x'^2 + B y'^2 + 2 C x' y' + 2 D x' + 2 E y' + F = 0,$$

und zwar haben A, B, C etc. die Werthe

$$A = m \cos^2\psi + n \sin^2\psi,$$
$$B = (m \sin^2\psi + n \cos^2\psi) \cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta,$$
u. s. w.

Damit die Gleichung 4) eine gleichseitige Hyperbel bedeute, muss $+B=0$ sein; dies giebt zu Folge der Werthe von A und B

$$tang^2\vartheta = \frac{m+n}{(1-m)\cos^2\psi + (1-n)\sin^2\psi},$$

ler, wenn zur Abkürzung

$$p = \frac{1-m}{m+n} = \frac{(a^2-c^2)\,b^2}{(a^2+b^2)\,c^2},$$
$$q = \frac{1-n}{m+n} = \frac{(b^2-c^2)\,a^2}{(a^2+b^2)\,c^2}$$

setzt wird,

5) $$tang^2\vartheta = \frac{1}{p\cos^2\psi + q\sin^2\psi}.$$

Um dies noch anders auszudrücken, bezeichnen wir die Gleichung der chnittebene mit

6) $$\lambda x + \mu y + z = \varrho,$$

onach

7) $$tang^2\vartheta = \lambda^2 + \mu^2, \quad \cos^2\psi = \frac{\mu^2}{\lambda^2+\mu^2}, \quad \sin^2\psi = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+\mu^2}$$

t; durch Substitution dieser Werthe erhalten wir aus No. 5)

8) $$p\mu^2 + q\lambda^2 = 1$$

s Bedingung dafür, dass die Ebene 6) mit der Fläche 2) einen gleichitig-hyperbolischen Schnitt bildet. In der Gleichung 8) fehlt ϱ, mithin ird der Charakter des Schnittes durch parallele Verschiebung der schneinden Ebene nicht geändert; eben deshalb kann man sich auf die Beachtung solcher Schnitte beschränken, welche durch den Coordinatenifang gehen.

Die verschiedenen möglichen Lagen der Ebene

9) $$\lambda x + \mu y + z = 0$$

erden anschaulich, wenn man λ als veränderlichen Parameter ansieht, e zugehörigen μ nach No. 8) bestimmt und die Einhüllende aller der benen aufsucht, welche durch die stetigen Aenderungen von λ und μ entehen. Man erhält zunächst als Differentialquotienten von No. 9) und 8)

$$x + \frac{\partial\mu}{\partial\lambda}y = 0, \quad p\mu\frac{\partial\mu}{\partial\lambda} + q\lambda = 0,$$

nd durch Elimination von $\frac{\partial\mu}{\partial\lambda}$

10) $$q\lambda y - p\mu x = 0;$$

liminirt man noch λ und μ aus 9), 10) und 8), so gelangt man zu der Gleihung

$$p x^2 + q y^2 = p q z^2$$

oder

$$11)\qquad \frac{x^2}{a^2(b^2-c^2)}+\frac{y^2}{b^2(a^2-c^2)}-\frac{z^2}{c^2(a^2+b^2)}=0.$$

Im Allgemeinen entspricht dieser Gleichung eine Kegelfläche, deren Lage von der Rangordnung der Grössen a, b, c abhängt. Ist nämlich c die kleinste Halbachse, so fällt die Kegelachse mit der z-Achse zusammen, und die Formel 5) oder

$$tang^2\,\vartheta=\frac{(a^2+b^2)\,c^2}{b^2(a^2-c^2)\cos^2\psi+a^2(b^2-c^2)\sin^2\psi}$$

liefert für alle ψ reelle ϑ, d. h. die Schnittebenen umhüllen den Kegel vollständig. Wenn zweitens c zwischen a und b liegt und zwar so, dass $a>c>b$ ist, so fällt die Kegelachse in die y-Achse, und der Winkel ϑ bleibt nur so lange reell, als

$$tang^2\,\psi<\frac{b^2(a^2-c^2)}{a^2(c^2-b^2)}$$

genommen wird; die Umhüllung ist dann eine theilweise. Für $b>c>a$ fällt die Kegelachse in die x-Achse, zur Realität von ϑ gehört die Bedingung

$$tang^2\,\psi>\frac{b^2(c^2-a^2)}{a^2(b^2-c^2)},$$

so dass auch hier nur eine theilweise Umhüllung stattfindet. Ist endlich c die grösste Halbachse, so werden gleichseitig-hyperbolische Schnitte unmöglich.

II. Aehnlich gestaltet sich die Sache für das hyperbolische Paraboloid, dessen Gleichung

$$12)\qquad \frac{x^2}{a}-\frac{y^2}{b}=2z$$

sein möge. Durch Substitution der unter No. 3) angegebenen Werthe erhält man eine Gleichung von derselben Form, wie No. 4), und zwar ist darin

$$A=\frac{\cos^2\psi}{a}-\frac{\sin^2\psi}{b},\quad B=\left(\frac{\sin^2\psi}{a}-\frac{\cos^2\psi}{b}\right)\cos^2\vartheta;$$

die Bedingung $A+B=0$ führt hier zu

$$\cos^2\vartheta=\frac{b-a\,tang^2\,\psi}{a-b\,tang^2\,\psi}.$$

Bezeichnet α den Winkel, welchen die geradlinige Horizontalspur des Paraboloides mit der x-Achse einschliesst, so ist bekanntlich

$$tang^2\,\alpha=\frac{b}{a},$$

mithin lässt sich die vorige Gleichung ersetzen durch

$$13)\qquad \cos^2\vartheta=\frac{tang^2\,\alpha-tang^2\,\psi}{1-tang^2\,\alpha\;tang^2\,\psi}=tang\,(\alpha+\psi)\;tang\,(\alpha-\psi).$$

Die Gleichung der Schnittebene sei dieselbe, wie in No. 6); man hat dann

$$cos^2 \vartheta = \frac{1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1}, \quad tang^2 \psi = \frac{\lambda^2}{\mu^2};$$

substituirt man diese Werthe in No. 13) und benutzt die Abkürzungen

$$p = \frac{1}{1 - tang^2 \alpha} = \frac{a}{a - b},$$

$$q = \frac{tang^2 a}{1 - tang^2 \alpha} = \frac{b}{a - b},$$

so erhält man die Bedingungsgleichung

14) $$q\mu^2 - p\lambda^2 = 1.$$

Das Fehlen von ϱ beweist wieder, dass die Schnittebene parallel zu sich selbst verschoben werden darf; wir lassen sie deshalb durch den Coordinatenanfang gehen. Die Einhüllende aller der Schnittebenen, welche den stetigen Aenderungen von λ und μ entsprechen, bestimmt sich ganz wie früher, und zwar findet man als Gleichung der umhüllten Fläche

$$py^2 - qx^2 = pqz^2$$

oder

15) $$\frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{b} + \frac{z^2}{a-b} = 0.$$

Diese Gleichung charakterisirt wiederum einen elliptischen Kegel, dessen Lage von der Rangordnung der Parameter a und b abhängt; die Kegelachse fällt nämlich mit der y-Achse oder mit der x-Achse zusammen, je nachdem $a > b$ oder $a < b$ ist. Ferner zeigt die Formel 13), dass $\alpha + \psi$ und $\alpha - \psi$ immer in demselben Quadranten enthalten sein müssen, dass also die Umhüllung nur eine theilweise ist.

III. Die Zusammenfassung dieser Ergebnisse führt zu folgendem Satze: **Alle Ebenen, welche durch einen festen Punkt gehen und eine Fläche zweiten Grades in gleichseitigen Hyperbeln schneiden, berühren zugleich einen elliptischen Kegel, dessen Scheitel jener feste Punkt ist und dessen Achse parallel zur kleinsten Halbachse oder zum kleineren Parameter der Fläche liegt.**

In dieser Fassung kann der Satz auch leicht direct bewiesen werden, wenn man ihm bei elementaren Vorträgen über die Flächen zweiten Grades einen Platz gewähren will. SCHLÖMILCH.

XXXVIII. Einfache Näherungsformel zur Berechnung der einem gegebenen Manometerstande entsprechenden Windmenge eines Gebläses.

Vom Bergrath Prof. Dr. JULIUS WEISBACH.

Die neue Formel zur Berechnung der Ausflussmenge der Luft unter einer gegebenen Pressung, welche ich im ersten Bande meiner Ingenieur-

und Maschinenmechanik §. 431 (dritte Auflage) entwickelt und bei der Be-rechnung meiner Versuche über die Ausströmungsgeschwindigkeit der com-primirten Luft (s. den Civilingenieur, Bd. 5) zum Grunde gelegt habe, un- nach welcher auch die Windtabellen von Herrn Neuschild (s. Berg- u- hüttenmännische Zeitung, 1859, No. 4) und die von Herrn v. Hau- (s. Rittinger's Erfahrungen im berg- und hüttenmännischen Maschine- Bau- und Aufbereitungwesen, 1858) berechnet worden sind, lässt sich dur- eine ganz einfache Näherungsformel ersetzen, welche bei den mässig- Windpressungen der gewöhnlichen Gebläse vollkommen genügende Ge-nauigkeit gewährt. Im neuesten Hefte des dritten Bandes meiner Inge-nieur- und Maschinenmechanik (§. 425) habe ich nachgewiesen, dass si- die auf den äusseren Luftdruck reducirte Wind- oder Ausflussmenge an-nähernd

$$Q = \left(1 - 0{,}028 \frac{h}{b}\right) \mu F \sqrt{2 g \varepsilon h}$$

setzen lässt, wenn man

unter b den Barometerstand der äusseren Luft,
„ h den Manometerstand,
„ ε das Verhältniss der Dichtigkeit der Manometerflüssigkeit zu der der ungepressten äusseren Luft,
„ g das Beschleunigungsmaass der Schwere,
„ F den Inhalt der Düsen- oder Ausflussmündung, und
„ μ den Ausflusscoefficienten, oder das Verhältniss der effectiven Ausflussmenge zum theoretischen Windquantum versteht. Nun ist aber sogar bei den Gebläsen für Eisenhohöfen mit Coaksfeuerung meistens h noch nicht $\frac{1}{4} b$, folglich lässt sich, ohne einen Fehler von noch nicht 1 Procent befürchten zu müssen, also für die Anwendung in der Praxis völlig ausreichend,

$$Q = \mu F \sqrt{2 g \varepsilon h}$$

setzen.

Dieser Ausdruck stimmt zwar der Form nach ganz mit der alten Formel überein, welche schon Schmidt den Berechnungen seiner Versuche zum Grunde gelegt hat, und welche auch Gerstner, D'Aubuisson und andere ältere Schriftsteller, sowie auch später Poncelet als richtig oder genügend angenommen haben (s. die allgemeine Maschinenencyclopädie, Bd. 1, Artikel „Ausfluss", und Poncelet's *Note sur les expériences de M. Pecqueur etc.*), weicht aber in der Bedeutung insofern von jener ab, als derselbe hier in Q die unter dem äusseren, in der alten Bedeutung aber das unter dem inneren Luftdruck gemessene Wind- oder Ausströmungsquantum angiebt, und daher auch unter ε das Verhältniss der Dichtigkeit der Manometerflüssigkeit zu der gepressten inneren Luft bedeutet.

Ein Cubikmeter atmosphärische Luft wiegt bei Null Grad Wärme und unter dem Drucke einer Atmosphäre: 1,3 Kilogramm; bei einer Temperatur von τ Grad C. aber nur

$$\frac{1,3}{1+\delta\tau} = \frac{1,3}{1+0,00367\,\tau} \text{ Kilogramm},$$

und bei einer Pressung von b Meter Quecksilbersäule:

$$\frac{1,3}{1+\delta\tau} \cdot \frac{b}{0,76} = \frac{1,71\,b}{1+0,00367\,\tau}.$$

Die Dichtigkeit des Quecksilbers ist 13,6 Mal so gross, als die des Wassers, und da nun 1 Cubikmeter Wasser 1000 Kilogramm wiegt, so folgt in der ersten Bedeutung

$$\varepsilon = 1000 \,.\, 13,6 : \frac{1,71\,b}{1+\delta\tau} = \frac{7950\,(1+0,00367\,\tau)}{b},$$

und dagegen in der zweiten, nach der älteren Formel

$$\varepsilon = 7950\,\frac{(1+0,00367\,\tau)}{b+h}.$$

Es ist daher nach der neuen Bestimmung das unter dem Ueberdrucke h in die freie Luft strömende Windquantum:

$$Q = \mu F \sqrt{2g \,.\, 7950\,(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b}}$$

$$= 89,2\,\mu F \sqrt{2g\,(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b}},$$

oder, wenn man $2g = 2 \,.\, 9,81 = 19,62$ Meter einsetzt,

$$Q = 395\,\mu F \sqrt{(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter},$$

und dagegen nach der alten Bestimmung, das unter demselben Ueberdrucke ausströmende Luftquantum

$$Q_1 = 395\,\mu F \sqrt{(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b+h}},$$

oder dasselbe vom inneren Drucke $b+h$ auf den äusseren Druck b reducirt:

$$Q = \frac{b+h}{b}\,Q_1 = 395\,\mu F \sqrt{(1+0,00367\,\tau)\,\frac{b+h}{b}\,.\,\frac{h}{b}},$$

d. i. $\sqrt{\frac{b+h}{b}}$ oder annähernd $\left(1+\frac{h}{2b}\right)$ Mal so gross, als nach der neueren Bestimmung.

Giebt man F in Quadratfuss, so hat man nach der neuen Ermittelung

$$Q = 1258\,\mu F \sqrt{(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b}}$$

und nach der alten Annahme:

$$Q_1 = 1258\,\mu F \sqrt{(1+0,00367\,\tau)\,\frac{h}{b+h}},$$

daher

$$Q = 1258\,\mu F \sqrt{(1 + 0{,}00367\,\tau)\,\frac{b+h}{h} \cdot \frac{h}{b}} \text{ Cubikfuss.}$$

Nach Einführung des mittleren Werthes $\mu = 0{,}92$ geht die neue Formel in folgende über:

$$Q = 363\,F \sqrt{(1 + 0{,}00367\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1157\,F \sqrt{(1 + 0{,}00367\,\tau)\,\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuss,}$$

oder, wenn man eine mittlere Temperatur $\tau = 10$ Grad voraussetzt:

$$Q = 369\,F \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

$$= 1179\,F \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuss.}$$

Bei Anwendung auf die erhitzte Gebläseluft von der Temperatur τ_1 hat man natürlich

$$Q = 363\,F \sqrt{(1 + 0{,}00367\,\tau_1)\,\frac{h}{b}} \text{ Cubikmeter}$$

zu setzen und daher die durch die letzte Formel gefundenen Werthe noch durch

$$\sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\,\tau_1}{1 + 0{,}00367\,\tau}} = 0{,}98 \sqrt{1 + 0{,}00367\,\tau_1}$$

zu multipliciren, z. B. für $\tau_1 = 200$ Grad, durch $0{,}98 \,.\, 1{,}317 = 1{,}29$.

Um dieses Quantum der erhitzten Luft auf die mittlere Temperatur τ zu reduciren, muss man den obigen Ausdruck für Q überdies noch durch

$$\frac{1 + 0{,}00367\,\tau}{1 + 0{,}00367\,\tau_1} = \frac{1{,}0367}{1 + 0{,}00367\,\tau_1},$$

also im Ganzen durch

$$\sqrt{\frac{1 + 0{,}00367\,\tau}{1 + 0{,}00367\,\tau_1}} = \sqrt{\frac{1{,}0367}{1 + 0{,}00367\,\tau_1}} = \frac{1{,}018}{\sqrt{1 + 0{,}00367\,\tau_1}},$$

z. B. für $\tau_1 = 200$ Grad, durch

$$\frac{1{,}018}{\sqrt{1{,}734}} = \frac{1{,}018}{1{,}317} = 0{,}773$$

multipliciren.

Drückt man den Querschnitt F der Ausflussmündung in Quadratzoll aus, so giebt folgende Formel

$$Q = 8{,}2\,F \sqrt{\frac{h}{b}}$$

die Ausflussmenge pro Secunde in preussischen Cubikfuss, als für einen Mündungsquerschnitt von 1 Quadratzoll:

1) $$Q = 8{,}2 \sqrt{\frac{h}{b}} \text{ Cubikfuss.}$$

Hiernach ist z. B. für

$\frac{h}{b} = 0{,}01$	0,02	0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	
$Q = 0{,}82$	1,16	1,83	2,59	3,18	3,67	4,10	
$\frac{h}{b} = 0{,}30$	0,35	0,40	0,45	0,50	0,55	0,60	
$Q = 4{,}49$	4,85	5,19	5,50	5,80	6,08	6,35	Cubikfuss.

Die ältere Annahme giebt die Ausflussmenge pro Secunde für eine senmündung von 1 Quadratzoll Inhalt:

2) $$Q = 8{,}2\sqrt{\frac{b+h}{b}\cdot\frac{h}{b}},$$

ıer die auf das Mariottesche Gesetz gegründete Formel für dieses Windıntum ist

3) $$Q = 8{,}2\sqrt{Log\,nat\left(\frac{b+h}{a}\right)},$$

l endlich der auf die, nach dem Poisson'schen Gesetze erfolgende kühlung der Luft beim Ausströmen Rücksicht nehmende Ausdruck hat Form:

$$Q = 8{,}2\sqrt{\frac{10}{3}\cdot\left(\frac{b+h}{b}\right)^{0,3}\left[\left(\frac{b+h}{b}\right)^{0,3} - 1\right]} \text{ Cubikfuss.}$$

Um die nach diesen vier Formeln berechneten Windmengen übersicht- mit einander zu vergleichen, kann man das Pressungsverhältniss $\frac{h}{\,} = x$ setzen und x als Abscisse, sowie die Wurzelgrösse, deren 8,2- hes die Windmenge giebt, als die zugehörige Ordinate einer Curve anen, für welche man hiernach folgende vier Gleichungen erhält:

1) $$y = \sqrt{x-1},$$
2) $$y = \sqrt{x(x-1)},$$
3) $$y = \sqrt{Log\,nat\,x},$$
4) $$y = \sqrt{\tfrac{10}{3}\,x^{0,3}(x^{0,3}-1)}.$$

Nach diesen vier Formeln sind die Werthe in der folgenden Tabelle, che eine Reihe von Abscissenwerthen innerhalb der Grenzen $x = 1{,}00$ 1,60 enthält, berechnet worden.

Man ersieht aus dieser Tabelle, dass alle vier Formeln bei sehr klei- Pressungen nahe dieselbe Windmenge geben, dass aber mit den Presgen auch die Abweichungen zwischen den nach diesen verschiedenen meln berechneten Werthen der Windmenge wachsen, dass ferner die hydraulische Formel 2) die grössten, die logarithmische Formel 3) die insten und die beiden neueren Formeln 1) und 4) mittlere Werthe für

das Windquantum liefern. Auch fällt in die Augen, dass **bei höheren Pressungen die durch die alte hydraulische Formel 2) erhaltenen Werthe** von den übrigen am meisten abweichen, und dass dagegen die einfache neue Formel 1) nur wenig grössere Werthe angiebt, als die neue, auf das Poisson'sche Wärmegesetz gegründete Formel, z. B. bei dem Pressungsverhältniss $\frac{b+h}{b} = 1{,}50$ oder dem Ueberdruck $= \frac{h}{b} = 0{,}5 = \frac{1}{2}$ des äusseren Druckes, giebt bei einem gewissen Mündungsquerschnitt

die alte hydraulische Formel 2) die Windmenge . . $Q = 0{,}8660$,
die logarithmische Formel 3) . . . . $Q = 0{,}6368$,
die einfache neue Formel 1) . . . . $Q = 0{,}7071$,
und die neue, aus der Theorie der Wärme gefolgerte
Formel 4) . . . . $Q = 0{,}6978$,

wogegen bei dem Pressungsverhältnisse $\frac{b+h}{b} = 1{,}05$ oder dem Ueberdrucke $0{,}05 = \frac{1}{20}$ des äusseren Luftdruckes,

nach Formel 2) $Q = 0{,}2291$,
„ „ 3) $Q = 0{,}2209$,
„ „ 1) $Q = 0{,}2236$, und
„ „ 4) $Q = 0{,}2231$

folgt, also die Verschiedenheit zwischen diesen Formelwerthen noch eine sehr kleine ist.

Tabelle zur Vergleichung der nach vier verschiedenen Formeln berechneten Windmengen.

Formelnummer.	$x =$	1,00	1,01	1,02	1,05	1,10	1,15	1,20	1,25
1.	$y =$	0	0,1000	0,1414	0,2236	0,3162	0,3873	0,4472	0,5000
2.	$y =$	0	0,1005	0,1428	0,2291	0,3317	0,4153	0,4899	0,5590
3.	$y =$	0	0,0998	0,1407	0,2209	0,3087	0,3738	0,4270	0,4724
4.	$y =$	0	0,1000	0,1413	0,2233	0,3154	0,3858	0,4449	0,4968

Die Werthe von x drücken das Verhältniss der inneren zur äusseren Pressung aus, und die Werthe von y geben, mit 8,2 multiplicirt, die entsprechende Windmenge pro Secunde, bei dem Mündungsquerschnitt von 1 Quadratzoll an.

XXXIX. Ueber die Fortführung materieller Theilchen durch strömende Elektricität, von G. Quincke. (Pogg. Ann., Bd. 113, S. 513.)

Reuss in Moskau hat zuerst im Jahre 1807 die Fortführung von Flüssigkeiten durch den galvanischen Strom in dem Falle nachgewiesen, wo derselbe durch eine Flüssigkeit ging, die an einer Stelle durch eine poröse Scheidewand unterbrochen war. Die Erscheinungen dieser sogenannten *„elektrischen* Endosmose" sind später ausser von einigen französischen

und englischen Physikern besonders von Wiedemann studirt worden, welcher nach einer längeren Arbeit über den Gegenstand zu dem Schlusse kam, dass dem galvanischen Strome als solchem seine fortführende Wirkung zukäme. Dieser Schluss ist jedoch von mehreren Seiten, von Graham, v. Quintus-Icilius, Breda und Logemann angegriffen worden, wobei sich die letzteren darauf stützen, dass es ihnen nicht gelungen ist, ohne Diaphragma eine Ueberführung zu erhalten. In der neuesten Zeit endlich hat Matteucci die Erscheinung für gar keine elektrische, sondern für eine secundäre Erscheinung erklärt.

Quincke beschreibt nun in der Anfangs citirten Abhandlung Versuche, die sich mit diesem Gegenstand beschäftigen, sowie eine Reihe von Versuchen, die das Studium der Ueberführung materieller, in Flüssigkeiten suspendirter Theilchen zum Zweck haben, welche ebenfalls Reuss im Jahre 1807 zuerst beobachtet hat und über welche später Faraday, Heidenhain, Jürgensen Mittheilungen gemacht haben.

Die elektrischen Ströme, die Quincke anwendete, waren bei besser leitenden Flüssigkeiten starke hydroelektrische Ströme, oder Inductionsströme, bei welchen wegen Einschaltung einer Luftschicht nur der Oeffnungsstrom circulirte oder bei den mindest leitenden Flüssigkeiten Entladungsströme Leydner Flaschen.

Die Apparate, deren sich Quincke bediente, waren der Hauptsache nach U förmige Röhren, in welchen an zwei von einander entfernten Stellen Platindräthe eingeschmolzen waren, die bei den mit Flüssigkeiten gefüllten Röhren als Elektroden dienten. Es gelang Quincke, an diesen Apparaten, die nur ausnahmsweise zu speciellen Zwecken mit Diaphragmen versehen waren, zu zeigen, dass auch ohne Diaphragmen eine Fortführung materieller Theilchen durch den Strom erfolgt. Der Sinn, in welchem die materiellen Theilchen fortgeführt werden, hängt nicht nur von der Natur der Flüssigkeit, sondern auch von der Substanz der Wand der Röhre ab, in welcher sich die Flüssigkeit bewegt; in gleicher Weise influiren diese auf die Grösse der Fortführung. Destillirtes Wasser wurde in Quincke's Glasröhren im Sinne des positiveren Stromes übergeführt; waren die Glasröhren inwendig mit einer dünnen Schellackschicht überzogen, so war die Fortführung grösser; waren sie mit einer dünnen Silberschicht überkleidet, so war dieselbe kleiner.

Bei Anwendung starker Elektricitätsquellen beträgt das Steigen der Flüssigkeit im U förmigen Rohre immer nur einige Millimeter. Messende Beobachtungen sind bei diesen Erscheinungen immer nur schwer auszuführen, weil es schwer ist, den Röhren immer die gleiche Oberflächenbeschaffenheit zu geben und weil das Glas namentlich durch das destillirte Wasser angegriffen wurde; die Grösse der Fortführung nimmt aber sofort ab, sobald die Leitungsfähigkeit des Wassers durch Aufnahme von Salzen steigt. Demohngeachtet aber sprechen sich in den Beobachtungen

Quincke's, bei denen der Einfluss der Fehlerquellen auf ein Minimum reducirt ist, einige Zahlengesetze aus. So fand er z. B. bei der Anwendung des Entladungsstromes der Leydener Flasche die Steighöhe des destillirten Wassers der Elektricitätsmenge in der Flasche proportional, etc. etc.

Der Sinn, in welchem in Flüssigkeiten suspendirte Theilchen vom Strome fortgeführt werden, ist nur bei sehr starken Strömen ein bestimmter, er hängt auch mit von der Natur der Flüssigkeit und Röhrenwand ab. Im Wasser vertheilt werden folgende Körper im Sinne des negativen Stromes fortgeführt: Platin, Gold, Kupfer, Eisen, Graphit, Quarz, Feldspath, Braunstein, Asbest, Schmirgel, gebrannter Thon, Porzellanerde, Sauerstoff, Wasserstoff, Schwefel, Schellack, Seide, Baumwolle, Stärke, Lycopodium, Carmin, Papier, Federkiel, Elfenbein, Terpentinöl, Schwefelkohlenstoff, Kohlensäure, Elayl, atmosphärische Luft; in Terpentinöl bewegen sich jedoch im Sinne des positiven Stromes: Platin, Gold, Kupfer, Eisen, Quarz, Feldspath, Braunstein, gebrannter Thon, Alkohol, Sauerstoff, Wasserstoff, Schellack, Seide, Baumwolle, Stärke; Lycopodium, Carmin, Wasser, Kohlensäure, atmosphärische Luft.

Am Schlusse seiner Abhandlung giebt Quincke eine sehr sinnige Erklärung der erwähnten Erscheinungen, auf die wir hier nicht näher eingehen. Das Hauptmoment seiner Erklärung besteht in der Berücksichtigung des Einflusses, den die bei dem Contact von Röhrenwand, Flüssigkeit und suspendirten Körpern entwickelte Contactelektricität in Gegenwart des Stromes haben kann.

XL. Ueber Spectralbeobachtungen. Von Alb. Mousson. (Pogg. Ann., Bd. 112, S. 428). — In der gedachten Abhandlung findet man die mathematische Theorie, sowie die Beschreibung eines einfachen Instrumentes, bestimmt, Spectralversuche anzustellen. Das Spectroskop von Mousson besteht in der Hauptsache aus einer geschwärzten Röhre, einer genau gearbeiteten verstellbaren Ritze und aus einem kleinen sorgfältig gearbeiteten Glasprisma. Die Beobachtung der Spectren geschieht direct durch das Auge, wobei der Lichtverlust vermieden wird, den die Anwendung von Gläsern unvermeidlich nach sich zieht. Das eine Resultat der spectralanalytischen Untersuchungen von Kirchhoff und Bunsen, nämlich die Opacität der gelben Natronflamme für Licht ihrer eigenen Farbe, lässt sich auf eine sehr einfache Weise, ohne alle optische Instrumente, beobachten. Die Vorschrift zu dem Verfahren rührt von William Crookes und wird in Pogg. Ann., Bd. 112, S. 344 nach *Phil. Mag. Ser. IV, Vol. XXI, p.* 55 mitgetheilt. Man benutzt die Gasflamme eines gewöhnlichen Drathgitterluftbrenners, welcher ganz aufgedreht und dann eine Flamme von 1′ Höhe und 3″ Breite giebt. Davor stellt man eine angezündete Talgkerze. Beide Flammen werden dadurch gelb gefärbt, dass man in ihrer Nähe ein Stück Natrium *auf feuchtem* Fliesspapier verbrennen lässt. Betrachtet man nun die Flamme

der Talgkerze so, dass die Gasflamme den Hintergrund bildet, so sieht man, dass der äusserste Saum der Talgflamme letztere wie ein schwarzer Rahmen einfasst. Crookes erklärt dies dadurch, dass der äussere, für gewöhnlich durchsichtige Saum der Talgflamme die Natriumverbindung im dampfförmigen Zustande enthält und dass dieser Theil die Strahlen der eigenen Farbe viel stärker absorbirt, als der mittlere Theil, der die Natriumverbindung im starren Zustande enthält.

XLI. Das Cäsium. — Die Mittheilung unter der Ueberschrift: „Neues Metall" (S. 344) möge durch folgenden Bericht eine nähere Erläuterung erhalten (chemische Analyse durch Spectralbeobachtungen von G. Kirchhoff und R. Bunsen, Pogg. Ann., Bd. 113, S. 337). Entfernt man in der Mutterlauge des Dürkheimer Mineralwassers nach bekannten Methoden Kalk, Strontian, Magnesia und Lithion durch kohlensaures Ammoniak, so erhält man eine Mutterlauge, welche in einen Spectralapparat (s. S. 79 d. J.) gebracht, ausser den bekannten Linien des Kaliums, Natriums, Lithiums noch zwei einander sehr nahe liegende blaue Linien zeigt, von denen die eine fast mit der mit Sr_δ bezeichneten Strontianlinie zusammenfällt. Die Ursache dieser Erscheinung ist das Vorhandensein des bereits S. 220 d. J. erwähnten Metalls, dem die Entdecker den Namen Cäsium gegeben haben (*caesius*, bei den Alten vom Blau des heiteren Himmels gebraucht, auch von den Augen: graublau). Die Cäsiumverbindungen kommen immer nur in geringer Menge in der Natur vor, am reichlichsten sind sie noch im Dürkheimer Soolwasser enthalten, wovon jedoch 44,200 Kilogramm nur 7,272 Gramm Chlorcäsium lieferten.

Behandelt man sächsischen Lepidolith nach einer der bekannten Methoden, durch welche die Alkalien von den übrigen Bestandtheilen getrennt, für sich in Lösung erhalten werden, und fällt man eine solche Lösung durch Platinchlorid, so erhält man einen Niederschlag, der aus Doppelverbindungen von Chlorplatin und Chloralkalien besteht. Kocht man diesen Niederschlag wiederholt mit Wasser aus, so bleibt ein schwer löslicherer Theil zurück, der, spectralanalytisch geprüft, neue Linien zeigt, von denen sich zwei rothe auszeichnen, welche noch jenseits der Frauenhofer'schen Linie *A*, also im äussersten Roth des Sonnenspectrums liegen. Diese Erscheinung wird dadurch veranlasst, dass in dem Niederschlag die Chlorverbindung eines neuen Alkalimetalls enthalten ist, für welches die Verfasser den Namen Rubidium vorschlagen (*rubidus*, dunkelroth). Der Lepidolith von Rozena bei Hradisko in Mähren enthält nach der Angabe der Verfasser nur 0,24 Procent Rubidiumoxyd.

Die Darstellung der Präparate von Cäsium und Rubidium aus dem Dürkheimer Soolwasser und aus dem Lepidolith ist ungemein umständlich, man benutzt dabei die verschiedene Löslichkeit der Doppelverbindungen von Chlorplatin mit Chlorkalium, Chlorrubidium und Chlorcäsium, von

denen das erste Doppelsalz das löslichste, das zweite minder löslich und das dritte schwer löslich im Wasser ist, sowie auch das Verhalten des kohlensauren Cäsiumoxydes und des kohlensauren Rubidiumoxydes zu Alkohol, worin ersteres Salz löslich, letzteres unlöslich ist.

Geschmolzenes Chlorcäsium sowohl, als Chlorrubidium und auch Chlorkalium werden durch den elektrischen Strom so zersetzt, dass am negativen Pole das Metall erscheint, aber sofort verbrennt oder sich unter Bildung eines Subchlorides in der Flüssigkeit auflöst.

Bei Anwendung der Lösungen der Chloride können die Amalgame leicht erhalten werden, sobald der negative Pol mit Quecksilber umgeben wird. Mit Chlorkalium als Erregerflüssigkeit zusammengestellt, verhält sich Cäsiumamalgam positiv gegen Rubidium- und Kaliumamalgam, welches letztere von den drei Amalgamen die elektromagnetivste ist. Die Aequivalente der besprochenen Metalle sind: $Cs = 123{,}35$, $Rb = 85{,}36$.

Die schwefelsauren Salze beider Metalle liefern, mit Barytwasser erhitzt, in Lösung Cäsiumoxydhydrat und Rubidiumoxydhydrat (CsO, HO und RbO, HO), welche sich ebenso ätzend zeigen, als Kalihydrat, und wie dieses das Wasser beim Glühen festhalten.

Die kohlensauren Salze beider Metalle reagiren sehr stark alkalisch und sind im wasserfreien Zustande ungemein zerfliesslich. In einer Atmosphäre von Kohlensäure gehen die einfach kohlensauren Salze leicht in die dem Kalisalz ($KO, HO, 2CO_2$) analog zusammengesetzten doppelt kohlensauren Salze über.

Die salpetersauren Salze krystallisiren, wie der Kalisalpeter, ohne Krystallwasser, sie enthalten wie dieser Decrepitationswasser, schmelzen leicht und geben in höherer Temperatur Sauerstoff aus.

Die Chloride beider Metalle krystallisiren, wie Chlornatrium in wasserfreien Würfeln.

Die Verbindungen von Cäsium und Rubidium verhalten sich, wie man sieht, ähnlich wie die Kaliumverbindungen, denen sie auch isomorph sind. Die Reactionen der drei Alkalien sind übrigens so ähnlich, dass sie nur durch Spectralbeobachtungen von einander unterschieden werden können.

XLII. Ueber ein reproducirbares Stromwiderstandsmaass. — Das Weber'sche absolute Stromwiderstandsmaass eignet sich bekanntlich nicht zur allgemeinen Einführung, weil bei seiner Anwendung sehr vollkommene Instrumente, besonders geeignete Locale und grosse experimentelle Geschicklichkeit erfordert wird und weil es so klein ist, dass die Widerstände gewöhnlicher Art nur durch enorme Zahlen ausgedrückt werden können. Da nun die Copien des Jacobi'schen Widerstandsetalons keine Uebereinstimmung zeigten, wahrscheinlich indem eine kleine Abweichung in der Zusammensetzung eine grosse Abweichung im Widerstand hervorbringt*),

*) Siehe auch: Ueber die elektrische Leitungsfähigkeit des reinen Kupfers und deren Verminderung durch Metalloïde und Metalle, von A. Matthiessen und M. *Holzmann* (Pogg. Ann., Bd. 110, S. 222.)

so machte Siemens (Pogg. Ann., Bd. 110, S. 1) den Vorschlag, Widerstandsmaasse durch Füllung im Handel vorkommender Glasröhren mit gereinigtem Quecksilber herzustellen. Man sollte sich ein Stück Röhre aussuchen, bei welchem der Querschnitt regelmässig kegelförmig ist, die Dimensionen der Röhre bestimmen und hieraus den Widerstand berechnen, wobei als Einheit des Widerstandes der Widerstand eines Quecksilberprismas von 1^m Länge und $1\,\square^{mm}$ Querschnitt bei $0°$ C. angenommen werden sollte. Der Grund zu diesem Vorschlage war, dass nach den Versuchen von Siemens und Esselbach der Widerstand des reinen Quecksilbers weniger, als derjenige von anderen Metallen, von der Temperatur abhängig ist. Denn es ist z. B. die Leitungsfähigkeit:

des Quecksilbers $\frac{1}{1 + 0,00095\,t}$ (nach Siemens),

des Bleies $\frac{5,1554}{1 + 0,00376\,t}$ (nach Arendtsen),

des Eisens $\frac{8,3401}{1 + 0,00413\,t + 0,00000527\,t^2}$ (nach Arendtsen),

des geglühten Messings $\frac{14,249}{1 + 0,00166\,t - 8,00000203\,t^2}$ (nach Arendtsen).

Es lässt sich nicht verkennen, dass der Vorschlag von Siemens Manches für sich hat, z. B. dass jeder Physiker sich mit leichter Mühe sein Quecksilber selbst reinigen und sich aus den Glasröhren des Handels sein Widerstandsmaass herstellen kann. Gegen den Vorschlag von Siemens hat sich nun Matthiessen (Pogg. Ann., Bd. 112, S. 353) ausgesprochen, während Schröder van der Kolk in Maestricht, der sich ebenfalls mit Widerstandsbestimmungen beschäftigte, der Anwendung des Quecksilbers zu Widerstandsmessungen nicht abgeneigt ist (Pogg. Ann., Bd. 110, S. 452). Matthiessen macht gegen Siemens' Vorschlag den Einwand, dass das Quecksilber, in welches bei den Versuchen Kupferdräthe oder -Platten eintauchen, von diesen verunreinigt werden möchte, so dass der Widerstand des Quecksilbers eine merkliche Aenderung erleiden könnte. Die grosse Aenderung des Widerstandes anerkennend, welche bei den bekannten Metallen und Legirungen mit geringer Aenderung der Zusammensetzung eintritt, stellt sich Matthiessen die Aufgabe, eine Legirung aufzufinden:

1) deren Leitungsfähigkeit sich mit einer geringen Aenderung des Mischungsverhältnisses oder mit einer geringen Verunreinigung nur wenig ändert, so dass man sie auch aus käuflichen Metallen herstellen kann, ohne dass ihre Leitungsfähigkeit anders ausfällt, als bei der Herstellung aus reinen Metallen;
2) deren Leitungsfähigkeit durch das Weichmachen (starkes Erhitzen und allmäliges Abkühlen) nicht verändert wird;
3) deren Leitungsfähigkeit sich bei geringen Temperaturänderungen nur wenig ändert;
4) die sich durch Aussetzen an die Luft nicht ändert.

Die Legirung, die diesen Anforderungen noch am besten entspricht, ist, wie Matthiessen vorläufig aus den *Phil. Trans.* f. 1860 ersehen hat, eine Legirung von 2 Gewichtstheilen Gold und 1 Gewichtstheil Silber. Matthiessen prüfte nun 8 Dräthe von der genannten Legirung, die von verschiedenen Chemikern hergestellt worden waren, und fand, dass der grösste Unterschied in den Leitungsfähigkeiten nur um 1,6 Procent vom

Mittelwerthe abwich. In Bezug auf die Aenderung der Leitungsfähigkeit mit der Temperatur fand er, dass die Leitungsfähigkeiten der meisten Metalle durch die Formel $h = x + yt + zt^2$ ausgedrückt werde, wobei x die Leitungsfähigkeit bei 0° C. und y und z Constante sind, während Arndtsen und Siemens ein anderes Gesetz aufstellten. Nach den Versuchen von Matthiessen sind die Leitungsfähigkeiten von drei seiner Dräthe von verschiedenen Herstellungen:

$$h = 15{,}059 - 0{,}01077\,t + 0{,}00000722\,t^2,$$
$$h = 15{,}052 - 0{,}01074\,t + 0{,}00000714\,t^2,$$
$$h = 15{,}152 - 0{,}01098\,t + 0{,}00000774\,t^2,$$

wobei die Leitungsfähigkeit eines hart gezogenen Silberdrathes bei 0° C. gleich 100 gesetzt ist. Ein Urtheil über die Anwendbarkeit von Metallen zu Widerstandsmessungen gewinnt man noch aus einer von Matthiessen zusammengestellten Tabelle, worin die Differenzen der Leitungsfähigkeit zwischen 0° und 100° C. in Procenten der Leitungsfähigkeit von 0° C. angegeben sind und die hier mitgetheilt wird:

Silber 28,5 Proc. (weich),
Kupfer 29,0 Proc. (weich),
Gold 28,0 Proc. (weich),
Quecksilber 8,7 Proc. (nach Siemens),
die Gold- und Quecksilberlegirung { 6,5 Proc. (hart), 8,7 Proc. (weich).

Matthiessen macht nun, gestützt auf seine Versuche und Betrachtungen, den Vorschlag, die Leitungsfähigkeit eines Drathes seiner Gold- und Silberlegirung von 1^m Länge und 1^{mm} Dicke bei 0° C. 100 zu setzen und dieses Widerstandsmaass zur Vergleichung der Widerstände von Schliessungsbögen zu benutzen; hat dann ein Physiker einmal dieses Widerstandsmaass mit dem Weber'schen absoluten Maasse verglichen, so kann man alle nach Matthiessen's Maass gemessenen Widerstände in absolutem Maasse ausdrücken. Da man sich nun bei der Annahme von Matthiessen's Maass wahrscheinlich der weichen Legirung bedienen würde, indem die harte Legirung erst nach mehrmaligem Erwärmen bis 100° C. einen sich gleichbleibenden Widerstand zeigt, so würde die Gold-Silberlegirung nach obiger Tabelle in Bezug auf die Aenderung der Leitungsfähigkeit mit der Temperatur mit Quecksilber ganz gleichwerthig sein. Die Legirung von Matthiessen erfüllt nun die Anforderung 2 gar nicht, so dass das Quecksilber seines gleichmässigen Verhaltens wegen wohl den Vorzug verdient. Der Verunreinigung des Quecksilbers bei den Versuchen kann man durch Anwendung von Platindrath statt Kupferdrath vorbeugen. Uebrigens macht Siemens in einem neueren Aufsatze (Pogg. Ann., Bd. 113, S. 91) aufmerksam, dass die Differenz von 1,6 Procent in den Leitungsfähigkeiten der Gold-Silberlegirung viel zu gross für gute Widerstandsmessapparate ist, deren Resultate bis auf 0,0001 übereinstimmen, während seine Widerstandsröhren, mit besonders sorgfältig von Dr. Quincke gereinigtem Quecksilber gefüllt, genau dieselbe Leitungsfähigkeit zeigten, als die mit dem seinigen gefüllten, welches von ihm selbst nur mit Schwefelsäure und etwas Salpetersäure gereinigt worden war. Dr. Kahl.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Literaturzeitung

der

schrift für Mathematik und Physik

herausgegeben

unter der verantwortlichen Redaction

von

Dr. O. Schlömilch, Dr. E. Kahl

und

Dr. M. Cantor.



Sechster Jahrgang.

LEIPZIG,

Verlag von B. G. Teubner.

1861.

Inhalt.

Mechanik.

Physik.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Zenodorus, Abhandlung über die isoperimetrischen Figuren, deutsch bearbeitet von Dr. Nokk. Beilage zu dem Freiburger Lyceumsprogramme von 1860.

Es ist nicht das erste Mal, dass der gelehrte Herr Verfasser sich in Gegenständen versucht, welche für die Mathematiker noch mehr Interesse haben als für seine philologischen Fachgenossen. Schon 1854 gab er als Beilage des Freiburger Lyceumsprogrammes eine Uebersetzung der Schrift des Aristarch von Samos über die Grössen und Entfernungen der Sonne und des Mondes, und kündigte in derselben eine neue kritische Ausgabe jener bedeutenden Abhandlung an, welche indessen unseres Wissens bisher nicht erschienen ist. Diesmal bereicherte er die mathematische Literatur durch die erste deutsche Bearbeitung einer Schrift, welche freilich nicht vollständig als solche erhalten ist, sondern nur in Auszügen theils bei Theon von Alexandrien, dem Erklärer des Ptolemäus aus dem vierten Jahrhundert, theils bei Pappus gefunden wird. Herr Nokk ging indessen von dem gewiss richtigen Principe aus, dass Auszüge, welche bei fast gleichzeitigen Autoren, die also wohl Nichts von einander entnahmen, in fast gleichen Ausdrücken sich finden, dem Originale sehr nahe kommen müssen, und dass daher aus den gegebenen Quellen eine Restitution wohl thunlich sei. Das Resultat hat auch diese Voraussetzung vollständig gerechtfertigt, indem ein Studium der kleinen Schrift uns hinreichend überzeugt, so etwa müsse in der That die Abhandlung des Zenodorus gelautet haben.

Eine durch den geistreichen Inhalt der übertragenen Abhandlung nicht unwichtige historische Frage ist die nach dem Zeitalter des Zenodorus, welche der Herr Verfasser gleichfalls einer Untersuchung unterwirft. Wir können ihm nur beistimmen, wenn er aus der wörtlich identischen Erwähnung des Archimedes sowie des Euklides in einigen Lehrsätzen, welche bei Theon und Pappus zugleich vorkommen, den Schluss zieht, dass diese Worte auch im Originale sich fanden, und dass somit Zenodorus jedenfalls später als Archimedes, also später als 250 v. Chr., gelebt haben

müsse. Damit falle die Behauptung Heilbronner's, welche Montucla, Klügel, Bossut und Andere nachschrieben, als sei Zenodorus ein unmittelbarer Schüler des Oenopides gewesen, der um 550 v. Chr. lebte. Nur glauben wir nicht nöthig zu haben, bei diesem negativen Resultate stehen zu bleiben, sondern möchten den Zenodorus präciser als einen Zeitgenossen des Ptolemäus in den Anfang des zweiten Jahrhunderts n. Chr. versetzen. (Vgl. *Comptes rendus*, L. I, 630, 22. Oct. 1860.

Wir stützen diese Vermuthung auf dieselben Worte des Proclus Diadochus in seinem Commentare zum ersten Buche des Euklid, welche auch von früheren Historikern zur Bestimmung des Zeitalters benutzt wurden, und welche nach dem Citate des Herrn Nokk im Originale so heissen: *Οἱ δὲ περὶ Ξενόδοτον τὸν προςήκοντα μὲν τῇ Οἰνοπίδου διαδοχῇ τῶν μαθητῶν δὲ Ἄνδρωνος διορίζονται τὸ θεώρημα τοῦ προβλήματος κ. τ. λ.* (*Proclus Comment. in Euclid. p.* 23). Der griechische Text stand uns nur in diesem Citate zu Gebote, die lateinische Uebersetzung des Franciscus Barocius *Patavii* 1560, *p.* 47) lässt indessen auf eine andere Lesart schliessen, welche uns den Vorzug zu verdienen scheint. Dort heisst es nämlich: *Sectatores Zenodoti, qui Oenopidis quidem doctrinae fuit familiaris, Andronis vero discipulus, theorema a problemate distinguebant e. c. t.*, während die kurze Inhaltsanzeige welche am Rande abgedruckt ist, angibt: *Quo differat theorema a problemate juxta Zenodori opinionem.*

Das Erste, was in die Augen fällt, ist die dreifache Schreibart des Namens. Auch Herr Nokk bemerkt, dass Fabricius (*Bibl. Gr. tom. IV, p.* 84) den Mathematiker, dessen hier gedacht wird, nicht Ξενόδοτος, sondern Ζηνόδοτος nenne, fügt aber hinzu, dass keinenfalls von einem Ζηνόδωρος die Rede sei. Bei den dem Sinne nach identischen Namen Ζηνόδοτος und Ζηνόδωρος scheint aber ein solches strenges Auseinanderhalten kaum thunlich, vielmehr dürften wir es nur mit verschiedenen Orthographien desselben Namens zu thun haben, ähnlich wie auch Διόδωρος und Διόδοτος wechseln, ähnlich wie der berühmteste deutsche Mathematiker des sechzehnten Jahrhunderts bald Stifel, bald Stiefel, bald Stieffel geschrieben ward. Für diese Vermuthung ist auch gerade das Nebeneinanderstehen beider Namen bei Barocius wohl massgebend.

Eine wichtigere Aenderung ist noch, dass Barocius offenbar τὸν μαθητὸν übersetzt, welche Lesart auch dem Gegensatze μὲν — δὲ eher entspricht. Darnach hätte Zenodorus zwar der Schule des Oenopides angehört (wie heute noch ein Maler z. B. Nachfolger der venetianischen Schule genannt werden könnte, wenn er diese Meister vorzüglich studirt hätte), wäre aber zunächst ein Zögling des Andron gewesen, auf dessen Zeitbestimmung es somit allein ankäme. So merkwürdig es ist, dass bisher Niemand diesen Gesichtspunkt hervorhob, können wir doch nicht unterlassen, auf ihn aufmerksam zu machen, wenn auch nur in der Erwartung, eine *Discussion* desselben zu veranlassen. Was nun jenen Mathematiker Andron

ein
...rhundert ...solcher, von Catanea auf Sicilien gebürtig, zu Anfang
...hunderts und war unter Anderem auch eine Zeit lang Leh-
...ligen Kaisers *M. Antoninus Philosophus* (vergl. Zedler, Uni-
... II, S. 208). Von einem andern Mathematiker dieses Na-
...nirgends Erwähnung finden. Wäre dieser also der bei
...o müsste in der That Zenodorus jener Zeit angehört
...bigen als wahrscheinlich anführten. CANTOR.

...uclide retablis pour la première fois d'après
...le Pappus et conformément au sentiment
...ne des énoncés de ces propositions par
...lier. 1860.

...bekannt, dass die sogenannte Frage ...die mathematischen Historiker im ...n wohl hinzusetzen, entzweite. ...ersucht, eine gedrängte Darstellung ...uergehenden Ansichten zu geben, und als ...ntspunkt hervorgehoben, welcher — allgemeiner ... nicht bloss die euclidischen Porismen, sondern alle Sätze ...alte, welche diesen Namen verdienen. Referent verliess zu diesem Zwecke die geometrische Betrachtungsweise und sprach sich dahin ..., es sei das Wesentliche des Theorems, Eigenschaften einer gegebenen Function darzulegen; das Problem hingegen leite Werthe der Function bei gegebenem Argumente ab; endlich das Porisma, zwischen beiden stehend, lehre, aus den Eigenschaften einer Function auf die Art derselben schliessen. In einem Vortrage über diesen Gegenstand im Heidelberger naturhistorisch-medizinischen Vereine vom 21. November 1856 suchten wir dieses namentlich den ärztlichen Mitgliedern durch den Vergleich zu erläutern, das Theorem gebe den pathologischen Verlauf eines Krankheitsprozesses an, als Problem müsse die Therapie eines bestimmten Falles angesehen werden, ein Prisma sei die Diagnose, welche mit beiden früheren Betrachtungsweisen in mancher Beziehung übereinstimmend zwischen beiden in der Mitte stehe.

Unter einigen französischen Mathematikern, Herrn Breton (de Champ) und Vincent dauerte inzwischen die Discussion noch fort und wurde mit Leidenschaftlichkeit in dem *Journal de Mathématiques* und in der *Science* geführt, während sie sich, man weiss kaum um was? drehte. Endlich ist die Streitfrage durch das Erscheinen des uns vorliegenden Werkes abgeschlossen, indem die nachträglichen Bemerkungen des Herrn Breton in den *Comptes rendus* wohl nur die letzten unbedeutenden Wellen darstellen, welche nach jedem Sturme zurückbleiben. Herr Chasles hat die drei

Bücher Porismen des Euclid wieder hergestellt, wie er es schon seit 1835 versprochen hatte, und ist somit ohne allen Zweifel als erster vollständiger Löser der schwierigen Aufgabe anzuerkennen.

Wir wollen einen möglich kurz gefasste Uebersicht seiner Entzifferung geben und dazu von jener Definition der Porismen ausgehen, welche Pappus als die der Neueren bezeichnet. In unserer oben erwähnten Abhandlung (welche wir als dem Leser zur Vergleichung einzelner Stellen vorliegend voraussetzen) wurde sie folgendermassen übersetzt: Ein Porisma ist das, was zur Hypothese eines Ortstheorems fehlt. Es wird somit nöthig sein, zunächst das Ortstheorem selbst zu erklären, worüber freilich kein Zweifel möglich ist. Das Ortstheorem ist nämlich ein Satz, welcher eine Eigenschaft ausspricht, die allen Punkten einer vollständig bestimmten geraden oder krummen Linie zukommt; wie z. B. der Satz: „Werden auf dem Durchmesser AB eines Kreises zwei Punkte C, D so genommen, dass $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{BD}$, so verhalten sich die Entfernungen irgend eines Punktes m der Kreisperipherie von jenen Punkten beständig wie $CA : DA$.“

Die Hypothese besteht hier erstens darin, dass beide Punkte C, D auf einem Kreisdurchmesser liegen, und zweitens darin, dass $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{BD}$. Aus dem Ortstheoreme wird nun ein Porisma, wenn die Hypothese weniger genau wird, wenn z. B. die Lage des einen Punktes D nicht als bekannt vorausgesetzt wird. Es ist einleuchtend, dass auch die Folgerung alsdann nicht unverändert bleiben kann, dass also z. B. hier die Grösse des constanten Verhältnisses $\frac{CA}{DA}$ nicht angegeben werden kann, so lange wir D nicht kennen, und so wird das jenem Ortstheorem entsprechende Porisma folgendermassen lauten: „Ist ein Punkt C und ein Kreis gegeben, so lässt sich immer ein zweiter Punkt D und eine Verhältnisszahl λ finden, so dass die Entfernungen irgend eines Punktes m der Kreisperipherie von C und D sich wie $1 : \lambda$ verhalten.“

Es ist dabei Etwas zu finden, was gleichzeitig als Folge der Hypothese angekündigt wird, nämlich hier die Lage des Punktes D und die Grösse der Verhältnisszahl λ. Das ist aber nach der Definition, welche Pappus als die ältere nennt, gerade das Wesen des Porismas. Ἔφασαν πόρισμα εἶναι τὸ προτεινόμενον εἰς πορισμὸν αὐτοῦ τοῦ προτεινομένου wo wir πορισμόν früher allzugewissenhaft nur durch „Porismirung“ umschrieben, statt es durch „Auffindung“ zu übersetzen.

Mit dieser Auffassung stimmen auch jene Porismen überein, welche allein in vollständigem Wortlaute bei Pappus aufbewahrt sind, und welche Robert Simson zuerst der modernen Wissenschaft zugänglich machte und so der Vorgänger von Chasles, freilich in viel geringerem Masstabe *wurde, als* dieser Gelehrte in seiner ihn so rühmlich kennzeichnenden

escheidenheit zu verstehen gibt. Eines davon ist das folgende Porisma: Schneiden die 4 Linien eines vollständigen Vierseits sich in 6 Punkten, on denen 3 in einer Geraden liegenden gegeben sind, und sind von den 3 brigen Punkten 2 der Bedingung unterworfen, je auf einer gegebenen eraden zu bleiben, so wird auch der letzte Punkt eine Gerade zum geomeischen Orte haben, welche aus den gegebenen Dingen näher bestimmt erden kann."

Man sieht augenblicklich 1) dass es sich hier um einen geometrischen rt handelt; 2) dass in der Hypothese die Lage der von 2 Punkten beschrieenen Geraden nicht näher ausgedrückt ist, dass also an der Hypothese twas fehlt; 3) dass demgemäss auch in der Folgerung keine vollständige estimmtheit existirt; 4) dass aber die Folgerung zu einer bestimmten erässt werden kann, indem man die Lage der dritten Geraden von den egebenen Dingen abhängig macht, sie als eine darzustellende Function erselben betrachtet.

So ist es auch zu verstehen, wenn von dem Porisma behauptet wird, s sei eine Gattung von Sätzen, welche sich zwischen Lehrsätzen und Aufaben etwa in der Mitte halte, so dass der Ausdruck derselben in die Form on Lehrsätzen und von Aufgaben gebracht werden könne. Einen Lehratz haben wir allerdings vor uns, aber einen solchen, der n seinem Ausspruche selbst wieder eine Aufgabe einchliesst.

Wenn darnach bisher sämmtliche bei Pappus erhaltenen Erklärungen nd Bemerkungen gleichmässig Anwendung fanden, wenn ferner die sogeannten Neueren des Pappus nichts Weiteres hinzubrachten, sondern mit en euclidischen Porismen sich begnügend deren Definition nach einem ebenumstande verändert haben sollen, so kann darin nur der Sinn liegen, ass ursprünglich das Porisma noch allgemeinere Bedeutung hatte als in en angeführten Beispielen, dass es nur nothwendig ist, die Art des Nebenmstandes zu kennen, um die Verallgemeinerung selbst wieder herzustellen. iese Schlüsse, so einfach wie die Aufstellung des Eies des Columbus, hat hasles zuerst gezogen. Er hat den Nebenumstand darin erkannt, dass an nicht gerade ein Ortstheorem besitzen müsse, welches durch Veränderung der Hypothese den neuen Satz liefert, bei welchem noch etwas gefunen werden soll, sondern dass ganz allgemein

ein Porisma jeder unvollständige Satz ist, welcher Zusammenhänge zwischen nach bestimmten Gesetzen veränderlichen Dingen so ausspricht, dass eine nähere Erörterung und Auffindung sich noch daran knüpfen lässt.

Ein Beispiel eines solchen Porismas, welches nicht von einem Ortseoreme ausgeht, wäre es, wenn wir sagen: „Der Winkel, unter welchem us dem Mittelpunkte eines Kreises das zwischen zwei gegebenen Berührungslinien liegende Stück einer dritten Berührungslinie gesehen wird, ist

constant." Dabei bleibt nämlich noch als Aufgabe, die Grösse dieses constanten Winkels zu bestimmen.

Oder um ein Beispiel aus einem anderen Theile der Mathematik zu wählen, wenn wir sagen: „Jede reelle ganze algebraische Funktion irgend eines $n$ten Grades lässt sich in einfachste reelle Faktoren niedrigeren Grades zerfällen", so ist das ein Porisma, da wir daran noch die weitere Betrachtung zu knüpfen haben, von welchem Grade jene Faktoren sein werden.

Endlich ist auch, wir müssen heute, wie bereits vor 4 Jahren, wiederholen, die ärztliche Diagnose ein Porisma, indem sie den gegenwärtigen Zustand des Kranken erhärtend mit Berücksichtigung der von Individuum zu Individuum veränderlichen Natur zugleich das Problem der weiteren Entwickelung des Processes in sich schliesst.

Die Frage, wie es wohl gekommen sein mag, dass statt der allgemeinen Definition später die zweite speciellere substituirt wurde, lag zu nahe, als dass Chasles sich dieselbe nicht gestellt hätte. Und er beantwortet sie vollkommen genügend dahin, dass wahrscheinlich ein oder der andere Mathematiker eine Auswahl von Porismen, sei es als Lehrmaterial, sei es in ein Buch, vereinigt habe, dass dazu die Porismen gewählt wurden, welche die damalige höhere Mathematik bildeten, also für die Lehre von den geometrischen Oertern nützlich waren, und dass man in dieser Weise mit einer specielleren Definition auskam, welche bald die allgemeinere, eigentlich richtige, ganz verdrängte.

Von Porismen aus nichtgeometrischen Kapiteln konnte ohnedies bei der durchweg geometrischen Behandlungsweise der griechischen Mathematik, welche kaum bei der Zahlentheorie sich verleugnete, wie Referent schon mehrfach zu zeigen Gelegenheit nahm, nur wenig die Rede sein. Die einzigen Ausnahmen gehören in der That der zuletzt erwähnten Disciplin an und finden sich bei Diophant. Die Betrachtung derselben lässt unmittelbar das erkennen, was als Kriterium eines Porismas angegeben wurde: Es wird Etwas beweisen, was selbst als Ausgangspunkt einer von selbst sich daran knüpfenden Frage dient.

Darin liegt es auch, dass Proclus mit vollem Rechte sagen konnte: „Man nennt es ein Porisma, wenn Etwas zwar gesucht wird, aber um von der Erfindung Gebrauch zu machen und nicht von der Entstehung oder einfachen Anschauung".

Darin ferner liegt die Aehnlichkeit zwischen den bisher als Porismen bezeichneten Sätzen und den sogenannten Zusätzen, Corollarien. Auch sie knüpfen sich ohne Weiteres an das gerade Bewiesene an, ohne eine bloss verschiedene Ausspruchsweise desselben zu sein. Sie wurden desshalb auch unter dem gleichen Namen als Porismen bezeichnet.

Es erübrigt nur noch Weniges um die Ansichten von Chasles in Kürze mitgetheilt zu haben. Dahin gehört das Verhältniss der Porismen zu den Sätzen, welche als Data, besonders als die Data des Euclid be-

'nd, ein Verhältniss, welches der Verfasser schon in der Geschichte
etrie also seit 1834 angedeutet hatte, aber doch wohl in etwas zu
Weise, so dass es dem Referenten bisher unverständlich blieb,
der Abhandlung Bd. II dieser Zeitschrift auch nur mit einem
ungeführt werden konnte. Dieser Zusammenhang besteht
es in einer Identität der Form, während der Inhalt
unterscheidet, dass bei den Porismen die Bedingung
hen Grösse hinzutritt, welche bei den Daten fehlt.
n Letzteren der Satz: „Wenn zwei Grössen a, b in
stehen, so steht die Summe der beiden zu jeder
gebenem Verhältnisse."

sächlichen Ansichten, welche Chasles über Poris-
tes in der Einleitung seines Werkes auseinandersetzt.
neit der Auffassung, die Klarheit, mit welcher jede der frü-
dunkeln Stellen jetzt hervortritt, würden wohl an sich genügen, sei-
nen Definitionen zur Stütze zu dienen, so dass es ein zu diesem Zwecke vollständig überflüssiger Beweis ist, den er durch wirkliche Restitution der drei Bücher Porismen von seinem Standpunkte aus noch hinzufügte.

Das Verdienst dieses zweiten und eigentlichen Haupttheiles des Werkes ist ein in sich selbst hinlänglich begründetes. Es wäre eine eben so schwierige als undankbare Aufgabe, auch nur den hauptsächlichen Inhalt, der in der Chasles'schen Restitution enthaltenen Sätze in kurzer Skizze wiedergeben zu wollen. Dieser Reichthum an geometrischer Eleganz will vollständig und wiederholt genossen sein, wenn man alles Vergnügen und allen Nutzen aus dem Werke schöpfen will, die es gewähren kann. Wir dürfen daher füglich unsere Anzeige hier abbrechen und deren Schluss noch in die Worte zusammenfassen, dass wir es hier mit einem Meisterwerke zu thun haben, würdig des Verfassers des *Aperçu historique*, würdig zugleich des Verfassers der *Géométrie supérieure*. CANTOR.

Literaturzeitung.
... ist das folgende Porisma:
... n sich in 6 Punkten.
... d von den

Dr. Fr. Bartholomaei, Zehn Vorlesungen über Philosophie der Mathematik. Jena. Verlag von Friedrich LUDEN, 1860.

Was der Verfasser unter diesem Titel dem grösseren Publikum darbietet, sind wesentlich Gelegenheitsreden, welche er in der mathematischen Gesellschaft in Jena beim jedesmaligen Abschlusse eines Vereinssemesters, oder sonst bei Festlichkeiten zu halten hatte. Es ist gewiss nur zu loben, dass er als Stoff dieser der Zeit nach ziemlich weit auseinanderliegenden Vorträge solche Gegenstände wählte, welche ebensowohl als ein Ganzes betrachtet werden können, als sie jeder für sich der getrennten Behandlung fähig und auch für solche Zuhörer, die nicht strenge Fachmathematiker waren, zugänglich und sogar interessant waren. Das Gelegenheitliche lässt sich darum auch in der Anordnung des Stoffes kaum bemerken, welche in

consequenter Reihenfolge zuerst die Quellen der mathematischen Begrif von Herbart'schem Standpunkte aus untersucht, und dieselben in d Naturbetrachtung, in der Selbstbeobachtung, in der Metaphysik, in d Logik findet.

So trennen sich von selbst vier Hauptttheile ab: die philosophisch Begründung der Mathematik aus der Naturbetrachtung, aus der Selbstbeo achtung, die Mathematik des Seins und die Mathematik der Denkform. N der erste Theil wird weitläufiger behandelt, indem der Verfasser die Durc führung der späteren Kapitel sich noch vorzubehalten scheint. Referent i mit der Herleitung mathematischer Begriffe aus der Erfahrung, also aus d Naturbetrachtung, zu sehr einverstanden, als dass er den Entwickelung des Verfassers nicht mit Interesse gefolgt wäre. Trotzdem gestattet u der Zweck dieser Zeitschrift nicht, uns hier auf eine ausführlichere Darste lung einzulassen. Es ist keine Frage, dass der Gegenstand für den Phil sophen überaus wichtig ist. Wir möchten ihm namentlich die vielfache P lemik gegen Hegel zur prüfenden Würdigung empfehlen. Es ist nic minder sicher, dass der Mathematiker das vorliegende Werkchen mit ein gewissen Spannung verfolgen wird. Aber auf die mathematischen Lehrm thoden dürften dessen Resultate doch nur von geringerem Einflusse sei Das ist gerade das Eigenthümliche an unserer Wissenschaft, dass von d verschiedensten Principien aus dasselbe Ziel erreicht werden kann, we man nur consequent zu Werke geht.

Manches auch mathematisch Neue und Ansprechende wird übrige der Leser doch an den verschiedensten Stellen des Büchleins finden. Ref rent will dabei besonders auf die vier letzten Vorlesungen aufmerksam m chen, welche mit einigen der ersten Zahlen, besonders mit der Eins, Zwe Drei, Vier, Sieben und Zwölf sich beschäftigen und historisch interessant uns fast durchgehend neue Zusammenstellungen und Hypothesen bringe Unter den „Anmerkungen" folgt alsdann noch eine ausführliche Deutu der apocalyptischen Zahl 666, welche dem Scharfsinne des Verfassers al Ehre macht.

Es bleibt noch übrig der Form zu gedenken, in welcher die Vorlesung vor uns hintreten. In dieser dringt nicht sehr zum Vortheile des Werkche das Gelegenheitliche zu stark durch. Wir glauben, dem Verfasser den Ra geben zu müssen, bei Veröffentlichung der Fortsetzung seiner Forschung jene Schlusssätze, welche den Gang der Betrachtungen nur jedesmal unte brechen, lieber wegzulassen. Gesprochen mögen jene Abschweifungen a Ende des eigentlichen Vortrags von erheiternder Wirkung und vielleic auch am Orte sein. Gedruckt machen sie sicherlich keinen angenehm Eindruck auf Jeden, den nicht persönliche Erinnerung zum dankbaren L ser macht. Sie stören vielmehr nur die Gesammtwirkung, welche der erns Theil der Vorträge hervorzubringen entschieden geeignet ist. CANTOR.

Darstellung der reellen Wurzeln algebraischer Gleichungen durch Determinanten der Coefficienten. Von Ed. Fuerstenau, Gymnasiallehrer zu Marburg. Marburg, Elwert'sche Universitätsbuchhandlung. 1860.

In der vorliegenden Abhandlung (35 S.) giebt der Verfasser eine neue Methode der Auflösung von solchen algebraischen Gleichungen, deren Wurzeln sämmtlich reell sind. Diese Methode ist in mehrern Beziehungen merkwürdig und verdient die Aufmerksamkeit der Algebristen, weshalb eine kurze Beschreibung derselben den Lesern dieser Zeitschrift nicht unwillkommen sein dürfte.

1. Es sei $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ..$ eine ganze algebraische Function von x vom $n$ten Grade. Das System der Gleichungen

$$f(x) = 0,\ xf(x) = 0,\ x^2 f(x) = 0, \ldots,\ x^{p-1} f(x) = 0$$

ist in Bezug auf die Grössen $x,\ x^2,\ x^3 \ldots,\ x^{n+p-1}$ linear. Man kann also $p-1$ dieser Grössen, welche auf einander folgen, z. B.

$$x^{k+1},\ x^{k+2} \ldots,\ x^{k+p-1}$$

aus dem System

$$\begin{array}{llllll} 0 = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n, & & & \\ 0 = \qquad a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{n-1} x^n + a_n x^{n+1}, & & & \\ 0 = \qquad\qquad a_0 x^2 + \ldots + a_{n-2} x^n + a_{n-1} x^{n+1} + a_n x^{n+2} & & & \\ \ldots & & & \end{array}$$

eliminiren. Zu diesem Zwecke wird die Determinante $p$ten Grades des Systems

$$\begin{array}{lllll} a_k, & a_{k+1}, & a_{k+2} & \cdot & \cdot \\ a_{k-1}, & a_k, & a_{k+1} & \cdot & \cdot \\ a_{k-2}, & a_{k-1}, & a_k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

gebildet, natürlich unter der Voraussetzung, dass das Element a_r verschwindet, wenn r ausserhalb der Grenzen 0 und n fällt. Dann multiplicirt man die obigen Gleichungen der Reihe nach mit den Coefficienten, welche in der Determinante zu den Elementen der ersten Colonne gehören, und die durch $\alpha_{1,1},\ \alpha_{2,1},\ \ldots,\ \alpha_{p,1}$ bezeichnet werden, und findet durch Addition

I) $$0 = \varphi_k(x) + b_1 x^{k+p} + b_2 x^{k+p+1} + \ldots + b_{n-k} x^{n+p-1}.$$

Hierin ist $\varphi_k(x)$ eine ganze rationale Function von x vom $k$ten Grade, nämlich

$$\begin{aligned} \varphi_k(x) = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k)\, &\alpha_{1,1} \\ + (a_0 x + a_1 x^2 + \ldots + a_{k-1} x^k)\, &\alpha_{2,1} \\ + (a_0 x^2 + \ldots + a_{k-2} x^k)\, &\alpha_{3,1} \\ + \ldots \qquad \ldots & \\ + a_0 x^k \quad &\alpha_{k+1,1}. \end{aligned}$$

Die Function $\varphi_k(x)$ entsteht aus der obigen Determinante $p$ten Grades, indem an die Stelle der Elemente $a_k,\ a_{k-1}, \ldots$ in der ersten Colonne die Elemente

$$a_0 + \ldots + a_k x^k,\quad a_0 x + \ldots + a_{k-1} x^k,\quad a_0 x^2 + \ldots + a_{k-2} x^k, \ldots$$

gesetzt werden. Also hat man

$$\text{II)}\qquad \varphi_k(x) = \begin{vmatrix} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_k x^k, & a_{k+1}, & a_{k+2} & \dots \\ a_0 x + a_1 x^2 + \dots + a_{k-1} x^k, & a_k, & a_{k+1} & \dots \\ a_0 x^2 + \dots + a_{k-2} x^k, & a_{k-1}, & a_k & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_0, & a_{k+1}, & a_{k+2} & \dots \\ 0, & a_k, & a_{k+1} & \dots \\ 0, & a_{k-1}, & a_k & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1, & a_{k+1}, & a_{k+2} & \dots \\ a_0, & a_k, & a_{k+1} & \dots \\ 0, & a_{k-1}, & a_k & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} x + \dots + \begin{vmatrix} a_k, & a_{k+1}, & a_{k+2} & \dots \\ a_{k-1}, & a_k, & a_{k+1} & \dots \\ a_{k-2}, & a_{k-1}, & a_k & \dots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} x^k.$$

2. Versteht man unter $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_{n-k}$ Wurzeln der Gleichung $f(x) = 0$, so hat man nach (I) das System

$$\begin{aligned} 0 &= \varphi_k(x) + b_1 x^{k+p} + b_2 x^{k+p+1} + \dots + b_{n-k} x^{n+p-1}, \\ 0 &= \varphi_k(x_{k+1}) + b_1 x_{k+1}^{k+p} + b_2 x_{k+1}^{k+p+1} + \dots + b_{n-k} x_{k+1}^{n+p-1}, \\ &\cdot\quad\cdot\quad\cdot \\ 0 &= \varphi_k(x_n) + b_1 x_n^{k+p} + b_2 x_n^{k+p+1} + \dots + b_{n-k} x_n^{n+p-1} \end{aligned}$$

von $n - k + 1$ Gleichungen, welche in Bezug auf die Grössen $b_1, b_2, \dots b_{n-k}$ linear sind. Die Resultante dieses linearen Systems ist

$$0 = \begin{vmatrix} \varphi_k(x), & x^{k+p}, & x^{k+p+1}, & \dots & x^{n+p-1} \\ \varphi_k(x_{k+1}), & x_{k+1}^{k+p}, & x_{k+1}^{k+p+1}, & \dots & x_{k+1}^{n+p-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varphi_k(x_n), & x_n^{k+p}, & x_n^{k+p+1}, & \dots & x_n^{n+p-1} \end{vmatrix},$$

oder nach Division der Zeilen

$$0 = \begin{vmatrix} \dfrac{\varphi_k(x)}{x^{k+p}}, & 1, & x, & \dots & x^{n-k-1} \\ \dfrac{\varphi_k(x_{k+1})}{x_{k+1}^{k+p}}, & 1, & x_{k+1}, & \dots & x_{k+1}^{n-k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \dfrac{\varphi_k(x_n)}{x_n^{k+p}}, & 1, & x_n, & \dots & x_n^{n-k-1} \end{vmatrix}$$

oder nach Multiplication der ersten Colonne

$$\text{III)}\quad 0 = \begin{vmatrix} \varphi_k(x), & 1, & x, & \dots & x^{n-k-1} \\ \left(\dfrac{x}{x_{k+1}}\right)^{k+p} \varphi_k(x_{k+1}), & 1, & x_{k+1}, & \dots & x_{k+1}^{n-k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \left(\dfrac{x}{x_n}\right)^{k+p} \varphi_k(x_n), & 1, & x_n, & \dots & x_n^{n-k-1} \end{vmatrix}$$

$$= c_k \varphi_k(x) + c_{k+1} \left(\frac{x}{x_{k+1}}\right)^{k+p} \varphi_k(x_{k+1}) + \dots + c_n \left(\frac{x}{x_n}\right)^{k+p} \varphi_k(x_n),$$

worin die partiellen Determinanten $c_k, c_{k+1}, \dots c_n$ von p unabhängig sind.

3. Diese Gleichung reducirt sich auf $\varphi_k(x) = 0$, wenn p ins Unendliche wächst, unter der Voraussetzung, dass die Gleichung $f(x) = 0$ lauter *reelle* Wurzeln hat, und dass unter diesen Wurzeln $x_{n+1}, \dots, x_n$ die absolut

grössten sind. Die übrigen Wurzeln $x_1, x_2, .., x_k$ der Gleichung $f(x) = o$ sind die Wurzeln der Gleichung $\varphi_k(x) = 0$.

Insbesondere giebt $\varphi_1(x) = 0$ die absolut kleinste Wurzel x_1 der Gleichung $f(x) = 0$, $\varphi_2(x) = 0$ die 2 absolut kleinsten Wurzeln x_1, x_2 derselben Gleichung, $\varphi_3(x) = 0$ die 3 absolut kleinsten Wurzeln x_1, x_2, x_3 derselben Gleichung, u. s. f. Also hat man

$$\text{IV)} \qquad -x_1 = \begin{vmatrix} a_0, a_2, a_3 \,.\,. \\ 0,\ a_1, a_2 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_1, a_2, a_3 \,.\,. \\ a_0, a_1, a_2 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} = a_0 \lim \left(\frac{R_{1,p-1}}{R_{1,p}}\right),$$

$$x_1, x_2 = \begin{vmatrix} a_0, a_3, a_4 \,.\,. \\ 0,\ a_2, a_3 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_2, a_3, a_4 \,.\,. \\ a_1, a_2, a_3 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} = a_0 \lim \left(\frac{R_{2,p-1}}{R_{2,p}}\right),$$

$$-x_1, x_2, x_3 = \begin{vmatrix} a_0, a_4, a_5 \,.\,. \\ 0,\ a_3, a_4 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_3, a_4, a_5 \,.\,. \\ a_2, a_3, a_4 \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} = a_0 \lim \left(\frac{R_{3,p-1}}{R_{3,p}}\right)$$

überhaupt

$$(-1)^k x_1, x_2, .. x_k = \begin{vmatrix} a_0, a_{k+1}, a_{k+2} \,.\,. \\ 0,\ a_k,\ a_{k+1} \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} a_k,\ a_{k+1}, a_{k+2} \,.\,. \\ a_{k-1}, a_k,\ a_{k+1} \,.\,. \\ .\ \ .\ \ .\ .\ . \end{vmatrix} = a_0 \lim \left(\frac{R_{k,p-1}}{R_{k,p}}\right)$$

zur Berechnung der Wurzeln $x_1, x_2, \ldots$

Diess sind die bedeutsamen Resultate, zu welchen Herr Fürstenau, wenn auch nicht auf dem hier angezeigten etwas directeren Wege, gelangt ist. Herr Fürstenau hat die Fälle absolut gleicher Wurzeln nicht unbeachtet gelassen, er hat die successive Berechnung von $R_{k,1}, R_{k,2}, R_{k,3}, \ldots$ angegeben, und nach seiner Methode die Wurzeln einer numerischen Gleichung 4ten Grades wirklich ausgerechnet. Die mitgetheilten Zahlen geben zu erkennen, was Herrn Fürstenau entgangen zu sein scheint, dass je zwei aufeinander folgende unter den Werthen

$$\frac{R_{k,p-1}}{R_{k,p}}, \quad \frac{R_{k,p}}{R_{k,p+1}}, \quad \frac{R_{k,p+1}}{R_{k,p+2}}, \ldots$$

den gesuchten Grenzwerth einschliessen. Durch den Beweis dieser wichtigen Eigenschaft wird Herr Fürstenau seine Methode auch in practischer Hinsicht gegen etwaige Unterschätzung sicherstellen. Die bedeutendste Ergänzung des durch die neue Methode Geleisteten würde aber in einer glücklichen Discussion der Gleichung (III) für den Fall complexer Wurzeln bestehn.

Zum Schluss kann ich nicht unerwähnt lassen, dass in Herrn Fürstenau's Arbeit zum erstenmale, wenn ich nicht irre, Determinanten von unendlichem Grade in Anwendung gekommen sind. Dr. R. Baltzer.

Lehrbuch der Elektricität. Von I. GAVARRET, Professor an der medicinischen Facultät zu Paris, deutsch bearbeitet von Dr. RUDOLF ARENDT, Leipzig, F. A. Brockhaus 1859 2 Theile = 4 Lieferungen à 1 Thaler.

Das genannte Werk ist eine Uebersetzung, die der Herr Uebersetzer mit eigenen den Text unmittelbar einverleibten Anmerkungen versehen hat, sodass das im Ganzen 986 Seiten zählende Werk ohne die Anmerkungen ungefähr 65 Seiten weniger einnehmen würde; desgleichen hat der Herr Uebersetzer es mit für deutsche Verhältnisse passenden Citaten versehen. Der behandelte Stoff umfasst das Gebiet der Reibungselektricität, des Magnetismus und der elektrischen Ströme und ist von den Herrn Verfasser in die 4 Abtheilungen gebracht werden, die auch der Uebersetzer beibehalten hat: 1) statische Elektricität, 2) Magnetismus, 3) dynamische Elektricität, 4) atmosphärische Elektricität. Hinsichtlich der weiteren Eintheilung müssen wir, um nicht zu lang zu werden, auf das Werk selbst verweisen, können aber versichern, dass es eine gute didactische Eintheilung ist; was die Reichhaltigkeit des behandelten Materiales anbelangt, so lässt das Werk nichts zu wünschen übrig, indem überall das Historische genügend berücksichtigt ist und z. B. der Herr Uebersetzer auch den neuesten Forschungen gedacht hat. Was die Behandlung des reichlich dargebotenen Stoffes anbetrifft, so ist durchgängig der Weg der Herleitung des Gesetzes aus dem Experiment gewählt, die Versuche sind durch nette in den Text eingedruckte Holzschnitte (im ganzen Werke 456) erläutert, von Mathematik ist daher wenig Gebrauch gemacht, so dass man beim Lesen des Werkes mit den Elementen dieser Wissenschaft auskommt. Die Ausstattung des Buches ist vorzüglich, Druck Papier und Holzschnitte lassen nichts wünschen übrig. Sollen wir einen Tadel aussprechen, so betrifft er die Eintheilung der Elektrisirmaschinen in solche, die nur eine Art von Elektricität liefern können (Scheibenmaschinen) und in solche, die gleichzeitig beide Arten der Elektricität liefern können (Cylindermaschinen). Wir zweifeln nicht, dass diese Eintheilung nur davon herrührt, dass man in Frankreich das Reibzeug der Scheibenmaschinen nicht zu isoliren pflegt, endlich hätte wohl mehr auf die Theorie der Elektrisirmaschinen und des Elektrophors eingegangen werden können, von erstern die Minderentwickelung der negativen Elektricität, von letztern die Ursache der Tenacität erklärt werden können. Ungeachtet dieser Ausstellungen, die nur Einzelnes betreffen, ist das Buch im Ganzen ein sehr gutes Buch und wir können dasselbe allen denen empfehlen, die sich ohne Aufwand bedeutender mathematischer Kenntnisse gründlich mit den Erscheinungen der Elektricität und des Magtismus bekannt machen wollen. Dr. KAHL.

Bibliographie.

Vom 1. October bis 1. December 1860.

Periodische Schriften.

Berichte über die Verhandlungen der K. S. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Jahrg. 1860, I u. II. Leipzig, Hirzel. $^2/_3$ Thlr.

Abhandlungen der K. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1859. Mathemat. Abhandlungen 2 Thlr. Physikal. Abhandlungen 3 Thlr.

Sitzungsberichte der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften zu München. 1860; 1—3 Heft. München, Franz. à 16 Ngr.

Abhandlungen der K. Bayr. Akademie der Wissenschaften zu München. 8. Bd. 3. Abth. Ebendas. 2 Thlr.

Fortschritte der Physik im J. 1858. Dargestellt v. d. physikalischen Gesellsch. zu Berlin. 14. Jahrg. redig. v. O. Hagen. 2. Abth. Berlin, Reimer. 2 Thlr.

Kupffer, A. T. *Annales de l'observatoire physique centrale de Russie. Année* 1857. Leipzig, Voss. 7 Thlr.

Kupffer, A. T. *Correspondance météorologique. Année* 1858. Leipzig, Voss. 5 Thlr.

Reine Mathematik.

Bartholomaei, F. **Philosophie der Mathematik.** 1. Abth. enth. zehn Vorlesungen. Jena, Luden. 1 Thlr.

Merian, P. **Die Mathematiker Bernoulli.** Basel, Schweighäuser in Comm. 18 Ngr.

Stern, M. A. **Lehrbuch der algebraischen Analysis.** Leipzig, C. F. Winter. 2 Thlr.

Scheibner, W. **Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz.** Gratulationsschrift. Leipzig, Hirzel. 24 Ngr.

Zehfuss, G. **Die Grundzüge der Algebra.** Oppenheim a. Rh., Kern. 22 Ngr.

Doerk, H. G. **Lehrbuch der Mathematik.** I. Bd., 1. Thl. Arithmetik u. Algebra. 2. Aufl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 18 Ngr.

Grossmann, H. **Lehrbuch der Mathematik.** 1. Theil, Arithmetik. Berlin, Enslin. $^2/_3$ Thlr.

Mayer, G. **Leitfaden zum Unterrichte in der Elementarmatik.** 4 Aufl. München, Lindauer. 27 Ngr.

Schulenburg, A. v. **Die Auflösung der Gleichungen fünften Grades.** Halle, Schmidt. 12 Ngr.

BORCHARDT, C. W. Ueber eine Interpolationsformel für eine Art symmetrischer Functionen. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 8 Ngr.

FRANKE, T. Die Elemente der ebenen Geometrie. 3. Aufl. Hannover, Helwing. $^3/_4$ Thlr.

WITTSTEIN, TH. Das Prismatoid. Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie. Hannover, Hahn. $^1/_3$ Thlr.

GALLENKAMP, W. Die Elemente der Mathematik. 2. Aufl. 3. Theil. Iserlohn, Bädeker. $^2/_3$ Thlr.

STAUDT, K. v. Beiträge zur Geometrie der Lage. 3. Heft. Nürnberg, Bauer & Raspe. 27 Ngr.

SALMON, G. Analytische Geometrie der Kegelschnitte mit besonderer Berücksichtigung neuerer Methoden. Unter Mitwirkung des Verf. deutsch bearb. von W. FIEDLER. Leipzig, Teubner. 4 Thlr.

JOUBERT. *Sur ta théorie des fonctions elliptiques et son application à la théorie des nombres. Paris.* 20 Ngr.

Angewandte Mathematik.

LEROY, C. F. A. Die Stereometrie, enth. die Anwendungen der darstellenden Geometrie auf Schattenlehre, Linearperspective etc. Aus dem Fanzös. von E. KAUFFMANN. 2. Ausg. 1. Lief. Stuttgart, Becher. $^3/_4$ Thlr.

RÜHLMANN, M. Grundzüge der Mechanik im Allgemeinen und der Geostatik im Besonderen. 3. Aufl. Leipzig, Arnoldische Buchh. 2 Thlr.

PREDIGER, C. Ueber die Genauigkeit barametrischer Höhenmessungen. Clausthal, Grosse. 12 Ngr.

SCHENK, J. Anleitung zur Berechnung der Sonnen- und Mondfinsternisse, sowie aller von der Parallaxe abhängigen Rechnungen. Olmütz, Neugebauer. 1 Thlr.

DE SAINT-ROBERT. *Études sur la trajectoire que dècrivent les projectiles oblongs. Puris.* $1^1/_3$ Thlr.

DUBOIS, E. B. *Cours de navigation et d'hydrographie. Paris.* $3^1/_3$ Thlr.

BULARD. *Notice suv l'éclipse totale du soleil du* 18. *juillet* 1860. *Paris.* $12^1/_2$ Ngr.

Physik.

MOUSSON, A. Die Physik auf Grundlage der Erfahrung. 2. Abtheilung: Physik des Aethers. Zürich, Schulthess. 28 Ngr.

HOH, TH. Elemente der physikalischen Mechanik für Gymnasien. Leipzig, O. Wigand. 24 Ngr.

Bothe, F. Physikalisches Repertorium, oder die wichtigsten Sätze der elementaren Physik. Braunschweig, Vieweg. $^1/_2$ Thlr.

Koppe, K. Anfangsgründe der Physik. 7. Aufl. Essen, Bädeker. $1^1/_6$ Thlr.

Brettner, H. A. Leitfaden für den Unterricht in der Physik. 15. Aufl. Breslau, Max & Comp. $^5/_6$ Thlr.

Mann, F. Naturlehre in einer Reihe physikalischer Individuen. 3. Heft. Frauenfeld, Huber. 8 Ngr.

Quintus Icilius, G. v. Experimental-Physik. Ein Leitfaden bei Vorträgen. 2. Aufl. Hannover, Schmorl & v. Seefeld. 3 Thlr.

Subic, S. Lehrbuch der Physik für Obergymnasien und Oberrealschulen. Pesth, Heckenast. 2 Thlr.

Bezold, W. v. Zur Theorie des Condensators. Inaug.-Dissert. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht in Comm. $^1/_3$ Thlr.

Natani, L. Materie, Aether und lebendige Kraft. Physikalische Betrachtungen. Berlin, Bosselmann. $^1/_3$ Thlr.

Kupffer, A. T. *Recherches experimentales sur l'élasticité des métaux faites à l'observatoire physique central de Russie.* Leipzig, Voss. 5 Thlr.

Du Moncel. *Études des lois des courants électriques au point de vue des applications électriques. Paris, Hachette.* 4 Frcs.

Berichtigung.

Zufolge eines Versehens habe ich in meiner Besprechung der Elemente der Mathematik von Dr. Baltzer (Jahrg. 1860, 4. Heft) die Reihenentwickelungen für *ly* und *Arctan x* als fehlend bezeichnet; dies ist dahin zu berichtigen, dass nicht die Reihen für *ly* und *Arctan x*, sondern vielmehr die Reihen für *tan x*, *sec x*, *sec x*, *csc x* und *Arcsin x* fehlen. Die Folgerung, dass des Verf. Werk für eine algebraische Analysis zu wenig und für „Elemente der Mathematik" zu viel enthält, bleibt dabei ungestört.

Schlömilch.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Leçons sur les coordonnés curvilignes et leurs diverses applications. Par G. Lamé. (Paris, Mallet-Bachelier, 1859.)

Das vorstehend genannte Werk scheint zwar schon durch den Namen seines Verfassers die Gewähr in sich zu tragen, dass es allgemein beachtet wird; dennoch hat diese Anzeige wesentlich den Zweck, auf die Bedeutsamkeit seines Inhalts in weiteren Kreisen aufmerksam zu machen; vielleicht, dass diess bei den Hindernissen, die der Verbreitung fremdländischer gelehrter Werke noch immer entgegenstehen, doch nicht ganz überflüssig ist.

Man weiss es, dass der gelehrte Autor mehr als Andere zur Bearbeitung des bezeichneten Gegenstandes berufen war, und man wird es ihm Dank wissen, dass er sich der Mühe derselben unterzogen hat. Knüpft sich doch der Begriff der krummlinigen Coordinaten durch das ausgezeichnetste Beispiel von der Anwendung derselben, durch die elliptischen Coordinaten, vor Allem an seinen Namen.

Das System der elliptischen Coordinaten in der Ebene bezieht bekanntlich jeden Punkt der Ebene auf zwei feste Punkte derselben, indem es ihn als den Durchschnittspunkt einer Ellipse und einer Hyperbel betrachtet, welche beide jene Punkte zu ihren Brennpunkten haben. Die Halbaxen beider Curven dienen als Coordinaten des Punktes. Je zwei zusammengehörige Curven des Systems sind in ihrem Schnittpunkte rechtwinklich auf einander. Herr Kummer hat im XXXV. Bande von Crelle's Journal bewiesen, dass confocale algebraische Curven sich ganz allgemein orthogonal durchschneiden, wenn man die Plücker'sche Brennpunktsdefinition voraussetzt. Man hat damit ein System rechtwinkliger Coordinaten, in welchem die zu den Axen parallelen Coordinaten des Cartesischen Systems durch Curven 2. Grades und die in den Axen gebildeten Abschnitte durch die Halbaxen derselben als durch ihre Parameter ersetzt werden.

Man weiss auch, dass das System der elliptischen Coordinaten seine allgemeine Gestalt und seine grössere Bedeutsamkeit erst im Raume empfängt. Drei confocale Familien von Oberflächen zweiten Grades existiren, durch jeden Punkt des Raumes geht eine Fläche von jeder Familie und diese drei Flächen sind in ihm zu einander orthogonal, d. h. die Tangentialebene einer jeden enthält die Normalen der beiden andern. Die drei Oberflächenfamilien sind dreiaxige Ellipsoide, einfache und doppelte Hyperboloide.

Ein einfacher specieller Fall dieses Systems ist das der geographischen Ortsbestimmung analoge System auf der Kugeloberfläche; die Kugelfläche vertritt das dreiaxige Ellipsoid, die Meridianebene das einfache und der Breitenkegel das doppelte Hyperboloid; auch hier sind in jedem Punkte des Raumes die drei Coordinaten-Flächen orthogonal.

Die nähere geometrische Definition des allgemeinen ellipsoidischen Systems ist im Folgenden enthalten: Auf drei rechtwinkligen Axen Ox, Oy, Oz werden die Längen $OF = OF' = l$, $Of = Of' = kl$, $O\mathfrak{f} = O\mathfrak{f}' = k'l$ respective aufgetragen und die sechs Punkte F, F', f, f', $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$ als die Brennpunkte des Systems bezeichnet. Dabei gilt die doppelte Relation $k^2 = 1 - k'^2 < 1$. In Folge dessen können F, F' als die Scheitel und f, f' als die Brennpunkte einer Ellipse dienen, deren kleine Axe alsdann durch $\mathfrak{f}\mathfrak{f}'$ bezeichnet wird. M. Lamé nennt sie die Focal-Ellipse. Desgleichen sind f, f' die Scheitel und F, F' die Brennpunkte einer Hyperbel, welche der xz Ebene angehört und deren imaginäre Halbaxe gleichfalls durch $O\mathfrak{f} = O\mathfrak{f}'$ ausgedrückt wird. M. Lamé nennt sie die *Hyperbole ombilicale*, die Hyperbel der Nabel- oder Kreispunkte; denn sie bezeichnet allerdings auf sämmtlichen Ellipsoiden die vier Kreispunkte, welche jedes derselben besitzt.

Von jeder der drei Oberflächen-Familien ist die erste Fläche ebenso wie die letzte eben. Die Familie der zweifachen Hyperboloide beginnt mit der Ebene der yz, und diese gehört in ihrer ganzen Ausdehnung zu ihr. Sie durchläuft mit immer wachsendem Parameter alle dieser Flächenfamilie möglichen Formen, um in der Ebene der zx zu endigen; jene Ebene yz verdoppelt sich im Bewegungssinne der x Axe und beide Mäntel krümmen sich in entgegengesetztem Sinne, beide schneller in der Richtung der y, als in der der z; beide durchlaufen den ganzen Raum und endigen mit der zweifachen hyperbolischen Platte in der Ebene der zx, deren Grenze die Hyperbel der Kreispunkte bildet.

Mit der einfachen hyperbolischen Platte, welche den Rest der zx Ebene bildet, beginnt die Familie der einfachen Hyperboloide. Die Platte trennt sich im Sinne der y, um ein Hyperboloid mit einem Mantel zu bilden, welches sich mehr und mehr öffnet und krümmt. Die Scheitel seiner Kehlellipse rücken von f, f' gegen F, F' und von O gegen $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{f}'$; in dem Augenblicke, wo sie die Grenzlage erreicht haben, so dass die Kehlellipse sich mit der Focal-Ellipse deckt, ist der bewegliche Mantel, nachdem er den

ganzen Raum durchlaufen hat, am Ende seiner Formenwandelung angekommen. Der Asymptotenkegel, nachdem er aus der Ebene der yz hervorgegangen sich immer weiter geöffnet hat, verwandelt sich nun durch Deckung seiner beiden entgegengesetzten Mäntel zur Ebene der xy, und das einfache Hyperboloid bedeckt, ebenfalls durch Zusammenfallen seiner entsprechend entgegengesetzten, durch die Kehl-Ellipse getrennten Mantelhälften, den ausserhalb der Focal-Ellipse gelegenen unbegrenzten Theil der Ebene xy.

Die Focal-Ellipse dagegen umschliesst die elliptische Platte, welche das erste der dreiaxigen Ellipsoide darstellt, die die dritte Flächen-Familie bilden. Um den Punkt O herum trennt sich dieselbe im Sinne der z Axe in zwei Mäntel, welche zusammen ein sehr abgeplattetes Ellipsoid umschliessen; indem sich diess stets vergrössert und aufbläht, durchläuft es den ganzen Raum und endigt mit der Kugel von unendlichem Radius als dem letzten Gliede seiner Familie.

Indem man sich vergegenwärtigt, dass die Hauptschnitte der Oberflächen von allen drei Familien, während der ganzen Formenwandelung stets die nämlichen Brennpunkte haben, vervollständigt man das Bild des ganzen Systems.

Wenn x, y, z die rechtwinkligen Coordinaten eines beliebigen Punktes sind, so stellen die Gleichungen

$$1)\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{A_2^2}+\frac{y^2}{B_2^2}+\frac{z^2}{C_2^2}=l^2, \\ \frac{x^2}{A_1^2}+\frac{y^2}{B_1^2}-\frac{z^2}{C_1^2}=l^2, \\ \frac{x^2}{A^2}-\frac{y^2}{B^2}-\frac{z^2}{C^2}=l^2 \end{array}\right.$$

in Verbindung mit den Relationen

$$2)\left\{\begin{array}{l} A^2+B^2=k^2,\ A^2+C^2=1,\ C^2-B^2=k'^2 \\ A_1^2-B_1^2=k^2,\ A_1^2+C_1^2=1,\ B_1^2+C_1^2=k'^2 \\ A_2^2-B_2^2=k^2,\ A_2^2-C_2^2=1,\ B_2^2-C_2^2=k'^2 \end{array}\right. .$$

die drei Oberflächen-Familien dar. Jene bestimmen ihre Gattung, diese sagen, dass sie confocal und in Folge dessen orthogonal sind. Die Focal-Ellipse wird durch die Gleichungen

$$z=0,\ x^2+\frac{y^2}{k'^2}=l^2$$

und die Hyperbel der Kreispunkte durch die anderen

$$y=o\ \frac{x^2}{k^2}-\frac{z^2}{k'^2}=l^2$$

repräsentirt.

Man sieht daraus auch, dass das ellipsoidale System nicht ein durch die Grösse l einfach bestimmtes ist, sondern dass es für dieselbe Länge l ebenso viel verschiedene ellipsoidische Systeme geben muss, als gebrochene Werthe zwischen Null und Eins enthalten sind; denn alle solche können

dem Verhältniss der Brennpunkts-Distanzen Of und OF oder der Grösse k beigelegt werden.

Wenn k den Grenzwerth Null hat, sodass die Focaldistanz Of verschwindet, so reducirt sich die Hyperbel der Kreispunkte auf die Axe der z und die Focal-Ellipse auf einen Kreis; die Familie der dreiaxigen Ellipsode ist eine Familie von Umdrehungs-Ellipsoiden geworden, für welche die Hauptaxe mit der kleinen Axe der Meridian-Ellipse zusammenfällt; die Familie der einfachen Hyperboloide zu einer Familie der einfachen Umdrehungs-Hyperboloide und die der zweifachen Hyperboloide zu der der Meridian-Ebenen durch die Axe der z. M. Lamé nennt diess besondere System nach der für dasselbe charakteristischen Familie der abgeplatteten Rotations-Ellipsoide das System der planetarischen Ellipsoide. Wenn man andererseits dem k den Grenzwerth Eins belegt, sodass die Focaldistanzen Of und OF gleich gross werden, so erhält man ein besonderes ellipsoidisches System, in welchem Umdrehungs-Ellipsoide, deren Hauptaxe die grosse Axe der Meridian-Ellipse ist, zweifache Umdrehungs-Hyperboloide und Meridian-Ebenen die drei Flächen-Familien repräsentiren; und welches zur Focal-Ellipse die zwischen den Punkten F, F' gelegene Strecke der x Axe hat, während die Hyperbel der Kreispunkte sich auf die zwei jenseits dieser Strecke über F und F' hinaus gelegenen Theile der x Axe reducirt. Man kann dieses System als das der eiförmigen Ellipsoide bezeichnen.

Lässt man dagegen den Werth k unverändert und denkt dafür die Länge l veränderlich, so entspringt auch daraus eine Vielheit ellipsoidischer Systeme, bei der einen Augenblick zu verweilen nützlich ist. Für solche Systeme bilden die Asymptoten Kegel der confocalen einfachen und zweifachen Hyperboloide zwei orthogonale Familien von Kegelflächen zweiten Grades, welche für alle Werthe von l dieselben bleiben; diese berühren somit alle demselben Werthe von k entsprechenden Hyperboloide der möglichen ellipsoidischen Systeme im Unendlichen; für $l = 0$ treten diese Kegel selbst an Stelle der beiden Familien von Hyperboloiden und die Familie der Ellipsoide wird durch eine Familie concentrischer Kugeln ersetzt. Sonach werden nun alle demselben Werth von k entsprechenden ellipsoidischen Systeme von diesem, welches dem Grenzwerth $l = 0$ entspricht, im Unendlichen berührt.

Lässt man aber endlich zu dem Werthe $l = 0$ die Grenzwerthe $k = 0$, oder $k = 1$ treten, so erhält man als den Systemen der planetarischen und eiförmigen Ellipsoide für den Werth $l = 0$ entsprechend das gewöhnliche System der sphärischen Coordinaten, welches aus den Meridianebenen, den concentrischen Kugeln und den Breitenkegeln besteht und in welchem diese letzteren den einfachen oder doppelten Hyperboloiden entsprechen, je nachdem man sie der Klasse der planetarischen oder der der eiförmigen ellipsoidischen Systeme beizählen will.

Weil bei der Formenwandlung innerhalb jeder Flächenfamilie von den liedern derselben der ganze unbegrenzte Raum durchlaufen wird, so entricht jedem Punkte desselben je eine Fläche aus jeder Familie von einem ırch seine Constanten k und l bestimmten System. Die Parameter dieser rei Flächen sind die Coordinaten des Punktes, in welchem jene sich orthoonal schneiden.

Das System der ellipsoidischen Coordinaten bezeichnet offenbar eine ene Stufe in dem Entwickelungsgange der Coordinaten-Systeme. Man ıt nacheinander die Allgemeinheit der Coordinaten-Bestimmung verössert, indem man das Feld, auf welchem sie vollzogen wird, das Element, auf welches sie sich bezieht und durch dessen stetige Reihung die nem Felde angehörige geometrische Form erzeugt wird, und die Bestimıung dieses Elements in verschiedener Weise variirte. Von dem ebenen 'elde ging man einerseits auf das lineare, andrerseits auf das sphärische nd räumliche über; als Element hat man nacheinander den Punkt, die geıde Linie, den Kreis betrachtet, und in der Bestimmungsweise des Elements ıt man von den Coordinaten des Cartesius zu mancherlei anderen Methoden ısbesondere von linearen Coordinaten zu Verhältniss-Coordinaten fortgechritten; Abschnitte von geraden Linien oder Verhältnisse solcher Abchnitte haben immer die letzten Bestimmungsmittel gebildet. Doch müsen wir wohl hinzufügen, dass wir auch die Benutzung der Winkel unır dieser Bezeichnung mit verstehen, weil wir sie lediglich als den Ausruck geradliniger im eigentlichsten Sinne des Wortes unzugänglicher trecken betrachten, nämlich der in der unendlich entfernten geraden Linie elegenen.

Das ellipsoidische System ist nicht neu seinem Elemente nach, es ist n System der Punkt-Coordinaten, auch nicht dem Felde nach, denn es asst sich dem ebenen und sphärischen Felde sehr wohl an, und ist eigentch in seiner vollen Ausbildung ein System des räumlichen Feldes; seine igenthümlichkeit liegt ganz innerhalb der Coordinatenbestimmung. Diese isst sich als eine Coordinatenbestimmung des zweiten Grades von den übrien, als solchen des ersten Grades unterscheiden, ja sie repräsentirt geıdezu die allgemeine Coordinaten-Bestimmung des zweiten Grades selbst. icht wie bei der Cartesischen Methode bestimmt sich der Punkt als der urchschnitt dreier Ebenen, sondern als der dreier Oberflächen zweiter rdnung; nicht wie dort also sind es unveränderliche Flächen, sondern eränderliche, die beim stetigen Uebergang von einem Punkt zum andern lbst in einem stetigen Fluss der Formen begriffen sind, in einem Fluss jeoch, den ein einfaches Gesetz beherrscht. Dieses Gesetz ist das der Concalität und in Folge davon das der Orthogonalität; das letztere erscheint mit aus dem CartesischenSystem der räumlichen Coordinaten herüberbelten und übertragen auf Coordinatenflächen zweiten Grades.

Aber das ellipsoidische System ist doch nur ein Beispiel, eine Erläute-

rung, zu der allgemeinen Theorie der krummlinigen Coordinaten. Das allgemeine Problem, welches dieselbe in sich schliesst, ist das Folgende: Die durch die Gleichungen

$$f(x, y, z) = \rho,$$
$$f_1(x, y, z) = \rho_1,$$
$$f_2(x, y, z) = \rho_2$$

gegebenen Oberflächen schneiden sich unter rechten Winkeln, wenn die Funktionen f_i bestimmten Gesetzen unterworfen sind; es handelt sich darum, dieselben aufzustellen und geometrisch zu interpretiren.

Die allgemeine Auflösung dieses Problems ist der Gegenstand der ersten Vorlesungen des Werks von M. Lamé; in der sechsten und siebenten beginnt und in der achten endet sodann die besondere Untersuchung des ellipsoidischen Systems, ein vollständig ausgeführtes Beispiel zur allgemeinen Methode..

Die allgemeine Theorie beginnt mit der Ableitung der Relationen, welche sich aus der Voraussetzung der Orthogonalität ergeben.

Die Tangential-Ebene der Oberfläche ρ_i hat die Gleichung

$$1) \qquad S\frac{d\rho_i}{du}(U - u) = 0, \ldots 3,$$

und die Normale derselben macht, unter der Voraussetzung

$$2) \qquad S\left(\frac{d\rho_i}{du}\right)^2 = h_i^2, \ldots 3$$

mit den Axen der x, y, z Winkel, deren *cosinus* durch die Ausdrücke

$$3) \qquad \frac{1}{h_i}\frac{d\rho_i}{du}, \ldots 9$$

bestimmt sind. Weil nun die Normalen der drei in dem gedachten Punkte zusammenstossenden Orthogonal-Flächen ein System von drei auf einander rechtwinkligen Geraden bilden, so müssen die *cosinus* ihrer Winkel gegen das Originalsystem die Relation

$$4) \qquad S\frac{d\rho_i}{du}\frac{d\rho_j}{du} = 0, \ldots 3$$

erfüllen; so wie ferner die daraus abgeleiteten Relationen

$$5) \qquad \Sigma\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{d\rho_i}{du}\right)^2 = 1 \ldots 3,$$

$$\Sigma\frac{1}{h_i^2}\left(\frac{d\rho_i}{du}\right) \cdot \left(\frac{d\rho_j}{du}\right) = 0 \ldots 3.$$

Diese Formeln geben uns zugleich Anlass, die Bezeichnungsweise des Verfassers zu erwähnen, in welcher unseres Dafürhaltens nicht der kleinste Werthanspruch des Buches beruht.

Es bezeichnet nämlich u oder v eine bestimmte der drei Coordinaten x, y, z; U dagegen eine der laufenden Coordinaten X, Y, Z; ρ_i oder ρ_j bezeichnet eine der drei Functionen ρ, ρ_1, ρ_2 und zwar beide verschiedene

Functionen, wenn sie neben einander vorkommen. Die Zeichen S und Σ bedeuten eine Summe gleichartiger Grössen und zwar vor einem Ausdrucke mit u die Summe der drei gleichgebildeten Ausdrücke mit x, y, z an Stelle von u, vor einem Ausdrucke mit den Indices ι und j die Summe der durch successive Vertauschung der Indices 0, 1, 2 hervorgehenden gleichen Ausdrücke u. s. w. Alle diese Festsetzungen dienen dem Zwecke der Abkürzung und zugleich dem höheren Gesetze, welches alle Algebra beherrscht, Gleichartiges unter demselben Zeichen zusammenzufassen.

Darnach ist die Formel 1) entwickelt:

$$\frac{d\varrho}{dx}(X-x)+\frac{d\varrho}{dy}(Y-y)+\frac{d\varrho}{dz}(Z-z)=0,$$
$$\frac{d\varrho_1}{dx}(X-x)+\frac{d\varrho_1}{dy}(Y-y)+\frac{d\varrho_1}{dz}(Z-z)=0,$$
$$\frac{d\varrho_2}{dx}(X-x)+\frac{d\varrho_2}{dy}(Y-y)+\frac{d\varrho_2}{dz}(Z-z)=0,$$

und die neun *Cosinus* der Winkel, welche in 3) repräsentirt sind, sind des Näheren

$$\frac{1}{h}\frac{d\varrho}{dx},\ \frac{1}{h}\frac{d\varrho}{dy},\ \frac{1}{h}\frac{d\varrho}{dz};\ \frac{1}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dx},\ \frac{1}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dy},\ \frac{1}{h_1}\frac{d\varrho_1}{dz};\ \frac{1}{h_2}\frac{d\varrho_2}{dx},\ \frac{1}{h_2}\frac{d\varrho_2}{dy},\ \frac{1}{h_2}\frac{d\varrho_2}{dz}.$$

Desgleichen wird die Bedeutung der h durch die Formel 2) in entwickelter Gestalt

$$h_\iota^2=\left(\frac{d\varrho_\iota}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\varrho_\iota}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\varrho_\iota}{dz}\right)^2$$

gegeben.

M. Lamé nennt diese drei Grössen h, h_1, h_2 die Differential-Parameter der ersten Ordnung der Function ϱ_ι; er leitet für dieselben sofort die Relation

$$h_\iota=\frac{d\varrho_\iota}{ds_\iota}$$

ab, in welcher ds_ι das Element der Normale der Oberfläche ϱ_ι bezeichnet, und wornach sie die Grenze des Verhältnisses vom Wachsthum des Parameters ϱ_ι beim Uebergange zur unendlich nahe benachbarten Oberfläche zu dem entsprechenden Wachsthum der Normale oder zur Dicke der durchlaufenen Schicht ausdrücken.

Aus der auf die Projectionen des Elementes der Normale bezüglichen Relation

$$\frac{du}{ds_\iota}=\frac{1}{h_\iota}\frac{d\varrho_\iota}{du}\ \ldots\ 9)$$

ergibt sich dadurch die Gruppe

$$\frac{du}{d\varrho_\iota}=\frac{1}{h_\iota^2}\frac{d\varrho_\iota}{du},$$

welche von mancherlei Gebrauch ist. Sie liefert z. B. ohne Weiteres auf Grund der bekannten Identität

$$\frac{d\frac{du}{d\varrho_i}}{d\varrho_j} = \frac{d\frac{du}{d\varrho_j}}{d\varrho_i}$$

die in der Theorie der Functionen $\frac{d\varrho_i}{du}$ fundamentale Relation

$$\frac{d\frac{1}{h_i^2}\frac{d\varrho_i}{du}}{d\varrho_j} = \frac{d\frac{1}{h_j^2}\frac{d\varrho_j}{du}}{d\varrho_i}, \ldots 9,$$

und weiterhin die ebenso wichtige andere

$$h_i^2\frac{d\frac{d\varrho_j}{du}}{d\varrho_i} + h_j^2\frac{d\frac{d\varrho_i}{du}}{d\varrho_j} = 0 \ldots . 9.$$

Diesen Differential-Parametern der ersten Ordnung treten sofort die Differential-Parameter der zweiten Ordnung zur Seite, die Summen der zweiten Differential-Quotienten der Function ϱ_i nach x, y, z, welche durch

$$\frac{d^2\varrho_i}{dx^2} + \frac{d^2\varrho_i}{dy^2} + \frac{d^2\varrho_i}{dz_2}$$

repräsentirt sind; beide besitzen die auszeichnende Eigenschaft, für jeden Wechsel rechtwinkliger und geradliniger Coordinaten dieselben Formen zu behalten und für jeden Punkt dieselben numerischen Werthe zu reproduciren. M. Lamé führt für beide unter Anwendung des Buchstaben F für die Function die Bezeichnungen $\Delta_1 F$, $\Delta_2 F$ ein.

Er zeigt zunächst in der zweiten Vorlesung, dass sie, auf krummlinige Coordinaten bezogen, denselben Charakter, die nämliche Unabhängigkeit besitzen. Er knüpft die Definition der $\Delta_2\varrho_i$ an die der h_i durch die Formeln

$$\Delta_2\varrho = hh_1h_2\frac{d\frac{h}{h_1h_2}}{d\varrho}, \; \Delta_2\varrho_1 = hh_1h_2\frac{d\frac{h_1}{h_2h}}{d\varrho_1}, \; \Delta_2\varrho_2 = hh_1h_2\frac{d\frac{h_2}{hh_1}}{d\varrho_2},$$

die mittelst der Substitution

$$hh_1h_2 = \omega$$

in eine zusammengefasst werden:

$$\Delta_2\varrho_i = \omega . \frac{d\frac{h_i^2}{\omega}}{d\varrho_i}, \ldots . 3,$$

und die andere

$$\Delta_2 F = \omega\Sigma\frac{d\frac{h_i^2}{\omega}\frac{dF}{d\varrho_i}}{d\varrho_i}.$$

Wenn die Familien der Orthogonalflächen die Systeme dreier Ebenen wie *in der* Methode des Cartesius darstellen, so sind die Differential-Parameter

der ersten Ordnung alle der Einheit gleich und diese Definitionen führen zu der oben erwähnten zurück, indem sie ihr die Form

$$\Delta_2 F = S \frac{d^2 F}{du^2}$$

geben.

Die dritte Vorlesung führt in das Studium der Krümmungen der Orthogonal-Flächen ein; sie stellt in den Vordergrund das Theorem von Dupin, nach welchem in jedem Orthogonal-System die Oberflächen zweier Familien auf einer Oberfläche der dritten Familie alle Krümmungslinien verzeichnen. Die Bestimmung der entsprechenden Krümmungshalbmesser folgt und liefert einen merkwürdigen Ausdruck für die Summe beider Hauptkrümmungen derselben Oberfläche oder für die Grösse, welche Gauss als die sphärische Krümmung bezeichnet hat.

Der allgemeine Ausdruck der sechs Krümmungen der drei durch den betrachteten Punkt gehenden conjugirten Oberflächen wird in der Form

$$\frac{1}{r_i^{(j)}} = \frac{h_i}{h_j} \frac{dh_j}{d\varrho_i}$$

gegeben, so dass die einzelnen Werthe sind

$$\frac{1}{r'} = \frac{h}{h_1} \frac{dh_1}{d\varrho}, \; \frac{1}{r''} = \frac{h}{h_2} \frac{dh_2}{d\varrho}; \; \frac{1}{r_1''} = \frac{h_1}{h_2} \frac{dh_2}{d\varrho_1}, \; \frac{1}{r_1} = \frac{h_1}{h} \frac{dh}{d\varrho_1};$$

$$\frac{1}{r_2} = \frac{h_2}{h} \frac{dh}{d\varrho_2}, \; \frac{1}{r_2'} = \frac{h_2}{h_1} \frac{dh_1}{d\varrho_2}.$$

Dazu stellen wir die Relation $\frac{1}{ds_i} = \frac{h_i}{d\varrho_i}$ aus dem Früheren.

In den gewählten Bezeichnungen ist der Index i der der Oberfläche, der Accent j der des Bogens, und s, s_1, s_2 bezeichnen die Bögen, welche aus dem Durchschnitt der Flächen ϱ_1, ϱ_2; ϱ_2, ϱ; ϱ, ϱ_1 respective hervorgehen. Die Unterscheidungen von Krümmungen, die nach dem Bogen und von Krümmungen, die nach der Oberfläche conjugirt sind, erklärt sich darnach von selbst; die Paare von Krümmungen, für die keines von beiden gilt, wie z. B. $\frac{1}{r_2}$, $\frac{1}{r''}$ werden als reciproke bezeichnet. M. Lamé fügt dem noch drei aus derselben allgemeinen Formel entspringende Ausdrücke bei, die auch Krümmungen bezeichnen und aus der Voraussetzung gleicher Indices und Accente hervorgehen; nämlich

$$\frac{1}{r} = \frac{dh}{d\varrho}, \; \frac{1}{r_1'} = \frac{dh_1}{d\varrho_1}, \; \frac{1}{r_2''} = \frac{dh_2}{d\varrho_2}.$$

Weil sie bei einer Aenderung des Parameters ihren Ausdruck ändern, werden sie als parametrische Krümmungen von den übrigen unterschieden. Dieser Reichthum von Benennungen und die scharfe Unterscheidung der Vorzeichen der Krümmungen geben die Füglichkeit zum präcisen Ausdruck allgemeiner in den

analytischen Ergebnissen enthaltenen Gesetze, z. B. für den oben erwähnten Ausdruck der sphärischen Krümmung: Das Verhältniss der beiden Differentialparameter der Function ist gleich dem Ueberschuss der parametrischen über die sphärische Krümmung in jedem Punkte der durch sie repräsentirten Oberflächen. Die parametrische und sphärische Krümmung sind gleich, wenn der Differential-Parameter der zweiten Ordnung gleich Null ist u.s.w.

In der vierten Vorlesung bilden ferner die Krümmungen der Durchschnitts-Curven der conjugirten Oberflächen den Gegenstand der Untersuchung; mit der Erörterung ihrer geometrischen Darstellbarkeit und der Begründung von Ausdrücken, wie Composante, Projection einer Krümmung oder Resultante mehrerer Krümmungen beginnend, giebt M. Lamé sodann durch eine schöne geometrische Erörterung den Beweis, dass die neun Krümmungen der Oberflächen, welche den Gegenstand der vorigen Vorlesung bilden, als die Projectionen von drei durch den Ausdruck $\frac{\Delta_1 h_i}{h_i}$ gegebenen resultirenden Krümmungen auf die Normalen der Oberflächen angesehen werden dürfen, und dass die Cosinus der von ihren Richtungen mit den u eingeschlossenen Winkel durch die Ausdrücke

$$\frac{h_i}{\Delta_1 h_i} \frac{d\frac{d\varrho_i}{du}}{d\varrho_i}$$

bestimmt sind.

Von der eigenthümlichen Krümmung p des Bogens s wird alsdann bewiesen, dass ihr Quadrat mit der Summe der Quadrate der beiden in diesem Bogen conjugirten Krümmungen der Orthogonal-Flächen äquivalent ist und darnach geometrisch die Berechtigung des Ausdrucks dargethan, nach welchem die eigenthümliche Krümmung des Bogens s die Resultante der in diesem Bogen congugirten Krümmungen der Orthogonal-Flächen ist. Die Bestimmung der Centra der resultirenden Krümmung, die Ableitung der gegenseitigen Beziehungen zwischen denselben und die Bestimmung der Krümmungen der Oberflächen aus ihnen bilden die ferneren Zielpunkte der Vorlesung.

Der Beschluss der allgemeinen Theorie der Orthogonal-Systeme wird in der fünften Vorlesung gemacht. Die Functionen h_i müssen nämlich sechs partielle Differentialgleichungen bewähren, zu denen man gelangt, indem man die Bedingungen der Integrabilität der Cosinus $\left(\frac{1}{h_i}\frac{d\varrho_i}{du}\right)$ der Winkel ausdrückt, welche die feste Achse der u mit den Normalen der conjugirten Orthogonalflächen bildet; mit der Bezeichnung $\frac{1}{h_i} = H_i$ sind dieselben in *der ersten* Gruppe

$$\frac{d^2 H_i}{d\varrho_j\, d\varrho_k} = \frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\varrho_j}\frac{dH_j}{d\varrho_k} + \frac{1}{H_k}\frac{dH_i}{d\varrho_k}\frac{dH_k}{d\varrho_j},$$

und in der zweiten

$$\frac{d\frac{1}{H_i}\frac{dH_j}{d\varrho_i}}{d\varrho_i} + \frac{d\frac{1}{H_j}\frac{dH_i}{d\varrho_j}}{d\varrho_j} + \frac{1}{H_k^2}\frac{dH_j}{d\varrho_k}\frac{dH_i}{d\varrho_k} = o$$

enthalten, in denen i, j, k stets die Gruppe der drei Indices 0 (wird nicht geschrieben), 1, 2 vollständig vertreten.

Mit Hilfe der früher eingeführten Begriffe lassen sich nun diese Differentialgleichungen, nachdem man sie durch die Bogen-Elemente ds_i und die sechs Krümmungshalbmesser $r_i^{(j)}$ ausgedrückt hat, geometrisch interpretiren und werden als einfache Gesetze erkannt, welche die Krümmungen der Orthogonal-Flächen und ihre Veränderungen regieren. So liefert die zweite Gruppe derselben die neue Reihe

$$\frac{1}{r_i^{(j)} r_i^{(k)}} + \left(\frac{1}{r_k^{(j)}}\right)^2 + \left(\frac{1}{r_j^{(k)}}\right)^2 = \frac{d\frac{1}{r_k^{(j)}}}{ds_k} + \frac{d\frac{1}{r_j^{(k)}}}{ds_j}$$

und damit das Gesetz: Das Product beider Krümmungen derselben Oberfläche vermehrt um die Summe der Quadrate der ihnen im Bogen conjugirten Krümmungen ist der Summe der Variationen dieser letztern Krümmungen nach ihren reciproken Bogen gleich.

Die erste Gruppe liefert ebenso das Gesetz: Die Variation einer Krümmung nach dem zu ihrer Ebene normalen Bogen ist gleich dem Product der ihr im Bogen conjugirten Krümmung in ihren Ueberschuss über die ihr der Fläche nach conjugirte Krümmung, d. i.

$$\frac{d\frac{1}{r_i^{(j)}}}{ds_k} = \frac{1}{r_k^{(j)}}\left(\frac{1}{r_i^{(j)}} - \frac{1}{r_i^{(k)}}\right).$$

Eine Gruppe abgeleiteter Gesetze schliesst sich daran an und den Schluss der Vorlesung macht die Begründung derjenigen partiellen Differential-Gleichungen, welche die geradlinigen Coordinaten u_i als Functionen der krummlinigen ϱ_i betrachtet, erfüllen müssen.

Die folgenden drei Vorlesungen enthalten sodann, wie wir schon gesagt haben, als ein vollständig durchgeführtes Beispiel von der Anwendung der allgemeinen Theorie die Untersuchung des ellipsoidischen Systems. Sie besteht natürlich wesentlich in der Integration der vorher erwähnten partiellen Differential-Gleichungen und hat die Aufgabe, zu zeigen, wie bestimmten Zwecken gegenüber die Entwicklung des geeignetsten Orthogonalsystems aus den allgemeinen Gesetzen, welchen alle solche Systeme unterworfen sind, geschehen kann, nachdem in den vorigen Entwickelungen immer nur an den bekannten Beispielen orthogonaler Systeme, dem sphäri-

schen Systeme und gewissen cylindrischen und conischen Systemen, die Bewährung der gefundenen allgemeinen Gesetze *a posteriori* hatte nachgewiesen werden können. Sie bildet durch Klarheit und Präcision der Entwickelung die glänzendste Parthie des Werks und ist auch dadurch von besonderem Werthe, dass sie die Methode darlegt, durch welche M. Lamé selbst zu den elliptischen Coordinaten geführt worden ist, dass man also darin den schöpferishen Gedankengang eines ausgezeichneten mathematischen Denkers im Einzelnen verfolgen kann. Es ist jedoch unmöglich, auszugsweise davon eine Anschauung zu geben; wir wünschen, dass recht Viele durch die vorhergehenden Andeutungen zu dem Studium des Werkes selbst sich mögen anregen lassen.

Wir können dabei eine Anmerkung nicht unterdrücken, die nur scheinbar von dem Gegenstande dieser Anzeige abführt. M. Lamé hat in seinen „*Leçons sur les fonctions inverses des transcendentes et les surfaces isothermes*" (Paris 1857) das System der elliptischen Coordinaten synthetisch eingeführt. (*Leçons* VIII, IX.) Die Orthogonal-Flächen des elliptischen Systems erscheinen dort als Isotherm-Flächen und die Grössen A, B, C, A_1, B_1, u. s. w. als die inversen Functionen, welche die vorhergehenden Vorlesungen einführten. Die Variabeln dieser letzteren bilden ein neues Coordinaten-System, welches dem weitern Fortschritt der dort geführten Untersuchung sehr förderlich ist. Die Vergleichung jenes Werkes mit dem gegenwärtigen ist im höchsten Grade lehrreich.

Die Theorie der Wärme bildet dort den Ausgangspunkt der Untersuchung. Die Gleichung $\Delta_2 F = o$,
in welcher die Grösse $\Delta_2 F$ der in dem Früheren betrachtete Differential-Parameter der zweiten Ordnung von F ist, erscheint hier als die Bedingung des Gleichgewichtes der Temperatur; wenn alsdann ε ein bestimmter Werth der Function F ist, $F = f(x, y, z) = \varepsilon$,
so repräsentirt diese Gleichung eine Isotherm-Fläche, d. i. den Ort aller der Punkte des betrachteten Raumes, die dieselbe Temperatur ε haben. Der Parameter ε bestimmt eine besondere Oberfläche der durch die obige allgemeine Gleichung dargestellten Familie von Isotherm-Flächen und M. Lamé nennt ihn den thermometrischen Parameter derselben. Da für die analytische Theorie der Wärme die Betrachtung von Isotherm-Flächen von fundamentaler Wichtigkeit ist, so hat die Aufsuchung des Kennzeichens der Isothermie — denn nicht alle Flächen sind im Allgemeinen Isotherm-Flächen, sondern sie werden es nur unter besonderen, von ihren geometrischen Parametern erfüllten Bedingungen — besondere Bedeutung. Die Aufsuchung dieser Bedingungen liefert das merkwürdige Ergebniss, dass den speciellen Fällen der Oberfläche zweiten Grades die sämmtlichen elementaren Transcendenten des Integral-Calculs als solche Bedingungen entspringen; nämlich beispielsweise *wie folgt:* Kreis-Cylinder $x^2 + y^2 = k^2$ oder Umdrehungs-Paraboloide

$$y^2 + z^2 = 2\lambda x + \lambda^2$$

sind isotherm, wenn $\lambda = ae^\varepsilon$,

(logarithmische Transcendente); elliptische und hyperbolische Cylinder

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

wenn $$\lambda = c \cdot \frac{e^\varepsilon + e^{-\varepsilon}}{2}$$

und somit $$\sqrt{\lambda^2 - c^2} = c \cdot \frac{e^\varepsilon - e^{-\varepsilon}}{2}$$

ist (*sinus* und *cosinus*, sowie hyperbolische *sinus* und *cosinus*). In solcher Weise entsprechen den hyperbolischen Cylindern und den planetarischen Ellipsoiden die trigonometrischen und den Umdrehungs-Hyperboloiden und den eiförmigen Elipsoiden die Exponential-Functionen als Bedingungen der Isothermie.

Wenn man aber dieselben Bedingungen für die allgemeinen Oberflächen des zweiten Grades

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1$$

aufsucht, so erhält man die elliptischen Functionen und erkennt, dass dieselben angesehen werden können als die geometrischen Parameter der allgemeinen Oberflächen zweiten Grades, insofern dieselben Isothermflächen sind. Das Studium dieser Functionen, ihre Theorie von diesem mathematisch-physikalischen Gesichtspunkte aus, bildet den Inhalt jenes Werkes; die Entdeckungen von Euler, Abel und Jacobi ergeben sich im lichtvollsten und überraschendsten Zusammenhange.

Und diese mathematisch-physikalischen Gesichtspunkte sind auch dem gegenwärtigen und bis jetzt neuesten Werke des Verfassers — hoffentlich vervollständigt er seine Publicationen recht bald durch die „analytische Theorie der Wärme“ — nicht fremd; im Gegentheil sie beherrschen es und wir würden unsere Pflicht als Referent nur halb erfüllen, wenn wir nicht die umfassenden Gesichtspunkte und die Einzelausführungen desselben, so weit es in aller Kürze möglich ist, darlegen wollten.

Denn die Theorie der krummlinigen Coordinaten ist nicht nur aus der mathematischen Physik hervorgegangen, sondern sie hat auch in derselben ihr eigentliches Gebiet, findet dort ihre bedeutendsten Anwendungen.

Und das gegenwärtige Werk muss gewiss, so bedeutend es auch in rein mathematischer Beziehung ist, noch höher gestellt werden, als eine Studie zur mathematischen Physik betrachtet; als solche ist es von seltenem Werthe und dem Studium aller derer dringend zu empfehlen, die sich für den Fortschritt derselben gründlich interessiren.

M. Lamé beginnt sein Werk mit dem Begriffe der Punkt-Function, den er auf jede Grösse anwendet, die in jedem Punkte des begrenzten oder

unbegrenzten Raumes einen besonderen und bestimmten Werth hat; eine solche variirt stetig von einem Punkte zum andern und ist in jedem Coordinaten-System ausdrückbar.

Wenn man alle diejenigen Punkte des Raumes denkt, in welchem dieselbe den nämlichen numerischen Werth besitzt, so erhält man eine Fläche, und die allgemeine Voraussetzung der Constanz liefert eine Familie solcher Flächen, die den Wirkungsraum der Punkt-Function erfüllt.

In einer im Gleichgewichte befindlichen Flüssigkeit entspricht jedem Punkte ein Druck normal zu allen den Flächen-Elementen, denen angehörig dieser Punkt angesehen werden kann und für alle von derselben Intensität; dieser Druck ist die Punkt-Function der Hydrostatik, ein bestimmter Werth kommt ihr für alle Punkte einer bestimmten Oberfläche zu, in welcher jeder Punkt die Eigenschaft besitzt, dass die Richtung der Resultante aller äusseren Kräfte mit seiner Normale zusammenfällt, und ihre Constanz im Allgemeinen liefert eine Familie solcher Oberflächen, welche den ganzen von der Flüssigkeit eingenommenen Raum erfüllen. Es ist die Familie der Niveau-Flächen.

Wenn man nach dem Gesetz der allgemeinen Schwere für einen Punkt des Raumes die Summe bildet, deren Glieder die Quotienten sind aus den Massen aller übrigen Punkte des Raumes durch ihre respectiven Entfernungen von ihm, so erhält man diejenige Punkt-Function, welche als die Potential-Function in der Gravitations-Theorie bezeichnet wird, und deren partielle Differentiale die Composanten der Attraction liefern. Sie hat für alle Punkte einer gewissen Oberfläche, die zugleich überall zur Resultante der Attraction normal ist, denselben Werth und ihre Constanz im Allgemeinen bezeichnet die Familie dieser Oberflächen, gleichfalls Niveau-Flächen genannt, die den Raum erfüllen.

In dem Gleichgewichtszustand der Wärme ist die Temperatur die Punkt-Function und ihre Constanz definirt die Familie der Isotherm-Flächen.

Wenn man endlich zu den drei Veränderlichen, welche die Coordinaten repräsentiren, die Zeit als eine vierte hinzufügt, so entspricht jedem andern Zeitpunkt eine neue Familie jener Flächen und die Gleichung zwischen ihnen ist der Ausdruck des Bewegungszustandes, durch welchen die Familien des nächsten Augenblicks aus denen des gegenwärtigen hervorgehen.

Man sieht, jenem Gebiete der Punkt-Function mit drei Veränderlichen fällt die Statik in allen Gebieten der mathematischen Physik anheim; das Hinzutreten der Zeit als einer vierten Veränderlichen beherrscht die Dynamik der nämlichen Erscheinungs-Gebiete; sie wird die Auflösungen der Probleme der himmlischen Mechanik vervollständigen, sie umfasst die Hydrodynamik, die Theorie der tönenden und leuchtenden Wellen, die der Erwärmung und Abkühlung der Körper.

Wenn nun — um den analytischen Vorgang kurz zu zeichnen — in einem dieser verschiedenen Zweige der mathematischen Physik eine Untersuchung zu führen ist, so bestehen die Data des Problems einerseits in einer Gruppe von partiellen Differential-Gleichungen der zweiten Ordnung, welche die beherrschenden physikalischen Gesetze repräsentiren, andererseits in gewissen Differential-Gleichungen der ersten Ordnung, welche dieselben Functionen für die an der Oberfläche des betrachteten Körpers gelegenen Punkte zu erfüllen haben. Man macht die dadurch geforderte Integration möglich, indem man ein Coordinatensystem wählt, in welchem die Punkte der Oberfläche durch die Constanz einer der Coordinaten repräsentirt werden; so beim rectangulären Prisma mit Hilfe der rechtwinkligen Cartesischen, beim geraden Cylinder mit Hilfe der Polar-Coordinaten; so entsprang der Behandlung von Fragen über die Kugel das System der sphärischen und derjenigen von solchen über das Ellipsoid das der ellipsoidischen Coordinaten.

So hat insbesondere die Untersuchung des Wärmezustandes im dreiaxigen Ellipsoid M. Lamé auf die ellipsoidischen Coordinaten geführt. Die drei Flächenfamilien desselben sind nicht nur confocal und orthogonal, sondern auch isotherm, so dass sich auf sie der Begriff der thermometrischen Parameter überträgt.

Aber am vollständigsten wird doch gerade der allgemeine Begriff des krummflächigen Orthogonal-Systems gefordert durch die mathematische Theorie der Elasticität, weil die Gesetze, die das innere Gleichgewicht eines festen Körpers regieren, selbst auf die Betrachtung dreier Familien von Orthogonalflächen hinführen. Im Zustande des elastischen Gleichgewichtes entsprechen nämlich jedem Punkte des festen Körpers drei und nur drei zu einander rechtwinkliche, ebene Elemente, auf welche die elastischen Kräfte normal wirken; sie verändern ihre Lage von einem zum andern Punkte stetig und bilden so die drei Familien von Orthogonalflächen, welche M. Lamé unter dem Namen eines isostatischen Systems zusammengefasst hat. In der nahe liegenden Bemerkung, dass die Parameter der drei dem nämlichen Punkte entsprechenden Orthogonal-Flächen des Systems eben diesem Punkte charakteristisch angehören und deshalb als seine Coordinaten angesehen werden können, liegt der Ursprung zur Idee der allgemeinen krummlinigen Coordinaten. Eben weil hier — wir bemerken es beiläufig — die Anwendung der krummlinigen Coordinaten der Orthogonal-Systeme so ganz die eigentliche Natur der Sache ausdrückt, begegnet die Auflösung des allgemeinen Problems über das elastische Gleichgewicht des rectangulären Prisma's so unüberwindlichen Schwierigkeiten.

So ist denn das ganze Werk von mathematisch-physika-

lischen Gesichtspunkten beherrscht. Und so ist es natürlich, dass man für jene in der allgemeinen Theorie der krummlinigen Orthogonalsysteme so bedeutsam hervortretenden Functionen, die als Differential-Parameter der ersten und zweiten Ordnung erschienen und welche die constanten vom Coordinatensystem unabhängigen Relationen der Krümmungen des Orthogonalsystems beherrschen, auch nach ihrer physikalischen oder so zu sagen natürlichen Definition sucht. Wir stellen sie zusammen.

Der erste Differential-Parameter der Potential-Function in der Theorie der Gravitation ist die Resultante der auf die Einheit der Masse ausgeübten Attractionen, und in der Hydrostatik ist der erste Differential-Parameter des Drucks dem Producte der Resultante der äusseren Kräfte in die Dichtigkeit gleich. Man kann daher den Differential-Parameter der ersten Ordnung einer solchen Punkt-Function wohl als die Kraft bezeichnen.

Der Begriff des Differential-Parameters der zweiten Ordnung entspringt am directesten aus der analytischen Theorie der Wärme; wenn man die Wärmebewegung, d. i. die Wärmezunahme und den Wärmeverlust, innerhalb eines rechtwinkligen Elementar-Parallelepipedes von den Seiten

$$ds_i = \frac{d\varrho_i}{h_i}$$

während der Zeit dt und bei der Temperatur F ausdrückt, so findet man

$$k\frac{dF}{dt} = \omega\,\Sigma\,\frac{d\,\frac{h_i^2}{\omega}\,\frac{dF}{d\varrho_i}}{d\varrho_i},$$

wo k die von der Dichtigkeit, der specifischen Wärme und dem Leitungsvermögen des Körpers abhängende Constante ist, für die allgemeine Gleichung. Dieselbe zeigt, dass das Wachsthum der Temperatur in jedem Punkt mit dem zweiten Differential-Parameter derselben übereinstimmt. In der Unabhängigkeit dieses Wachsthums vom Coordinaten-System erblicken wir den physikalischen Ausdruck von der gleichen Unabhängigkeit des Differential-Parameters der zweiten Ordnung. Man kann demgemäss diesen letzteren etwa als das Wachsthum oder als die calorische Acceleration bezeichnen. Man sieht, wie direct sich als die Definition der Isotherm-Flächen die Bedingung

$$\Delta_2 F = 0$$

ergiebt.

Die nämliche Gleichung

$$\Delta_2 F = 0$$

ist die allgemeine Gleichung in der Theorie des Potentials. In der allgemeinen Theorie der Elasticität fester homogener Körper bewähren die Projectionen der molekularen Lagenveränderung und die Composanten der elastischen Kräfte im Gleichgewichtszustande die allgemeine Gleichung $\Delta_2 . \Delta_2 F = 0,$

die cubische Ausdehnung Θ wird durch das Gesetz

$$\Delta_2 \Theta = 0$$

im Zustande des Gleichgewichts und durch das andere

$$\frac{d^2 \Theta}{dt^2} = a^2 \Delta_2 \Theta$$

im Schwingungszustande regiert.

In so ausgezeichneter Weise zeigen sich die physikalischen Phänomene von dem zweiten Differentialparameter der Punktfunctionen abhängig, die in ihnen auftreten, wie um diesen als eine natürliche Derivirte vor allen andern zu bezeichnen.

Und diesen überall schon in den Grundgedanken ruhenden mathematisch-physikalischen Gehalt ergänzen noch die Anwendungen der allgemeinen Theorie, welche drei Fünftel des Buches umfassen. (Leçons IX—XX.) Sie sind der Dynamik und Theorie des Potentials (Leç. IX, X) der Theorie der Isotherm-Systeme (Leç. XI—XIII) und der allgemeinen Theorie der Elasticität (Leç. XV—XX) gewidmet. Die XIV. Vorlesung ist überdiess der Transformation der Orthogonal-Systeme durch reciproke Radienvectoren gewidmet.

Von der grössten Bedeutung sind hier die Anwendungen auf die Elasticitäts-Theorie fester homogener Mittel. Man kennt, wie wir hoffen, in Deutschland ziemlich allgemein das schöne Werk unseres Autors „*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. Paris* 1852.“ Am Schlusse der allgemeinen Theorie, vor dem Uebergang zu der ausführlichen Anwendung der Elasticitäts-Theorie auf die Erklärung der Erscheinungen der doppelten Brechung, verweist dort der Verfasser auf sein Mémoire über die isostatischen Oberflächen in Liouville's Journal, als in welchem er die Gleichungen der Elasticität in krummlinige Coordinaten transformirt habe. Hier findet man diese Untersuchung wieder aufgenommen und weitergeführt. Man findet aber insbesondere die vollständige Integration der allgemeinen Gleichungen der Elasticität für den Fall einer homogenen sphärischen Enveloppe von constanter Elasticität, deren Mäntel bekannten von einem Punkt zum andern veränderlichen Druck- oder Zugkräften unterworfen sind. Diese schöne Untersuchung ist auch in Form einer eigenen Schrift erschienen.

Eine besondere Erwähnung gönnen wir endlich noch einigen Bestandtheilen des Inhalts der Vorlesungen IX und X, die der Dynamik gewidmet sind. Die allgemeinen Gleichungen der Bewegung eines materiellen Punktes sind hier in die krummlinigen Coordinaten übertragen und manche schöne Anwendung ist davon gemacht; insbesondere führt die Betrachtung der Bewegung unter dem Einflusse von Attractionskräften, wo der Parameter ein Potential ist, zu ausgezeichnet einfachen Formeln. Die Interpretation dieser Entwickelung lehrt, dass das Wachsthum der lebendigen Kraft gleich der durch das Wachsthum des Potentials

multiplicirten angezogenen Masse ist; für die Masseneinheit giebt demnach der Parameter der Niveauflächen oder das Potential durch sein Wachsthum die Arbeit der Attraction und rechtfertigt so seinen Namen.

Und wenn man die Geschwindigkeit in Funktion der Coordinaten ausdrückt, so gilt für die lebendige Kraft $\frac{\mu V^2}{2}$ die Gleichung

$$\Delta_2 \frac{\mu V^2}{2} = 0,$$

die nämliche Gleichung, welche für einen festen homogenen Körper das Gesetz der Temperatur im Zustande des thermischen Gleichgewichts giebt; gewiss eine schöne Erinnerung an die Grundgedanken der mechanischen Wärmetheorie!

Indem sodann M. Lamé den Gedanken verfolgt, dass die Parameter der den Niveau-Flächen conjugirten Systeme von Orthogonal-Flächen ihrerseits andere Eigenschaften der Bewegung ausdrücken mögen, und denselben speciell auf den Fall einer anziehenden geraden Linie oder des cylindrischen Potential's anwendet, gelangt er zu weiteren interessanten Ergebnissen.

Sie sind in den Gleichungen

$$d\varrho = d.\frac{V^2}{2} \text{ und } d\varrho_1 = V^2 d\Theta = \frac{V^2}{R} d\sigma$$

enthalten, in welcher letzteren $d\Theta$ den Contingenzwinkel der Trajectorie des Punktes bedeutet, während R der Krümmungshalbmesser und $d\sigma$ das Bogen-Element derselben ist. Die erstere zeigt, wie das Wachsthum des cylindrischen Potentials ϱ die Arbeit der Attraction oder genauer gesprochen der tangentialen Composante derselben liefert. Man muss die zweite als Definition einer andern Arbeit betrachten, die bisher noch unbeachtet geblieben ist; der Parameter

$$\varrho_1 = \int \frac{V^2}{R} d\sigma = \int V^2 d\Theta$$

des conjugirten Systems der orthogonalen Cylinder liefert durch sein Wachsthum den Ausdruck der von der Normal-Composante der Attraction geleisteten Arbeit.

Wenn eine Kraft einen materiellen Punkt eine krummlinige Bahn durchlaufen lässt, so besteht ihre Arbeit in der Besiegung des Widerstandes, welchen derselbe den Veränderungen seiner Bewegung entgegensetzt, oder wie man kurz sagt, in der Ueberwindung der Trägheit. Ihre tangentiale Composante $\mu \frac{dV}{dt}$ überwindet den Widerstand gegen die Veränderung der Geschwindigkeit, die normale Composante dagegen den Widerstand gegen die Veränderung der Richtung; jene Composante der Trägheit wirkt in dem der Richtung der Geschwindigkeit entgegengesetzten Sinn, diese in der Richtung des Krümmungs-Radius in dem vom Centrum hinwegführenden Sinne. So ist es zu verstehen, wenn M. Duhamel sagt, dass die *Centrifugalkraft* die Normal-Composante der Trägheit ist.

Für die veränderliche geradlinige Bewegung führen diese Betrachtungen auf die Definition der Masse, nach welcher dieselbe der Widerstandscoefficient des materiellen Punktes ist. Für die krummlinige Bewegung fordert die Weiterführung derselben Betrachtungen eben die Einführung jener neuen Arbeit der Normal-Composante der Trägheit, welche wir definirten.

Wir hielten diese Erweiterung des Begriffs der Arbeit für wichtig genug, um ihr eine besondere Erwähnung zu widmen.

Aber wir durften auch nur für etwas wirklich Wichtiges die Länge dieser Anzeige noch vermehren; doch mag sie sich selbst entschuldigen; wo so viel Neues und Eigenthümliches ist, kann die einfache Aufzählung des Inhalts nicht genügen, der Referent wird immer den Versuch machen müssen, von dem Eigenthümlichen eine Idee zu geben und den herrschenden Gedankenkreis zu erläutern.

Man wird es billigen, wenn überall in dem Vorhergehenden die Aufgabe des Referenten allein berücksichtigt worden ist; gegenüber einem Forscher von der Bedeutung George Lamé's halten wir das Referiren für passender als das Recensiren. Wenn wir einen Wunsch aussprechen möchten, dem das Werk innerhalb seiner Sphäre nicht genügt, so ist es der um häufigere Anführung der Arbeiten Anderer, die auf demselben weiten Gebiete Bedeutendes geleistet haben; der Kundige wird solcher an nicht wenigen Stellen gedenken. Doch wollen wir auch darüber mit dem Autor nicht rechten. Wir wollen hier nur noch hinzufügen, dass die Schrift: „Die Potentialfunction und das Potential. Ein Beitrag zur mathematischen Physik von Dr. R. Clausius. Leipzig 1859." eine vortreffliche Einführung in das Studium des Lamé'schen Werkes ist.

Mit zwei literarischen Bemerkungen, deren eine sich den Anwendungen auf die Mechanik anschliesst, während die andere zu der rein geometrischen Bedeutsamkeit des ellipsoidischen Coordinatensystems zurückführt, schliessen wir endlich diese Anzeige.

Im XXI. Bande des *„Journal de l'école impériale polytechnique"* (Paris 1858) hat M. J. N. Haton de la Goupillière in zwei Abhandlungen: *„Sur une theorie nouvelle de la géométrie des masses"* (p. 35—96) sehr schöne Anwendungen der Grundgedanken des ellipsoidischen Systems auf die Untersuchung der in der Theorie der Trägheitsaxen sich darbietenden Integrale $\Sigma\, mxy$ gemacht; wir empfehlen sie zur Beachtung.

In einer der *„Faculté des Sciences"* von Paris am 7. Aug. 1854 vorgelegten Thèse hat M. C. A. Valson die ellipsoidischen Coordinaten auf die Theorie des Ellipsoids und der auf demselben verzeichneten Figuren angewendet und mittelst dieser Methode reiche Entdeckungen über die Focal-Eigenschaften der Oberflächen zweiter Ordnung gemacht, welche besonderes Interesse durch die Vergleichung mit der im 56. Bande von Crelle's Journal veröffentlichten, der Akademie der Wissenschaften zu Berlin im April 1858 vorgelegten, Abhandlung: „Ueber die Focalpunkte der Oberflächen zweiten Grades" von Heilermann gewinnen.

Endlich hat derselbe französische Autor in dem eben vollendeten XIX. Bande der *„Nouvelles Annales de Mathématiques par Terquem et Gerono"* (p. 298) die Anwendung seiner Methode auf die Oberflächen zweiten Grades, welche keinen Mittelpunkt haben, mitgetheilt *). FIEDLER.

*) So eben wurde von Mallet-Bachelier das Erscheinen von: *„Leçons sur la théorie analytique de la chaleur, par G. Lamé."* angekündigt.

Grundzüge des auf menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens, von Dr. Ph. Fischer, Lehrer der höheren Mathematik an der höheren Gewerbschule zu Darmstadt. — Erste Abtheilung: Bestimmung der Sterblichkeitsverhältnisse. — Oppenheim, Ernst Kern. 1860.

Wiewohl die Ermitteluug der Gesetze der menschlien Sterblichkeit, namentlich wegen des hohen Aufschwunges, welchen in der neuern Zeit das hierauf gestützte Versicherungswesen genommen hat, von der grössten Bedeutung geworden ist, muss man doch zugeben, dass die Kenntniss dieser Gesetze noch ziemlich im Argen liegt, wenn auch ein Ueberfluss von sogenannten Sterblichkeitstabellen vorhanden ist. Die grösste Zahl dieser Tabellen ist nämlich völlig unbrauchbar, einestheils in Folge des Umstandes, dass sie aus einem höchst unvollkommenen Beobachtungsmaterial abgeleitet sind, mehr aber noch dadurch, dass von Vielen dieses Material auf eine ganz ungerechtfertigte Weise benutzt worden ist, und dass nur Wenige verstanden haben, auch hier diejenigen Methoden zur Anwendung zu bringen, welche in den verschiedenen Zweigen der angewandten Mathematik benutzt werden, um aus mangelhaften Beobachtungen wenigstens die wahrscheinlicherweise wichtigsten Resultate abzuleiten. Dem vorliegenden Buche gebührt das Verdienst, dasjenige, was in der neuern Zeit, namentlich seit Moser*) zur Beleuchtung der Mängel älterer und neuerer Sterblichkeitstafeln und zur Aufstellung richtiger Grundprincipien geschehen ist, und was bis jetzt an verschiedenen Stellen zerstreut lag, gesammelt und durch die Resultate eigener werthvoller Untersuchungen des Verfassers vermehrt, zu enthalten.

Das Buch, welches die erste Abtheilung eines grösseren Werkes über das auf die menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens bilden soll, zerfällt in fünf Kapitel, deren erstes sich mit den Sterblichkeitsverhältnissen im Allgemeinen beschäftigt und die Begriffe der Wahrscheinlichkeit *a posteriori* überhaupt, sowie der Sterbens- und Lebenswahrscheinlichkeit insbesondere erläutert. Aus diesen Begriffen wird die zweckmässigste Einrichtung der Sterblichkeitstabellen abgeleitet. — Von besonderer Wichtigkeit ist das zweite Kapitel, mit der Ueberschrift: „Die Entstehung der ersten Sterblichkeitstabellen und deren Folgen", welches die Mängel der grösseren Anzahl früherer Sterblichkeitsbestimmungen bloslegt. Nach einer kurzen historischen Einleitung über die hierher gehörigen Bestimmungen des römischen Rechtes und einige spätere Versuche, wendet sich dasselbe zu der ersten eigentlichen Berechnung von Sterblichkeitsverhältnissen, welche im Jahre 1692 veröffentlicht wurde und dem berühmten englischen Astronomen Halley ihre Entstehung verdankt, sowie zu der hiervon abgeleiteten sogenannten „Halley'schen Methode" der Berechnung von Mortalitätstafeln. Der Verfasser ermittelt hierbei sowohl auf theoretischem als practischem Wege die Grösse der Fehler, welche bei dieser Methode daraus entspringen, dass sie unter Voraussetzung einer constant bleibenden Bevölkerung aus blossen Todtenlisten ohne Rücksicht auf die Anzahl der Lebenden, aus denen die Todten hervorgegangen sind, Sterblichkeitstabellen construirt. Von Interesse ist der Nachweiss, dass, wo genügendes Material vorliegt, um die aus der Halley'schen Methode abgeleiteten falschen Zahlen durch gleichzeitige Rücksichtnahme auf die Bevölkerungslisten zu corrigiren, die bedeutenden Differenzen zum grossen Theil

*) In seinem 1839 erschienen Werke: „Die Gesetze der Lebensdauer."

verschwinden, welche sich zwischen diesen Zahlen und den Wahrnehmungen geschlossener Gesellschaften ergeben, bei denen nicht allein die Gestorbenen, sondern auch die Lebenden gezählt wurden. Der von Süssmilch erfundene Begriff der „ausgesuchten" und „ausgesuchtesten" Gesellschaften, welche nach andern Gesetzen als das übrige gemeine Volk absterben sollen, erhält hierdurch seine verdiente Abfertigung. — Das dritte Kapitel handelt von der weiteren Entwickelung der Theorie der Sterblichkeitsverhältnisse und unterwirft zunächst die Zulässigkeit einiger angeblichen Verbesserungsversuche der Halley'schen Methode einer gründlichen mathematischen Untersuchung. Hieran schliesst sich die Betrachtung der wirklichen Fortschritte, welche in der neueren Zeit durch die Bemühungen von Tellkampf, Heym u. A. in der Theorie bei Ermittelung der eigentlichen Sterbenswahrscheinlichkeiten gemacht worden sind. — Das vierte Kapitel enthält eine strenge Kritik einer grossen Anzahl der vorhandenen Sterblichkeitstabellen, sowohl mit Rücksicht auf die Art ihrer Entstehung, als den daraus abzuleitenden Grad ihrer Zuverlässigkeit. Wie wenig Vertrauen die grössere Zahl dieser Tafeln verdient, kann unter Anderem aus dem überraschenden Resultate abgeleitet werden, dass in den hier besprochenen Tabellen die wahrscheinliche Lebensdauer der Neugeborenen zwischen den Grenzen von 1 Jahr und 63 Jahren schwankt. — Im letzten Kapitel handelt der Verfasser von der Construction richtiger Sterblichkeitstabellen und giebt hierbei diejenigen Methoden an, welche von ihm selbst bei Berechnung solcher Tafeln benutzt worden sind. Neu sind die auf das Gewicht der einzelnen Beobachtungszahlen bezüglichen Resultate, sowie die dem Verfasser eigenthümliche Ausgleichungsmethode für Werthe der Sterbenswahrscheinlichkeiten, welche aus verschiedenen Altersjahren stammen, und die Untersuchung über die Correctionen, welche bei geschlossenen Gesellschaften an den Sterbenswahrscheinlichkeiten wegen der aus anderen Ursachen als Tod innerhalb eines Jahres Ausscheidenden, sowie wegen der Eintretenden anzubringen sind, wenn die Zeit dieses Aus- und Eintrittes nicht näher angegeben ist. Kann man auch, namentlich was die vom Verfasser benutze Ausgleichungsmethode betrifft, rücksichtlich der Grundlage derselben, vielleicht anderer Ansicht sein, so verdient doch die Klarheit und die mathematische Strenge volle Anerkennung, mit welcher derselbe die Consequenzen der von ihm aufgestellten Principien verfolgt, und von welcher er bereits in mehreren früheren Werken aus dem Gebiete der reinen und angewandten Mathematik vollgültige Proben abgelegt hat*).

Den Schluss des Buches bilden zwei vollständig durchgeführte Rechnungsbeispiele, nämlich die Berechnung zweier Sterblichkeitstabellen, der einen für das männliche Geschlecht, vom 25sten bis zum 85sten Lebensjahre reichend, der andere für das weibliche Geschlecht, vom 18ten bis zum 86sten Lebensjahre. Dieselben stützen sich auf die Erfahrungen, welche in der königlich preussischen allgemeinen Wittwenverpflegungsanstalt zu Berlin während der Jahre 1776 bis 1852 gemacht worden sind.

---

*) Wir erinnern an des Verfassers „Lehrbuch der höheren Geodäsie", sowie an seine Bearbeitung mehrerer Theile des Francoeur'schen Lehrcurses der reinen Mathematik, von denen namentlich die beiden zuletzt erschienenen:

Lehrbuch der algebraischen Geometrie u. s. w., und
Lehrbuch der analytischen Geometrie in der Ebene

sich durch selbstständige Behandlung und Anordnung des Stoffes und vielfache Aufnahme neuerer Methoden dem Original gegenüber auszeichnen.

Referent kann hierbei die Bemerkung nicht verhehlen, dass er für zweckmässiger gehalten hätte, den Anfang der Tabelle für das männliche Geschlecht um ein Jahr zu verschieben. In Folge des Umstandes nämlich, dass für das 25ste Lebensjahr nur die geringe Zahl von 5 beobachteten Todten vorliegt, hat die Sterbenswahrscheinlichkeit für dieser Alter hauptsächlich durch Ausgleichung mit Benutzung der Nachbarjahre abgeleitet werden müssen. Dass dadurch die unmittelbar beobachtete Wahrscheinlichkeit von 0,0033 durch Ausgleichung bis auf 0,0062 erhöht worden ist, könnte gegen die Zulässigkeit der verwendeten Methode leicht beträchtliche Zweifel hervorrufen.

Man wird aus der vorstehenden Inhaltsangabe ersehen, dass das besprochene Buch nicht allein die Aufmerksamkeit derjenigen verdient, welche zu der Theorie und Praxis des auf die menschliche Sterblichkeit gegründeten Versicherungswesens in näherer Beziehung stehen, sondern dass es auch mancherlei vom mathematischen Standpunkte aus Interessantes enthält. Bedauerlich ist nur, dass an mehreren Stellen, namentlich des letzten Kapitels, die Resultate der mathematischen Entwickelungen durch Druckfehler nicht unbeträchtlich entstellt worden sind.

Zum Schlusse stimmt der Referent mit dem Verfasser in dem Wunsche überein, dass die Directionen und Vorstände der Versicherungsgesellschaften, in deren Interesse hauptsächlich die Fortbildung der Theorie der Sterblichkeitsverhältnisse liegt, durch geeignete Veröffentlichung des in ihren Archiven enthaltenen Beobachtungsmateriales mehr, als es bis jetzt von vielen derselben geschen ist, beweisen mögen, dass ihnen daran gelegen ist, ihre Institute auf tüchtige Grundlagen zu basiren. Der Verfasser stellt eine zweite Abtheilung seines Buches in Aussicht, welche sich mit der Theorie und Praxis des Versicherungswesens beschäftigen soll. In derselben verspricht er, diejenigen Versicherungsinstitute, welche bis dahin den Verpflichtungen nicht nachgekommen sind, welche ihnen im allgemeinen Interesse obliegen, einer ebenso strengen Kritik zu unterwerfen, als es in der vorliegenden Abtheilung mit den mangelhaften Methoden der Sterblichkeitsberechnung und den unbrauchbaren Tabellen selbst geschehen ist.

O. Fort.

Bibliographie

vom 1. Decbr. 1860 bis 15. Februar 1861.

Periodische Schriften.

Register für die Monatsberichte der K. Pr. Akademie der Wissensch zu Berlin von 1836—1858. Berlin, Dümmler in Comm. 2 Thlr.

Annalen der Physik und Chemie, herausgeg. v. J. C. Poggendorff. Jahrg. 1861. No. 1. Leipzig, Barth. pr. cplt. $9^1/_3$ Thlr.

Astronomisches Jahrbuch f. 1863. Herausgeg. v. J. F. Encke unter Mitwirkung von Wolfers. Berlin, Dümmler. 3 Thlr.

Annalen der k. k. Sternwarte in Wien. Herausgeg. von K. v. *Littrow*. 3. Folge, 9. Jahrg. 1859. Wien, Wallishauser in Comm. $3^1/_3$ Thlr.

LAMONT, J., Annalen der K. Sternwarte bei München. 12. Bd. München, Franz in Comm. $1^2/_3$ Thlr.

Publications de l'observatoire l'Athènes. Tom. I. (Beiträge zur physikal. Geogr. Griechenlands v. J. F. J. SCHMIDT. 3 Hefte.) Athen, Willberg. 4 Thlr.

TERQUEM. *Bulletin de bibliographie, d'histoire et de biographie mathématiques. Tome V. Paris.* 20 Ngr.

Reine Mathematik.

GIFFHORN, F. Leitfaden der elementaren Mathematik. 1. Abth. Allgem. Arithm. u. Algebra. Braunschweig, Schulbuchhandl. 24 Ngr.

THOMAS, K. Das System der absoluten Primzahlen. Nebst nothgedrungener Abwehr. Leipzig, Wagner. $^1/_3$ Thlr.

STAMPFER, S. Logarithmisch-trigonometrische Tafeln. 6. Aufl. Wien, Gerold's Sohn. $^2/_3$ Thlr.

LUKAS, F. Logarithmen der Zahlen und der trigonometrischen Functionen und Antilogarithmen. Wien, Helf. 1 Thlr.

MÜLLER, J. H. T., Vierstellige Logarithmen der natürlichen Zahlen und Winkelfunctionen nebst den Additions- und Subtractionslogarithmen. 2. Aufl. Halle, Waisenhausbuchh. $^1/_3$ Thlr.

SPITZER, S. Studien über die Integration linearer Differentialgleichungen. 1. Fortsetzung. Wien, Gerold's Sohn. $^2/_3$ Thlr.

MAYR, A. Grundlegung der Theorie des Variationscalcüls. Würzburg, Kellner. 24 Ngr.

DOERK, G. Lehrbuch der Mathematik. 2. Bd. 1. Thl. Planimetrie u. ebene Trigonometrie. 2. Aufl. Berlin, Weidmann'sche Buchh. 21 Ngr.

SCHRÖDER, F. H. Elemente der Planimetrie und Stereometrie. Hannover, Hahn'sche Hofbuchh. $^1/_2$ Thlr.

ESCHER, H. Die mathematischen Verhältnisse der Kreislinie. Zürich, Meyer & Zeller. 4 Ngr.

KAPFF, F. G. Kreis und Ellipse nach der Theorie der Schiefe, geometrisch, algebraisch und trigonometrisch dargestellt. Leipzig, C. F. Winter'sche Verlagshandl. 18 Ngr.

Apollonius von Perga, Sieben Bücher Kegelschnitte nebst dem durch Halley wiederhergestellten achten Buche. Deutsch von H. BALSAM. Berlin, G. Reimer. $3^1/_3$ Thlr.

CARNOT. *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal. 4. ed. Paris.* $1^1/_3$ Thlr.

DE FREYCINET. *De l'analyse infinitésimale; étude sur la métaphysique du haut calcul. Paris.* 2 Thlr.

Angewandte Mathematik.

ZILLMER, A. Die mathematischen Rechnungen bei Lebens- u. Rentenversicherungen. Berlin, Nicolai'sche Verlh. 2 Thlr.

SUBIC, S. Abhandlung über die Zusammensetzung fortschreitender und drehender Bewegungen und ihre Anwendung zur Erklärung der Aberration des Lichtes, des Foucault-Pendelversuchs etc. Pest, Heckenast in Comm. $^1/_2$ Thlr.

DECHER, Handbuch der rationellen Mechanik. 4. Bd. Mechanik flüssiger Systeme. Augsburg, Rieger. 2 Thlr.

oy, C. F. A. Die Stereotomie enth. Anwendung... den Geometrie etc. Aus dem Frazös. v. F. Kauffmann. 2. ... 2.—6. Lief. Stuttgart, Becher's Verl. à $^3/_4$ Thlr.

...sch, L. Geschichte und System der Breitengradmessungen. Inaug.-Dissert. Freising, Datterer. $^1/_2$ Thlr.

...tlas des nördlichen gestirnten Himmels f. d. Anfang d. J. 1855 entworfen auf d. K. Sternwarte zu Bonn. 6. Lief. Bonn, Marcus. 3 Thlr.

...ümker, G. Die totale Sonnenfinsterniss am 18. Juli 1860; beobachtet zu Castellon de la Plana. Hamburg, Berthes-Besser & Mauke. $^2/_3$ Thlr.

Babh.. *Calcul des éclipses de soleil par la méthode des projections. Paris.* 20 Ngr.

Physik.

Pisko, F. J. Lehrbuch der Physik für Obergymnasien. Brünn, Winiker. 2 Thlr. 8 Ngr.

Encyclopädie der Physik, bearb. von Brix, Decher, v. Feilitzsch etc. herausgeg. v. Karsten. 8. Lief. Leipzig, Voss. $5^2/_3$ Thlr.

Müller-Pouillet's Lehrbuch der Physik und Meteorologie. 3. Bd. Kosmische Physik von J. Müller. 2. Aufl. Braunschweig, Vieweg. 4 Thlr.

Schmid, E. E. Lehrbuch der Meteorologie. Mit Atlas in Querfolio. Leipzig, Voss. 13 Thlr.

Wiedemann, G. Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus nebst ihren Anwendungen. 1. Bd. Galvanismus. Braunschweig, Vieweg. 3 Thlr. 26 Ngr.

Schellen, H. Der elektromagnetische Telegraph. 3. Aufl. Ebendas. 2 Thlr. 8 Ngr.

Robida, R. Grundzüge einer naturgemässen Atomistik mit den daraus abgeleiteten Schwingungsgleichungen. 1. Heft. Klagenfurt, Leon. 6 Ngr.

Kirchhoff, G. und R. Bunsen. Chemische Analyse durch Spectralbetrachtungen. Mit Wandtafel in Farbendruck. Leipzig, Schrag's Verl. $1^2/_3$ Thlr.

Pisko, F. J. Die Fluorescenz des Lichtes. Wien, Gerold's Sohn. 24 Ngr.

Parkinson, S. *A Treatise on Optics. London.* $4^1/_3$ Thlr.

Potter, R. *Physical Optics. 2 Vol. (The corpuscular Theory of Light, discutted mathematically.) London.* à 3 Thlr.

Wilkes, C., *Theory of the Winds. 2. edit. London.* 2 Thlr. 12 Ngr.

Julien, F. *Courants et revolutions de l'atmosphère et de la mer, contenant une théorie nouvelle sur les déluges périodiques. Paris.* $1^1/_2$ Thlr.

Nicklès, J. *Les électro-aimants et l'adhérence magnétique. Paris.* $1^2/_3$ Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Beiträge zur Geschichte der griechischen Mathematik von Professor Dr. L. F. Ofterdinger. Ulm 1860.

Der Verfasser dieser kleinen Broschüre hat schon 1844 im 5. Bande des Grunert'schen Archivs eine Abhandlung veröffentlicht, welche er selbst als Vorarbeit des gegenwärtig Erschienenen bezeichnet. In der That bildet der fast wortgetreue Abdruck dieser Abhandlung: „Ueber die Auffindung mathematischer Wahrheiten bei den Griechen", die erste Hälfte der vorliegenden Schrift. In derselben wird behauptet, was den meisten Mathematikern längst unzweifelhaft war, dass die Griechen gewisse Methoden zur Auffindung von Sätzen besessen haben müssen, welche verschieden waren von den Methoden der Beweisführung. Als solche Hilfsmittel der Erfindung werden genannt:

1. die Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie,
2. die Anwendung der Geometrie auf die Arithmetik,
3. die mechanischen Hilfsmittel (insbesondere das Zeichnen),
4. die angewandte Mathematik (z. B. Statik),
5. die Analogie,
6. die Induction.

Von diesen Erfindungsmethoden sind dann einige Beispiele aus griechischen und späteren Autoren angeführt. Die zweite Hälfte der Broschüre, welche neu erscheint, behandelt in 4 Paragraphen: die problematische Analysis, die Auffindung der Analysis, Data und Orte, endlich die geometrischen Aufgaben des Apollonius. Wesentlich Neues wird der Leser wohl nicht darin entdecken. Ganz angenehm ist in den beiden letzten Paragraphen die Zusammenstellung der verschiedenen Ausgaben der darin besprochenen Werke. Verwirrend hingegen muss es auf den historischen Laien wirken, wenn das Wort Datum bald in der euclidischen, bald in der nichteuclidischen Bedeutung gebraucht wird (z. B. S. 12 und 8), ohne dass auf diesen Doppelsinn aufmerksam gemacht wird. Endlich scheint Herr Ofterdinger das Werk von Chasles über die Porismen als eine neue Ausgabe des griechischen Textes des Pappus zu betrachten, und verspricht uns des-

halb eine ganz neue Untersuchung über dieses Werk, welche bei einer anderen Gelegenheit gegeben werden soll. Der Herr Verfasser wird sich inzwischen wohl überzeugt haben, dass er sich damit wohl überflüssige Arbeit machen würde. CANTOR.

Prolégomènes philosophiques de la géométrie et solution des postulats par J. DELBOEUF. *Liège* 1860.

Es ist keiner Frage unterworfen, dass das uns zur Beurtheilung vorliegende Werk ein in vielfacher Beziehung interessantes genannt werden muss. Sowohl was den eigentlichen Inhalt betrifft, als auch durch die fesselnde Sprache hält es den Leser in fortwährender eifrigster Spannung und reizt zu wiederholtem Ueberdenken der wichtigsten Capitel aus der Philosophie der Mathematik. Wenn wir damit gleich von vornherein unsere ganz besondere Anerkennung des Geleisteten aussprechen, so müssen wir freilich hinzusetzen, dass bei alledem der Verfasser uns die Aufgabe, die er sich stellte, nicht vollständig zur Lösung gebracht zu haben scheint, wozu die Grösse jener Aufgabe am meisten beigetragen haben mag. Der Verfasser wollte einen doppelten Zweck damit erreichen. Er wollte die philosophische Verwandtschaft der Mathematik mit den übrigen Wissenschaften nachweisen, er wollte ferner noch eine strenge, wahrhaft evidente Grundlage für die Geometrie finden, welche die gewöhnlichen Postulate nicht voraussetzte. Also wieder einer von den neuen, neuesten, allerneuesten Beiträgen, Versuchen, Grundzügen u. s. w. der wahren Theorie der Parallellinien? Eigentlich ja! Aber ein solcher Beitrag, der jedenfalls unter den übrigen eine weit hervorragende Stellung einnimmt, und besonders in der allgemeinen Einleitung, sowie in dem kritischen, mehr negativen Theile des Vortrefflichen viel enthält.

Wir wollen aus der Einleitung nur jene Stelle hervorheben, an welcher der Verfasser einerseits gegen den Apriorismus der Idealisten, andererseits gegen den Empirismus der Sensualisten ankämpft, wo er zeigt, wie die eine dieser Lehren zum Mysticismus, die andere zum Skepticismus führt. Mit Schärfe zeigt er in beiden Richtungen Widersprüche; allein was setzt er an die Stelle? Eine Theorie, welche dem Empirismus des Mill zu nahe steht, um nicht der Vermuthung Raum zu geben, dass am Ende doch die Erfahrung das Wesentliche, und die Ableitung der Wahrheit aus der Erfahrung nur ein Nebensächliches sei, über welches allein noch ein philosophischer Streit möglich ist. Wir können daher auch nach Durchlesung dieses Buches noch Verehrer des Mill'schen Hauptwerkes bleiben und uns darüber freuen, dass, wie wir vernehmen, eine neue und zwar vollständige Ausgabe der deutschen Uebersetzung in Bälde zu erwarten steht. Der Haupteinwurf, welchen Herr Delboeuf gegen Mill vorbringt, zeigt selbst das Richtige unserer Behauptung über den geometrischen

Werth der Erfahrung. Wenn Mill angiebt, die Geometrie liefere adäquate Definitionen und sei evident, so frägt Herr Delboeuf nach der Begründung dieser Angabe, und ob es noch andere Wissenschaften gebe, in welchen adäquate Definitionen möglich sind. Die philosophische Berechtigung dieser Frage ist unleugbar, zumal wenn das Verhältniss der Mathematik anderen Wissenschaften gegenüber untersucht werden soll, aber für die Geometrie selbst genügt die empirisch feststehende Thatsache der Evidenz, welche von Herrn Delboef so wenig wie von einem Anderen angezweifelt wird.

Wir haben schon oben bemerkt, dass der Geometer aus dem kritischen Theile des vorliegenden Buches viel lernen könne. Wir erinnern an die vortreffliche Untersuchung der Begriffe: Analysis und Synthesis, an die Ableitung der Vorschriften in Bezug auf die innere Gestaltung eines Lehrganges der Geometrie, Vorschriften, welche zwar überaus einfach sind, aber nichtsdestoweniger nur zu häufig ausser Acht gelassen werden, wie z. B. dass eine gute Definition in der Geometrie genetisch sein müsse, dass die Beweise möglich kurz sein sollen, und insbesondere keiner Hilfslinien sich bedienen sollen, welche die Natur des Satzes nicht schon mit sich bringt u. s. w. Wir erinnern namentlich an die mathematische Prüfung der verschiedenen Beweisverfahren für den Satz von der Winkelsumme des Dreiecks. Jeder Mathematiker wird in diesem Capitel ein schätzbares Material gesammelt finden, wie es sonst nur selten existirt.

Unsere Pflicht als Recensent nöthigt uns jetzt auch einige Bemerkungen über den positiven Theil des Werkes ab. Der Verfasser erinnert selbst daran, dass eine wesentliche Grundlage für ihn eine Schrift des Dr. Ueberweg gewesen sei, welche zuerst 1851 im pädagogischen Archive Bd. XVII erschien, jetzt in französischer, vom Autor gebilligter Uebersetzung dem vorliegenden Werke angefügt ist. Indem wir unsere Freude über diese Offenheit aussprechen, welche für den wahren Freund der Wissenschaft charakteristisch ist, können wir Herrn Delboeuf gern zugeben, dass er über die Schrift, welche ihm zur Anregung diente, weit hinausgegangen ist. Allein auch er hat uns von der vollständigen Richtigkeit seiner Deductionen nicht überzeugen können. Es liegt gewiss viel Wahres in dem Begriffe der Homogeneität des Raumes, der bei beiden Schriftstellern den eigentlichen Ausgangspunkt bildet, allein durchaus klar ist er uns in dem Sinne, wie er benutzt wird, auch nach wiederholtem Lesen noch nicht geworden. Möglich, dass die Schuld an uns liegt, indessen scheint Herr Delboeuf selbst von der Furcht nicht frei geblieben zu sein, es möge Manchem so gehen. Sagt er doch (S. 229 in der Anmerkung): *Tous ces modes de démonstration sont fort simples; mais il faut s'être bien pénétré du principe de l'homogénéité pour en concevoir la puissance et l'application.* Diese Durchdrungenheit zu erreichen, waren wir aber bisher nicht im Stande.

Im Einzelnen möchten wir uns noch einige wenige Ausstellungen er-

lauben. Der Winkel wird (S. 233) definirt: *La figure formée par deux droites, qui partent d'un même point, se nomme angle.* Aber kann man einen Winkel eine Figur nennen? Wir glauben nicht. Herr Delboeuf erinnert wiederholentlich daran, dass man unerwiesenermaassen annehme, zwei Linien, die sich begegnen, schneiden einander. Er versucht (S. 235) einen Beweis davon zu geben. Dazu nimmt er an, AB und CD seien gerade Linien, welche den Punkt E gemein haben, so dass $\angle AEB = CED = 180°$, dann müssen auch die $\angle AEC = BED$ sein und einander gegenüber liegen. Das Erstere geben wir vollständig zu, woher aber weiss man das Letztere, wenn es nicht erfahrungsmässig bekannt sein soll? Und dergleichen Fälle kommen noch mehr vor, wo Herr Delboeuf von einer Evidenz spricht, der wir keinen anderen Grund, als den der Erfahrung unterlegen können. So auf derselben S. 235, wo es heisst: *Quelle que soit la direction prise pour norme, la valeur de l'angle reste la même. Cette proposition est évidente par elle même.* Zur Begründung unseres Einwurfes bemerken wir, dass der angeführte Satz in gewöhnlicher Ausdrucksweise heissen würde: $\angle ABC - ABD = DBC$, wie auch die AB gelegen sein mag. Am klarsten wird in diesem positiven Theile Herr Delboeuf, wo er selbst empirisch zu Wege geht. So S. 235, wo er die symmetrischen Figuren durch Umdrehung, wie bei einem Handschuh erzeugt. Und so müssen wir zum Schlusse wiederholen: das Buch des Herrn Delboeuf verdient von jedem Geometer gelesen zu werden, vom Empirismus werden aber nur Wenige dadurch bekehrt werden, eher dürften Idealisten dadurch zu der entgegengesetzten Schule hinübergezogen werden.

CANTOR.

Analytische Geometrie der Kegelschnitte, mit besonderer Berücksichtigung der neueren Methoden, von GEORGE SALMON. Unter Mitwirkung des Verfassers deutsch bearbeitet von Dr. WILHELM FIEDLER. Leipzig, Druck und Verlag von B. G. Teubner. 1860. 40 Bogen. gr. 8.

Das englische Original, von dessen dritter, im Jahre 1855 veröffentlichten Auflage das vorliegende Werk eine sehr freie Bearbeitung liefert — die erste Auflage erschien 1848 — führt den vollständigen Titel: *A Treatise on Conic Sections: containing an account of some of the most important modern algebraic and geometric methods. By the Rev. George Salmon, A. M., Fellow and Tutor, Trinity College, Dublin.*

Dasselbe enthält mehr, als sein Titel verspricht; es umschliesst in seinem Haupttheile eine fast vollständige Darlegung des gegenwärtigen Standes der auf die Kegelschnitte bezüglichen geometrischen Lehren, mit Zugrundelegung der wichtigsten algebraischen und geometrischen Methoden, durch welche namentlich in der neueren Zeit diese Theorie eine wesentliche Förderung erlangt hat. Ein einleitender Abschnitt giebt die

Grundlehren der Cartesischen Coordinaten-Geometrie, leitet aber in Kursem durch Aufnahme des erweiterten Coordinaten-Begriffes und namentlich durch Einführung der Trilinear-Coordinaten und der dadurch bedingten homogenen Gleichungsformen zu den umfassenderen Gesichtspunkten hin, durch welche die neuere analytische Geometrie weit über die Lehren des Cartesius hinausgeführt worden ist. Die ausgezeichnete Methodik, mit welcher der Verfasser hierbei von den einfacheren Grundlagen zu höheren Anschauungen fortschreitet, macht das Buch, abgesehen von seinem ursprünglichen Zwecke, besonders auch geeignet, zur Einführung in die gegenwärtige wissenschaftliche Stellung der analytischen Geometrie zu dienen.

Der deutsche Bearbeiter hat den letzteren Gesichtspunkt in den Vordergrund treten lassen und hiervon eine Erweiterung des Salmon'schen Werkes abgeleitet, rücksichtlich deren er sich, wie die Vorrede besagt, mit dem Verfasser selbst in Einvernehmen setzte. Durch Einschaltung einer grossen Menge einzelner Zusätze, sowie einiger grösseren Abschnitte ist das Werk um nahe die Hälfte des ursprünglichen Volumens angewachsen, und es ist in seiner neuen Form wohl geeignet, dem Zwecke zu entsprechen, welchen der Bearbeiter dabei im Auge gehabt hat. Das Material zu den Erweiterungen ist zum Theil anderen Schriften desselben Verfassers entlehnt, namentlich dem vorzüglichen Werke: *A Treatise on the higher plane Curves*, zum Theil sind andere englische Quellen benutzt. Die Arbeiten deutscher Mathematiker, namentlich unserer Möbius, Plücker, Steiner und Anderer sind übrigens durchaus nicht unbeachtet geblieben; einzelne Partien verrathen eine selbstständige Auffassung von Seiten des Bearbeiters.

Der Stoff des vorliegenden Werkes ist in der deutschen Ausgabe in die folgenden Abschnitte vertheilt: Cap. I. Der Punkt. Cap. II. Die gerade Linie. Cap. III. Aufgaben über die gerade Linie. Cap. IV. Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung für die Gleichung der geraden Linie. Cap. V. Gleichungen von höheren Graden, welche gerade Linien darstellen. Cap. VI. Ableitung der Haupteigenschaften aller Curven zweiten Grades aus der allgemeinen Gleichung. Cap. VII. Der Kreis. Cap. VIII. Lehrsätze und Aufgaben über den Kreis; Anwendung einer abgekürzten Bezeichnung auf seine Gleichung. Cap. IX. Eigenschaften eines Systems von zwei oder mehreren Kreisen. Cap. X. Die allgemeine Gleichung des zweiten Grades als Central-Gleichung. Ellipse und Hyperbel. Cap. XI. Die Parabel. Cap. XII. Vermischte Aufgaben und Lehrsätze über die Kegelschnitte. Cap. XIII. Die Methode des Unendlich-Kleinen, die Quadratur und Rectification der Kegelschnitte. Cap. XIV. Die Methoden der abgekürzten Bezeichnung, die trimetrischen Coordinaten-Systeme und das Princip der Dualität in ihrer Anwendung auf die Kegelschnitte. Cap. XV. Die allgemeine homogene Gleichung zweiten Grades

und die Algebra der linearen Transformationen. Cap. XVI. Geometrische Methoden. 1) Die Methode der reciproken Polaren. 2) Die harmonischen und anharmonischen Eigenschaften der Kegelschnitte. 3) Die Methode der Projectionen und die geometrischen Verwandtschaften des ersten Grades. — Zusätze. — Quellen-Nachweis.

Das I., II. und V. Capitel enthalten die Hauptsätze aus der Theorie des Punktes und der geraden Linien im Systeme der Cartesischen Parallel-Coordinaten und dem der Polar-Coordinaten; in gleichem Umfange giebt das VI., VII., X. und XI. Capitel die Theorie der Kegelschnitte. Die Capitel III, VIII und XII gewähren reichhaltige Aufgaben-Sammlungen zur Erläuterung dieser Theorien und zur Unterstützung des weiteren Studiums derselben. Mit Ausnahme einer nicht unbeträchtlichen Menge kleinerer Zusätze und Abänderungen beschränken diese mehr elementaren Theile des deutschen Werkes sich grossentheils auf eine freie Uebersetzung der entsprechenden Partien des Originals. Die einzige wesentliche Abänderung besteht in der geänderten Stellung des vom Kreise handelnden Capitels VII, welches im Originale als letzter Theil der der Betrachtung der Kegelschnitte vorausgehenden Einleitung seinen Platz vor der Discussion der allgemeinen Gleichung zweiten Grades findet, während nach dem Standpunkte der deutschen Bearbeitung die Theorie des Kreises den ersten speciellen Fall der Untersuchung einer Linie zweiten Grades bildet und deshalb der Ableitung der Haupteigenschaften aller solcher Linien nachfolgen musste. Der Kreis ist hierbei als diejenige Curve zweiten Grades aufgefasst, deren conjugirte Durchmesser-Paare sich rechtwinklig durchschneiden.

Der übrige Inhalt des Buches, welcher in der vorliegenden Form mehr als die Hälfte des Ganzen ausmacht, ist besonders der Einführung in diejenigen algebraischen und geometrischen Methoden gewidmet, durch welche die neueren wesentlichen Fortschritte der analytischen Geometrie bedingt worden sind. Diese Theile, welche nach dem Plane der deutschen Bearbeitung die wichtigeren sind, haben deshalb auch die grössere Menge von Zusätzen in sich aufgenommen. Bei der reichen Menge des darin enthaltenen Stoffes muss sich Referent auf wenige, die Hauptsachen berührende Andeutungen beschränken.

In dem zur Theorie der geraden Linie gehörenden Capitel IV entwickelt das Original insbesondere den Gedanken, dass die Gleichung der geraden Linie in Cartesischen Coordinaten in eine homogene Gleichung ersten Grades zwischen drei linearen Functionen der beiden Veränderlichen umgeformt werden kann, woraus sich in einfacher Weise der Begriff der trilinearen Punkt-Coordinaten, d. i. der Bestimmung eines Punktes durch das Verhältniss seiner Abstände von den drei Seiten eines Fundamental Dreieckes, ableitet. Die deutsche Bearbeitung schliesst hieran den Begriff *der dreipunktigen* Linien-Coordinaten, in denen die gerade Linie als da

Element geometrischer Formen auftritt und durch das Verhältniss ihrer Abstände von den drei Eckpunkten des Fundamental-Dreieckes fixirt wird. Das für die neuere Geometrie so wichtige Princip der reciproken Dualität, welches im englischen Originale nur im Capitel der geometrischen Methoden bei den reciproken Polaren Verwendung findet, erlangt hierdurch seine elementare Begründung. Zugleich ergeben sich hieraus wesentliche Erweiterungen des Capitels XIV, in welchem die beiden trimetrischen Coordinaten - Systeme zur Untersuchung der Kegelschnitte verwendet werden.

Das von der Methode des Unendlich - Kleinen handelnde Capitel XIII ist zur Hälfte im Original in dem von den geometrischen Methoden handelnden Schlussabschnitte enthalten. Die Bestimmung der Tangenten, die Quadratur der Parabel und Ellipse und die Theorie der Krümmungshalbmesser wird hier aus einfachen geometrischen Betrachtungen abgeleitet. Die in der deutschen Bearbeitung sich hieran lehnende Verwendung der Differential - und Integralrechnung zu denselben und verwandten Aufgaben steht zwar in loserem Zusammenhange mit dem übrigen Inhalte des Buches, findet aber in dem Bestreben des Bearbeiters, die Theorie der Kegelschnitte zu einem möglichst umfassenden Ganzen abzurunden, genügende Rechtfertigung; umsomehr, als auch das Original an anderer Stelle von den Methoden der höheren Analysis Gebrauch macht.

Die wesentlichsten Umformungen haben die beiden Schlusscapitel erlangt. In Capitel XV sind einige Abschnitte der neueren Algebra aufgenommen, deren vollständige Kenntniss bei den Studirenden der Mathematik, für welche das Buch hauptsächlich bestimmt ist, nicht allgemein vorausgesetzt werden konnte, nämlich die Grundzüge der Theorie der linearen Substitutionen und die zu ihrer Begründung nothwendige Theorie der Determinanten. Der an mehreren Stellen des Originals betonte Grundgedanke, dass alle wesentlichen Eigenschaften einer geometrischen Form aus solchen Verbindungen der in der Gleichung dieser Form vorhandenen Coefficienten abgeleitet werden müssen, welche unabhängig von der Veränderung des zu Grunde gelegten Coordinaten-Systems bleiben, ist mit diesen Hilfsmitteln in der Bearbeitung weiter verfolgt, als es im Originale möglich war. Auch treten hiermit solche gegenseitige Beziehungen zwischen Curven in den Vordergrund, welche durch die Wahl der Coordinaten-Achsen nicht gestört werden. Endlich erhält durch die Aufnahme dieser algebraischen Theile das von den geometrischen Methoden handelnde Capitel, welches im Originale nur in loser Verbindung zu dem übrigen Inhalte des Buches steht, einen organischen Zusammenhang mit dem analytisch-geometrischen Theile des Werkes. Grössere Zusätze in Capitel XVI, welche sich an das Vorhergehende naturgemäss anschliessen, begründen diesen Zusammenhang. Wichtig ist namentlich für die projectivischen Eigenschaften der Kegelschnitte die an ein Capitel des oben erwähnten „*Treatise*

21. *Note sur le développement en séries des coordonnées d'une planète.* **Bourget** *Compt. rend. L*, 319.
22. *Sur la détermination théorique du coefficient de l'équation séculaire de la lune.* **De Pontécoulant** *Compt rend. L*, 734.
23. Ueber die Gestalt des Mondes. **Gussew**. *Bull. Acad. Petersb. I*, 276.
24. Andeutungen über astronomische Beobachtungen bei totalen Sonnenfinsternissen. **Littrow**. Grun. Archiv XXXIV, 475.
25. Ueber Berichtigung des Aequatorials. **Steinheil**. Astr. Nachr. LII, 129.
Vergl. Geschichte der Mathematik 89, 90, 98, 99, 107.

Attraction.

26. *On the analytical theory of the attraction of solids bounded by surfaces of a class including the ellipsoid.* **Donkin**. *Phil. Mag. XIX*, 397.
27. Ueber ein Attractionsproblem. **Joachimsthal**. Crelle LVIII, 135.

B.

Bestimmte Integrale.

28. *De integralibus quibusdam definitis.* **Lindman**. Grun. Archiv XXXIV, 17.
•29. Ueber einige von ihren Bearbeitern für neu gehaltene bestimmte Integrale. **Lindman**. Grun. Archiv XXXIV, 118.
30. Ueber eine Zurückführung bestimmter Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ auf andere zwischen denselben Grenzen. **Zehfuss**. Grun. Archiv XXXIV, 486.
31. *Sur une faute dans les Exercises de Mathématiques par Cauchy. Seconde année* 1827 *p* 141 *sqq.* **Claussen**. *Bull. Acad Petersb I*, 145.
Vergl. Discontinuirliche Functionen, Elliptische Functionen, Functionen 67. Gammafunctionen, Productenfolge.

Binomialcoefficienten.

Vergl. Reihen 189.

Brennlinien.

32. *On a geometrical method of constructing caustic by reflection.* **Puller**. *Quart Journ. Math. III*, 312.
33. *On the conical refraction of a straight line.* **Clifton**. *Quart. Journ. Math. III*, 360.

C.

Combinatorik.

34. Coefficienten und independente Formeln zur Berechnung der combinatorischen Producte. **Wasmund**. Grun. Archiv XXXIV, 440.
35. Ueber die Entwickelung von $\cos(\Theta + \Theta_1 + .. + \Theta_{n-1})$, $\sin(\Theta + \Theta_1 + .. + \Theta_{n-1})$ und über einen damit verwandten Satz aus der Theorie der Zahlen. **Unferdinger**. Grun Archiv XXXIV, 72.
Vergl. Functionen 68.

Cubatur.

36. *Sur un certain volume de rotation.* **Françoise**. *N. ann. math. XIX*, 11. — **De la Brière**. *ibid.* 52. — **De Charodon**. *ibid.* 52, 188. — **Drouard**. *ibid.* 54. — **Hazan**. *ibid.* 158. — **Puech**. *ibid* 160.
37. Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. **Magener**. Grun. Archiv XXXIV, 450.
Vergl. Figurirte Zahlen.

D.

Determinanten.

38. *Sur un théorème de M. Sylvester relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre.* **De Sperling**. *Journ. Mathém. XXV*, 121.
39. *Valeur d'un déterminant.* **Brioschi et Cremona**. *N. ann. math. XIX*, 151.
40. *Valeur d'un déterminant.* **Bachr**. *N. ann. math. XIX*, 170.
41. *Valeur symbolique d'un déterminant.* *N. ann. math. XIX*, 181.
Vergl. Functionen 71, Geschichte der Mathematik 97, Homogene Functionen, Trägheitsmoment 203.

Bibliographie

vom 15. Februar bis 15. April 1861.

Periodische Schriften.

Archiv der Mathematik und Physik, von A. GRUNERT. 36. Thl. Greifswald, Koch. pro compl. 3 Thlr.

Mittheilungen der naturforschenden Gesellschaft in Bern. Aus dem Jahre 1860. Bern, Huber & Comp. in Comm. 1 Thlr.

Annuario marittimo per l'anno 1861, *compilato dal Lloyd austriaco.* 11 *Annata.* Triest, Direction des österreich. Lloyd. 1 Thlr. 2 Ngr.

Annales de l'observatoire impériale de Paris, publiées par U. LE VERRIER. *Tome* 13. *Paris, Mallet-Bachelier.*

Reine Mathematik.

DOERK, H. G. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. 1. Bd.: Arithmetik, 2. Bd.: Algebra. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 18 Ngr.

BOYMANN, J. R. Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien etc. 3. Thl.: Arithmetik. Cöln und Neuss, Schwann'sche Verlagshandlung. ¾ Thlr.

SAHLING, J. T. Geometrische Constructionsaufgaben. Kiel, Schröder & Comp. in Comm. 1½ Thlr.

FLIEDNER, C. Lehrbuch der ebenen Geometrie nebst Aufgabensammlung. Marburg, Elwert'sche Univers.-Buchhandl. ⅚ Thlr.

BECKER, F. W. Lehrbuch der Elementargeometrie. 2. Thl. 2. Abth.: Darstellende Geometrie. Oppenheim a. R., Kern. ⅓ Thlr.

BERKHAN, W. Die Anwendung der Geometrie auf Arithmetik und Algebra. Halle, Schmidt. 24 Ngr.

ZETZSCHE, K. E. Die Elemente der ebenen Trigonometrie. Altenburg, Pierer. 16 Ngr.

Angewandte Mathematik.

HEUSSI, J. Lehrbuch der Geodäsie. 1. Hälfte. Leipzig, Brockhaus. 1⅔ Thlr.

SCHMIDT, G. Die Gesetze und Kräfte der relativen Bewegung in der Ebene. Wien, Braumüller. 16 Ngr.

F.

Figurirte Zahlen.

63. *Sur la limite vers laquelle tend le rapport du vide au plein dans une pile de boulets, lorsque le nombre des boulets augmente indéfiniment.* Fleury. *N. ann. math. XIX*, 9.

Foucault'scher Pendelversuch.

64. Ueber die Richtungsänderung der Verticale Bacaloglo. Zeitschr. Math. Phys. V, 59.

Functionalgleichung.

65. *An optical theorem.* Tait. *Quart. Journ. Math. III*, 364.

Functionen.

66. *Fondamenti di una teorica generale delle funzioni di una variabile.* Riemann. *Annali mat II*, 337.
67. *Sur le développement des fonctions à une seule variable.* Tchebychef. *Bull. Acad. Petersb. I*, 193.
68. *Sur le nombre de valeurs que peut acquérir une fonction.* Mathieu. *Journ. Mathém. XXV*, 9. [Vergl. Bd. V, No. 63.]
69. Wiederholung, Interpolation und Inversion einer Function unter gemeinschaftlicher Form. Hoppe. Zeitschr. Math. Phys. V, 136.
70. Ueber ein gewisses mathematisches Princip. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. V, 210.
71. *On some symmetric functions of the roots of algebraic equations.* M. Roberts. *Quart. Journ. Math. IV*, 57.
72. $1.2.3\ldots n > (\sqrt{n})^n$. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. V, 228.
73. Neuer Vorschlag zur Aufsuchung des Luftwiderstandsgesetzes. Brenner. Grun. Archiv XXXIV, 274.

Vergl. Sturm's Functionen.

G.

Gammafunction.

74. *Sur la formule de Stirling.* Ossian Bonnet. *Compt. rend. L*, 862.

Geodäsie.

75. *Sur l'influence des attractions locales dans les opérations géodésiques et particulièrement dans l'arc Scandinavo-Russe.* De Schubert. Astr. Nachr. LII, 321.
76. Der Distanzmesser des Genie-Oberlieutenants Biagio de Benedictis in Neapel. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. V, 225.
77. Allgemeine Bestimmung der Länge von Nonien an Maassstäben. Matzka. Grun. Archiv XXXIV, 334.

Geodätische Linie.

78. *Sur une forme de l'équation de la ligne géodésique ellipsoïdale et de ses usages pour trouver les propriétés communes aux lignes ellipsoïdales et à des courbes planes correspondantes.* Aoust. *Compt. rend. L*, 484.

Geometrie (descriptive).

79. Eine Ebene zu legen, welche die in einem gegebenen Kegel zweiten Grades einer gegebenen Geraden parallel gezogene Gerade halbirt. Bacaloglo. Zeitschr. Math. Phys. V, 59.
80. *Sur une question de géométrie descriptive.* Gros. *N. ann. math. XIX*, 29.

Geometrie (höhere).

81. Ueber die Erzeugung geometrischer Curven. Haertenberger. Crelle LVIII, 54.
82. *Sur quelques propriétés des lignes gauches de troisième ordre et classe.* Cremona. Crelle LVIII, 138
83. *Théorèmes de géométrie segmentaire* Hermes. *N. ann. math. XIX*, 26.
84. *Homographie.* Poudra. *N. ann. math. XIX*, 108.
85. *Application de la transformation par rayons vecteurs réciproques à l'étude de la surface enveloppe d'une sphère tangente à trois sphères données.* Mannheim. *N. ann. math. XIX*, 67.
86. *Propositions segmentaires sur la parabole l'hyperbole équilatère et propriété du cercle principal de l'ellipse.* Lescaze. N. ann. math. XIX, 225.

Mathematisches Abhandlungsregister.

1860.

Erste Hälfte: 1. Januar bis 30. Juni.

A.

Aerodynamik.

1. Zur Theorie der Gase. Jochmann. Zeitschr. Math. Phys. V, 24, 96.
2. *Illustrations of the dynamical theory of gases.* *Maxwell.* *Phil. Mag.* *XIX*, 19. — *Clausius ibid.* 434.
   Vergl. Functionen 73.

Analytische Geometrie der Ebene.

3. *Transformation des propriétés des figures.* *Faure.* *N. ann. math. XIX*, 189. [Vergl. Bd. V, No. 256.]
4. *Mémoire sur les polaires inclinées.* *Dewulf.* *N. ann. math. XIX*, 175. [Vergl. Bd. V, No. 252.]
5. *On a subject connected to tangential coordinates.* *Taït.* *Quart. Journ. Math. III*, 365.
6. Zur Theorie paralleler Curven. Cantor. Zeitschr. Math. Phys. V, 219.
7. Ueber Fusspunktlinien. Wetzig. Zeitschr. Math. Phys. V, 1, 81. [Vergl. Bd. IV, 319.]
8. *Le lieu des pieds des perpendiculaires abaissées du centre d'une circonférence sur les tangentes à la développante de cette circonférence est une spirale d'Archimède.* *Laquière.* *N. ann. math. XIX*, 186.
9. *Sur les courbes à plusieurs points d'arrêt.* *Laurent.* *N. ann. math. XIX*, 210.
10. *Courbe logocyclique.* *Booth.* *N. ann. math. XIX*, 28.
11. *On a geometrical theorem of Mr. Steiner.* *Ferrers.* *Quart. Journ. Math. IV*, 92.
12. *Sur une courbe du troisième ordre.* *Mention.* *Bull. Acad. Petersb. I*, 233.
13. *Lieu géométrique.* *Lenglier.* *N. ann. math. XIX*, 123.
    Vergl. Brennlinien 32, Doppeltangenten, Ellipse, Epicycloiden, Hyperbel, Kegelschnitte, Mechanik 163.

Analytische Geometrie des Raumes.

14. Ueber krummlinige Coordinaten. Böklen. Grun. Archiv XXXIV, 26, 308.
15. *Mémoire sur l'emploi d'un nouveau système de variables dans l'étude des propriétés des surfaces courbes.* *Ossian Bonnet.* *Journ. Mathém. XXV*, 153.
16. Ueber die Wendungsberührebenen der Raumcurven. Bischoff. Crelle LVIII, 179.
17. Einige neue Sätze über Fusspunktflächen. Bacaloglo. Zeitschr. Math. Phys. V, 67.
18. Elementarer Beweis des Völler'schen Satzes und Uebertragung desselben auf räumliche Verhältnisse. Matthiessen. Zeitschr. Math. Phys. V, 146. [Vergl. Bd. IV, 366.]
19. *Note sur quelques courbes à double courbure.* *Aelt.* *N. ann. math. XIX*, 100.
    Vergl. Geodätische Linien, Isotherme Linien, Krystallographie 148.

Astronomie.

20. *Sur le développement en séries des coordonnées d'une planète et de la fonction perturbatrice.* *Puiseux.* *Compt. rend. L*, 111, 151, 365, 490. — *Journ. Mathém. XXV*, 65, 105.

21. *Note sur le développement en séries des coordonnées d'une planète.* **Bourget** Compt. rend. L, 319.
22. *Sur la détermination théorique du coefficient de l'équation séculaire de la lune.* **De Pontécoulant** Compt rend. L, 734.
23. Ueber die Gestalt des Mondes. **Gussew.** Bull. Acad. Petersb. I, 276.
24. Andeutungen über astronomische Beobachtungen bei totalen Sonnenfinsternissen. **Littrow.** Grun. Archiv XXXIV, 475.
25. Ueber Berichtigung des Aequatorials. **Steinheil.** Astr. Nachr. LII, 129.
Vergl. Geschichte der Mathematik 89, 90, 98, 99, 107.

Attraction.

26. *On the analytical theory of the attraction of solids bounded by surfaces of a class including the ellipsoid.* **Donkin.** Phil. Mag. XIX, 397.
27. Ueber ein Attractionsproblem. **Joachimsthal.** Crelle LVIII, 135.

B.

Bestimmte Integrale.

28. *De integralibus quibusdam definitis.* **Lindman.** Grun. Archiv XXXIV, 17.
29. Ueber einige von ihren Bearbeitern für neu gehaltene bestimmte Integrale. **Lindman.** Grun. Archiv XXXIV, 118.
30. Ueber eine Zurückführung bestimmter Integrale zwischen den Grenzen 0 und ∞ auf andere zwischen denselben Grenzen. **Zehfuss.** Grun. Archiv XXXIV, 486.
31. *Sur une faute dans les Exercices de Mathématiques par Cauchy. Seconde année 1827 p 141 sqq.* **Claussen.** Bull. Acad Petersb I, 145.
Vergl. Discontinuirliche Functionen, Elliptische Functionen, Functionen 67. Gammafunctionen, Productenfolge.

Binomialcoefficienten.

Vergl. Reihen 189.

Brennlinien.

32. *On a geometrical method of constructing caustic by reflection.* **Puller.** Quart. Journ. Math. III, 312.
33. *On the conical refraction of a straight line.* **Clifton.** Quart. Journ. Math. III, 360.

C.

Combinatorik.

34. Coefficienten und independente Formeln zur Berechnung der combinatorischen Producte. **Wasmund.** Grun. Archiv XXXIV, 440.
35. Ueber die Entwickelung von $\cos(\theta+\theta_1+..+\theta_{n-1})$, $\sin(\theta+\theta_1+..+\theta_{n-1})$ und über einen damit verwandten Satz aus der Theorie der Zahlen. **Unferdinger.** Grun Archiv XXXIV, 72.
Vergl. Functionen 68.

Cubatur.

36. *Sur un certain volume de rotation.* **Françoise.** N. ann. math. XIX, 11. — **De la Brière.** ibid. 52. — **De Charodon.** ibid. 52, 188. — **Drouard.** ibid. 54. — **Hazan.** ibid. 158. — **Puech.** ibid 160.
37. Cubatur des Fusspunktenkörpers eines Ellipsoides. **Magener.** Grun. Archiv XXXIV, 450.
Vergl. Figurirte Zahlen.

D.

Determinanten.

38. *Sur un théorème de M. Sylvester relatif à la transformation du produit de déterminants du même ordre.* **De Sperling.** Journ. Mathém. XXV, 121.
39. *Valeur d'un déterminant.* **Brioschi et Cremona.** N. ann. math. XIX, 151.
40. *Valeur d'un déterminant.* **Baehr.** N. ann. math. XIX, 170.
41. *Valeur symbolique d'un déterminant.* N. ann. math. XIX, 181.
Vergl. Functionen 71, Geschichte der Mathematik 97, Homogene Functionen, Trägheitsmoment 203.

140. Ueber eine neue Eigenschaft der Steiner'schen Gegenpunkte des Pascal'schen Sechsecks. Grossmann. Crelle LVIII, 174.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 12, Ellipse, Geometrie (höhere) 86, Hyperbel, Kreis, Oberflächen zweiten Grades 171, 172, Sphärik 194, 195, Verwandtschaft 209.

Kettenbrüche.

141. Ueber Zähler und Nenner der Näherungswerthe von Kettenbrüchen. Christoffel. Crelle LVIII, 90. [Vergl. Bd. V, No. 373.]
Vergl. Functionen 67.

Kreis.

142. *Sur l'enveloppe du cercle circonscrit à un triangle variable.* Bellavitis *N. ann. math. XIX*, 115.
143. *Propriétés d'un point de la circonférence d'un cercle et d'un point du diamètre.* Kessler. *N. ann. math. XIX*, 162.
144. Die gemeinschaftliche Tangente zweier Kreise zu suchen. Stammer. Grun. Archiv XXXIV, 484.

Krümmungskreis.

145. *Théorème sur les courbures des lignes.* Boeklen. *N. ann. math. XIX*, 136.
146. *Sur la courbure des surfaces.* Ostrogradski. *Bull. Acad. Petersb. I*, 345.
147. *On the curvature of a plane curve at a double point, and on the curvature of surfaces.* Cayley. *Quart. Journ. Math. III*, 322.
Vergl. Oberflächen zweiten Grades 171.

Krystallographie.

148. Die allgemeinsten Gesetze der Krystallographie, gegründet auf eine von neuen Gesichtspunkten ausgehende Theorie der geraden Linie im Raume und der Ebene für beliebige schief- oder rechtwinklige Coordinatensysteme. Grunert. Grun. Archiv XXXIV, 121.
149. *Crystallographic notices.* W. H. Miller. *Phil. Mag. XIX*, 325.

L.

Logarithmen.

150. *Logarithmes des 40 premiers nombres de Bernoulli.* Thoman. *Compt. rend. L*, 905.
151. Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln. Grun. Archiv XXXIV, 368.
Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 10, Geschichte der Mathematik 94.

M.

Maxima und Minima.

152. Aufgaben über Maxima und Minima. Strehlke. Grun. Archiv XXXIV, 115.
153. *Sur un maximum arithmologique.* Derbès. *N. ann. math. XIX*, 117.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 19, Geschichte der Mathematik 92.

Mechanik.

154. *Sur la proposition relative au transport des couples.* Tessan. *Compt rend. L*, 717. — Duhamel. *ibid.* 740.
155. *Sur la rotation des corps pesants.* Tournaire. *Compt. rend L*, 476.
156. *Observations sur les formules de Lagrange relatives au mouvement du boulet dans l'intérieur du canon.* Piobert. *Compt. rend. L*, 255, 335.
157. Ueber die Festigkeit einer am Rande aufgelötheten kreisförmigen Platte. Zehfuss. Zeitschr. Math. Phys. V, 14.
158. *Sur la loi des petites oscillations du pendule simple dans un milieu résistant.* Resal. *N. ann. math. XIX*, 165.
159 *A theory of molecular forces.* Challis. *Phil. Mag. XIX*, 88.
160. *Sur la loi de dilatation de corps.* Tessan. *Compt. rend. L*, 20.
161. *Notes on rigid dynamics.* Slesser. *Quart. Journ. Math. IV*, 65.
162. *Note sur la double réfraction.* D'Estocquois. *Compt. rend. L*, 992.
163. Die logarithmische Linie als Curve der rückwirkenden Festigkeit nachgewiesen im Anlauf des Pfeilers, der Säule und des Pyramidalkörpers mit quadratischem Querschnitt. Stokar. Grun. Archiv XXXIV, 431.
Vergl. Aerodynamik, Attraction, Elasticität, Elektrodynamik, Foucault'scher Pendelversuch, Geschichte der Mathematik 100, Hydrodynamik, Oberflächen 165, 166, Trägheitsmoment.

O.

Oberflächen.

164. Zur Theorie der algebraischen Flächen. Clebsch. Crelle LVIII, 93.
165. *The equilibrium of a flexible but inextensible and inelastic surface.* Besant. *Quart. Journ. Math. IV,* 18.
166. *The equilibrium of a bent lamina.* Besant. *Quart. Journ. Math. IV,* 12.
    Vergl. Attraction 26, Differentialgleichungen, Krümmungskreis 146.

Oberflächen zweiter Ordnung.

167. *Résumé d'une théorie des surfaces du second ordre homofocales.* Chasles. *Compt. rend. L,* 1055, 1110.
168. *Sur la théorie des plans diamétraux dans les surfaces du second ordre.* Abel Transon. *N. ann. math. XIX,* 182.
169. *Surfaces de révolution du second degré.* Housel. *Journ. Mathém. XXV,* 129.
170. Ueber einige merkwürdige Beziehungen, in denen die Flächen zweiter Ordnung zu einander stehen. Schönherr. Zeitschr. Math. Phys. V, 153.
171. *Cercles osculateurs et surfaces osculatrices dans les lignes et surfaces du deuxième ordre.* Ducoroy. *N. ann. math. XIX,* 118.
172. Bemerkungen über Curven und Flächen zweiten Grades. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. V, 69.
173. *De la surface du second ordre circonscrite a un tétraèdre.* Crémona. *N. ann. math. XIX,* 149.
    Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 14, Cubatur 37, Paraboloid.

Operationscalcül.

174. *On the laws of Operation and the systematization of mathematics.* Ellis. *Ph. Mag. XIX,* 221.
175. *On a development in the calculus of operations.* S. Roberts. *Quart. Journ. Math. IV,* 44.
176. *Note on a theorem in the calculus of operations.* S. Roberts. *Quart. Journ. Math. III,* 310.
177. *On a theorem in the calculus of operations.* Walton *Quart. Journ. Math. III,* 314.
    Vergl. Differentialquotient 46.

P.

Paraboloid.

178. *Des coordonnées paraboliques et de leur application à la géométrie des paraboloïdes.* Valson. *Compt. rend. L,* 680.

Perspective.

179. *Deux figures étant en perspective, si leurs plans tournent autour de leur commune intersection, il faut, pour que ces figures restent en perspèctive que l'oeil change de position; les perpendiculaires abaissées chaque fois du point le vue sur ces plans restent dans un rapport constant.* Carénou et Laquière. *N. ann. math. XIX,* 97.

Planimetrie.

180. *Problème de géométrie du compas.* Delisle *N. ann. math. XIX,* 35.
181. Ueber einige interessante Punkte des Dreiecks. Nagel. Grun. Archiv XXXIV, 359.
182. *Théorème sur trois droites passant par un même point.* Kessler et Lemoine. *N. ann. math. XIX,* 91.
183. Ueber Gouzy's Methode zur Bestimmung der mittleren Proportionallinie. Grun. Archiv XXXIV, 364.
184. Geometrische Aufgaben durch Berechnung gelöst. Heller. Grun. Archiv XXXIV, 6.
    Vergl. Trisection des Winkels 206.

Potential.

Vergl. Attraction, Elektrodynamik 54, 55.

Produktenfolge.

185. *Sur l'évaluation approchée du produit* 1.2.3...x *lorsque* x *est un très grand nombre et sur la formule de Stirling.* J. A. Serret. *Compt. rend. L,* 662.
    Vergl. Zahlentheorie 221, 222.

Q.

Quadratur.

Vergl. Geschichte der Mathematik 95, Sphärik 193, Stereometrie, Verwandtschaft 210.

Quadratische Reste.

Vergl. Zahlentheorie 219.

R.

Reihen.

186. Ueber unendliche Reihen mit verschwindenden Gliedern aber nicht verschwindender Reihensumme. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. V, 132.
187. Summation zweier unendlicher Reihen auf elementarem Wege. Bode. Grun. Archiv XXXIV, 397.
188. *Sur la série du problème de Fuss. Mention. Bull. Acad. Petersb. I*, 507. [Vergl. Bd. V, No 461.]
189. *Théorème sur le binome de Newton pour l'exposant entier et positif. Garcet. N. ann. math. XIX*, 32.
190. *On some numerical expansions. Cayley. Quart. Journ. Math. III*, 366.
191. $\frac{1}{1.2.3\ldots n}+\frac{1}{2.3\ldots(n+1)}+\frac{1}{3.4\ldots(n+2)}+\ldots=\frac{1}{(n-1)1.2\ldots(n-1)}$. *Kessler et Lemoine. N. ann. math. XIX*, 34. [Vergl. Bd. V, No. 445.]

Vergl. Astronomie 20, 21, Functionen 67, Productenfolge, Zahlentheorie 213.

S.

Sphärik.

192. *Formules de trigonométrie sphérique. Bretschneider. N. ann. math. XIX*, 22.
193. Die Fläche des sphärischen Vierecks. König. Grun. Archiv XXXIV, 12, 355.
194. *Résumé d'une théorie des coniques sphériques homofocales. Chasles. Compt. rend. L*, 623.
195. *Propriétés des coniques sphériques homofocales. Vannson. N. ann. math. XIX*, 197.

Vergl. Astronomie 23.

Stereometrie.

196. Neue Sätze über das rechtwinklige Parallelepiped. Mann. Grun. Archiv XXXIV, 116.
197. Lehrsatz über den Flächeninhalt eines geraden Cylindermantels, welcher von einem anderen senkrecht geschnitten wird. Lommel. Grun. Archiv XXXIV, 286.

Vergl. Cubatur 36, Figurirte Zahlen, Geschichte der Mathematik 93, Tetraedrometrie.

Sturm's Functionen.

198. *Discussion of the Sturmian constants for cubic and quartic equations. Cayley. Quart. Journ. Matth. IV*, 7.

T.

Tabellen.

199. *Tables pour faciliter le calcul des hauteurs correspondantes. Radan.* Astr. Nachr. LII, 161.

Vergl. Logarithmen.

Tetraedrometrie.

200. Beiträge zur Tetraedrometrie. Junghan. Grun. Archiv XXXIV, 369.
201. Differentialformeln der Tetraedrometrie. J. H. T. Müller. Zeitschr. Math. Phys. V, 49.
202. *Théorème de M. de Staudt sur le tétraèdre. Gentil. N. ann. math. XIX*, 218. [Vergl. Bd. V, No. 450.]

Trägheitsmoment.

203. *On the demonstration of a theorem relating to the moments of inertia of a solid body. Cayley. Quart Journ. Math. IV*, 25.
204. Bestimmung der Trägheitsmomente, namentlich für schiefe Prismem und Pyramiden. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. V, 164.

Trigonometrie.

205. Ueber einige bei trigonometrischen Messungen vorkommende Aufgaben. Winckler. Zeitschr. Math. Phys. V, 139.

Vergl. Reihen 188, Tetraedrometrie.

Trisection des Winkels.

206. Einiges über Trisection des Winkels. Walter. Grun. Archiv XXXIV, 295.
207. *On a new instrument for the mechanical trisection of an angle and on the multisection of an angle. Tate. Phil. Mag. XIX*, 261.

V.

Variationsrechnung.

208. *Nouvelle démonstration d'un théorème fondamental du calcul des variations.* Lindeloef. *Compt. rend. L*, 85.

Verwandtschaft.

209. Einige Eigenschaften der Kegelschnitte. Wetzig. Zeitschr. Math. Phys. V, 63.
210. Construction flächengleicher Figuren. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. V, 56.

Z.

Zahlentheorie.

211. *Sur le nombre des solutions entières d'une équation indéterminée du premier degré.* Sylvester. *Compt. rend. L*, 367.
212. *Sur la fonction* E(x). Sylvester. *Compt. rend. L*, 732.
213. *Sur certaines séries qui se présentent dans la théorie des nombres.* Sylvester. *Compt. rend. L*, 650.
214. *Sur quelques formules générales qui peuvent être utiles dans la théorie des nombres.* Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 1.
215. *Note à l'occasion d'un théorème de M. Kronecker.* Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 127.
216. *Sur le nombre de nombres premiers d'une classe déterminée compris entre deux limites finies données.* Polignac. *Compt. rend. L*, 575.
217. *Note on complex integers.* Lunavicensis. *Quart. Journ. Math. IV*, 94.
218. Ueber das arithmetisch-geometrische Mittel. Borchardt. Crelle LVIII, 127.
219. *Sur la théorie des résidus quadratiques.* Sylvester. *Compt. rend. L*, 489.
220. Tafeln der Zerfällung aller Primzahlen innerhalb des ersten Tausend in ihre aus eilften und aus dreizehnten Wurzeln der Einheit gebildeten primären complexen Primfactoren. Reuschle. Ber. Berl. Acad. 1860, 190.
221. *Le produit de cinq ou de six nombres entiers consécutifs ne peut être un carré.* Gérono. *N. ann. math.* 38. — Lebesgue. *ibid.* 112, 135.
222. *Sur quelques produits dont le facteurs sont en progression arithmétique.* Guibert. *N. ann. math. XIX*, 213.
223. Ueber Zahlen, die sich in die Summe zweier Quadrate zerlegen lassen. Unferdinger. Grun. Archiv XXXIV, 363.
224. *Théorème concernant la fonction numérique relative au nombre des représentations d'un entier sous la forme d'une somme de trois carrés.* Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 141.
225. *Nombre des représentations du double d'un entier impair sous la forme d'une somme de douze carrés.* Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 143.
226. *Sur la forme* $x^2+y^2+3(z^2+t^2)$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 147.
227. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+11$. Liouville *Journ. Mathém. XXV*, 139.
228. *Sur le double d'un nombre premier* $4\mu+1$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 119.
229. *Théorème concernant le double d'un nombre premier contenu dans l'une ou l'autre des deux formes linéaires* $16k+7$, $16k+11$. Liouville. *Journ. Math. XXV*, 103.

Vergl. Combinatorik 35, Elliptische Functionen 60, Maxima und Minima 153.

Zinsrechnung.

230. Beurtheilung der bisjetzt üblichen Auflösungen der Aufgaben über Verlegung der Zahlungstermine, mittleren Zahlungstermine und Geschäftsrechnungen. Schlechter. Zeitschr. Math. Phys. V, 215.
231. Ueber mittlere Zahlungstermine mit einfachen Zinsen. Schlechter. Grun. Archiv XXXIV, 291.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Lehrbuch der ebenen Trigonometrie zum Gebrauche an höheren Lehranstalten und beim Selbststudium. Von Dr. CARL SPITZ, Lehrer am Polytechnicum in Karlsruhe. Leipzig und Heidelberg, C. F. Winter'sche Verlagshandlung. 1850. 8. S. 83.

Das vorliegende Lehrbuch schliesst sich den Lehrbüchern der ebenen Geometrie und Stereometrie desselben Verfassers an und ist wie diese zum Schulgebrauche, insbesondere auch deswegen zu empfehlen, weil es eine grössere Anzahl recht gut gewählter Uebungsaufgaben enthält. Die Resultate und Andeutungen zur Auflösung dieser Aufgaben sind in einem Anhange zum Lehrbuche besonders abgedruckt. Was nun das Buch selbst betrifft, so unterscheidet es sich nicht wesentlich von schon vorhandenen Schulbüchern über denselben Gegenstand, und hat z. B. mit dem bekannten Lehrbuch der ebenen Trigonometrie von Wiegand eine nicht zu verkennende Familienähnlichkeit. Wir würden aus diesem Grunde uns mit Besprechung des vorliegenden Buches kurz fassen können, wenn sich uns beim Durchlesen desselben nicht eine Bemerkung aufdrängte, welche die Behandlung betrifft, die der Goniometrie noch sehr häufig zu Theil wird. Die Goniometrie fängt meistens mit der Bemerkung an, dass in einem rechtwinkligen Dreiecke die Winkel schon durch die Quotienten zweier Seiten bestimmt sind. Dieser Gedanke, so nahe er liegt, eignet sich aber in dieser Fassung weniger zu einem Princip, als er zunächst nur auf Functionen spitzer Winkel führt. Zu einem weit fruchtbareren Gedanken, durch welchen die Lehre von den Winkelfunctionen nicht nur an Kürze und Klarheit gewinnt, sondern durch welchen gleich vom Anfang an die grösste Allgemeinheit in die Betrachtung eingeführt ist, gelangt man aber auf folgende Weise. Die Einsicht, dass die Beziehungen zwischen den Seiten und Winkeln eines Dreiecks nicht einfacher Natur sind, sobald man die Winkel durch Kreisbögen bestimmt, führt zu der Frage, ob Winkel nicht noch eine andere Bestimmung zulassen. Nun ist aber die Richtung von einem Punkte O zu einem anderen Punkte P nicht blos durch den Winkel

oder die Drehungsgrösse φ bestimmt, welchen OP mit einer anderen festen Richtung OX macht, sondern offenbar auch durch die Angabe der rechtwinkligen Coordinaten x und y des Punktes P in Bezug auf ein Coordinatensystem, dessen Abscissenachse OX ist. Da aber die Richtung von O nach P von der Länge $OP = r$ unabhängig ist, so genügt zur Bestimmung der Richtung von OP schon die Kenntniss je zweier der drei Verhältnisse

$$\frac{x}{r}, \; \frac{y}{r} \text{ und } \frac{y}{x}.$$

Verbindet man hiermit — die Lagenbestimmung eines Punktes P durch seine Coordinaten x und y als bekannt vorausgesetzt, — die Betrachtung, dass der Winkel als Drehungsgrösse vieldeutig ist und die Drehung in zweifachem Sinne genommen werden kann, so gewinnt dadurch die Theorie der Verhältnisse

$$\frac{x}{r}, \; \frac{y}{r}, \; \frac{y}{x}$$

und ihrer umgekehrten Werthe

$$\frac{r}{x}, \; \frac{r}{y}, \; \frac{x}{y}$$

eine Grundlage von der grössten Allgemeinheit. Stellt man ausserdem die genannten Functionen durch die ihnen proportionalen goniometrischen Linien dar, was für alle Fälle in einer einzigen Figur geschehen kann, so bleibt für die Anschaulichkeit der Werth- und Zeichenänderung der goniometrischen Functionen beliebiger Winkel nichts zu wünschen übrig.

Die reciproken Werthe des Cosinus und Sinus, d. h. die Secante und Cosecante bei Seite zu lassen, wie es der Herr Verfasser des vorliegenden Buches gethan hat, halten wir nicht für gerathen, da sie bei Transformationen oft grossen Nutzen gewähren und die Gruppe von Gleichungen

$$\begin{aligned} &\cos\varphi \sec\varphi = 1, && \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1, \\ &\sin\varphi \operatorname{cosec}\varphi = 1, && \sec\varphi^2 - \operatorname{tang}\varphi^2 = 1, \\ &\operatorname{tang}\varphi \operatorname{cotang}\varphi = 1, && \operatorname{cosec}\varphi^2 - \operatorname{cotang}\varphi^2 = 1, \end{aligned}$$

sich dem Gedächtnisse leicht einprägen.

Was die weitere Entwickelung der Lehre von den Winkelfunctionen betrifft, so ist es zunächst gleichgiltig, welche Formel man zu Grunde legt, sobald nur die allgemeine Giltigkeit derselben sich leicht darthun lässt. Verwerflich, weil unelegant und ermüdend, bleibt immer die Nachweisung der allgemeinen Giltigkeit einer Formel durch Einzelbeweise. Zudem giebt es Beweise der allgemeinen Giltigkeit der goniometrischen Grundformeln, denen man wahrhaftig den elementaren Charakter nicht absprechen kann. Sind z. B. OP_1 und OP_2 zwei Richtungen und die Winkel derselben, in ihrer Allgemeinheit aufgefasst, mit der festen Richtung OX, φ_1 und φ_2, so ist $\varphi_1 - \varphi_2$ immer einer der Winkel, den OP_2 mit OP_1 einschliesst oder um den sich OP_1 drehen muss, um mit OP_2 zusammenzufallen. Bezeichnet man nun die Längen von OP_1, OP_2 und P_1P_2 mit r_1, r_2 und d, die recht-

winkligen Coordinaten von P_1 und P_2 in Bezug auf OX als Abscissenachse mit x_1, y_1 und x_2, y_2, so hat man für d^2 die zwei Ausdrücke

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$$

und

$$d^2 = r_1^2 + 2 r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2),$$

die weiter nichts sind, als bekannte Sätze der Planimetrie, nur unter anderer Form. Setzt man diese Ausdrücke einander gleich und verbindet damit die Beziehungen

$$x_1^2 + y_1^2 = r_1^2, \quad x_2^2 + y_2^2 = r_2^2,$$

so findet man

$$r_1 r_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

und hieraus

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{x_1}{r_1} \cdot \frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1} \cdot \frac{y_2}{r_2},$$

welche Gleichung unmittelbar zu der Formel

$$\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \sin\varphi_1 \sin\varphi_2$$

führt. Drückt man den Inhalt des Dreiecks OP_1P_2 einmal durch die rechtwinkligen, das andere Mal durch die Polarcoordinaten der Punkte P_1 und P_2 aus, so gelangt man mit gleicher Leichtigkeit zu der Formel

$$\sin(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin\varphi_1 \cos\varphi_2 - \cos\varphi_1 \sin\varphi_2.$$

Noch mehr als die beiden genannten Formeln dürfte sich die Formel für $\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2$ als Grundformel empfehlen, da sie ausser der Definition des Cosinus nur die Kenntniss einiger einfachen Sätze über die Lage von Punkten in einer Geraden oder im Umfange eines Kreises voraussetzt, Sätze, deren Erwähnung nicht umgangen werden kann, wenn die geometrische Bedeutung der positiven und negativen Grössen in helles Licht gesetzt werden soll. Die Goniometrie ist schliesslich nichts weiter, als die Theorie des algebraischen Ausdrucks einer oder mehrerer Richtungen, und man sollte sich daran gewöhnen, sie unter diesem Gesichtspunkte aufzufassen.

In dem §. von der Umformung unlogarithmischer Ausdrücke in logarithmische wäre folgende Bemerkung, die auch sonst ihren Nutzen hat, am Platze gewesen. Bei den genannten Umformungen kommt es in letzter Instanz darauf hinaus, ein zweigliedriges Aggregat $x + y$ in ein Product zu verwandeln. Von zwei beliebigen Grössen x und y lässt sich aber die eine proportional einem Cosinus, die andere proportional einem Sinus setzen, oder man hat immer die beiden Gleichungen

$$x = r \cos\varphi, \quad y = r \sin\varphi,$$

welche r und φ unzweideutig bestimmen. Hierdurch ist ein allgemeines Verfahren angedeutet, Hilfswinkel in die Rechnung einzuführen.

Was den zweiten Abschnitt des vorliegenden Buches, der die ebene Trigonometrie behandelt, betrifft, so finden wir hier an der Stelle eines einfachen Gedankenganges eine Zersplitterung in eine Menge einzelner Sätze. Fasst man die Aufgabe der Trigonometrie erst allgemeiner und

sucht zunächst nur Beziehungen zwischen Winkeln und Seiten eines Dreiecks auf, so findet man diese offenbar am leichtesten, wenn man von der Relation

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

ausgeht und unter Anwendung der arithmetischen Sätze:

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{a + a' + a'' + \ldots}{b + b' + b'' + \ldots},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \frac{a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \ldots}{b\alpha + b'\alpha' + b''\alpha'' + \ldots},$$

$$\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'} = \frac{a''}{b''} = \ldots = \pm\sqrt{\frac{a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots}{b^2 + b'^2 + b''^2 + \ldots}}$$

andere Relationen daraus ableitet. Geht man dann zur speciellen Aufgabe der Trigonometrie über, so erscheint hier als erste Forderung die Zusammenstellung von Gleichungen zwischen je vier Stücken. Auf diese Zusammenstellung können dann die einzelnen Aufgaben folgen und die zweckmässigsten Formeln zur Berechnung der gesuchten Stücke gegeben werden. Unter den trigonometrischen Formeln hätten die beiden

$$c \sin \tfrac{1}{2}(A - B) = (a - b) \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$c \cos \tfrac{1}{2}(A - B) = (a + b) \sin \tfrac{1}{2} C$$

wohl nicht fehlen sollen, auf welche Mollweide zuerst mit Recht aufmerksam gemacht hat. Auch bei der Berechnung der drei Winkel aus den drei Seiten hätten sonst schon bekannte Formeln gegeben werden können. Bezeichnet man nämlich den halben Umfang des Dreiecks mit s und setzt

$$\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s} = q^2,$$

so erhält man

$$\tan \tfrac{1}{2} A = \frac{q}{s-a}, \quad \tan \tfrac{1}{2} B = \frac{q}{s-b}, \quad \tan \tfrac{1}{2} C = \frac{q}{s-c}$$

und für den Inhalt

$$\Delta = sq.$$

Wir schliessen die Besprechung des vorliegenden Lehrbuches der ebenen Trigonometrie mit der Bemerkung, dass wir es zur ersten Einführung in die Wissenschaft im Ganzen für zweckmässig und nützlich halten. Die Ausstattung des Buches ist recht nett; nur sind uns leider in den Resultaten eine nicht geringe Anzahl Druckfehler aufgestossen, was bei der Benutzung derselben zur Vorsicht mahnen mag.

Dresden. Dr. Rudolf Hoffmann.

Lehrbuch der algebraischen Analysis. Von M. A. Stern. Leipzig und Heidelberg, Winter'sche Verlagshandlung. 1860.

Der Charakter des vorliegenden Werkes lässt sich mit den zwei Wor-

ten bezeichnen: *Thibaut redivivus*. In der That fängt die Uebereinstimmung des Verfassers mit seinem Vorgänger bereits auf Seite 5 an, wo die Rechnung mit Ausdrücken von der Form

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + \ldots$$

als das Geschäft der algebraischen Analysis bezeichnet wird. Bei Thibaut liess sich das allenfalls hören und es findet sich auch in dessen Allgemeiner Arithmetik nichts weiter; wie aber der Verfasser periodische Reihen, unendliche Producte und Kettenbrüche (Cap. 10, 11 und 12) mit seiner Definition vereinigen will, ist nicht wohl einzusehen. Referent zweifelt überhaupt an der ganzen wissenschaftlichen Berechtigung der sogenannten algebraischen Analysis*) und glaubt darin auch den Grund zu sehen, warum eine stichhaltige Definition dieses Theiles der Mathematik ihre Schwierigkeiten hat; findet man es aber hier wie in anderen Gebieten des Wissens nicht unpassend, eine Parzelle auszusondern und diese mit besonderem Fleisse zu cultiviren, so darf man wohl sagen, „die algebraische Analysis ist die elementare Theorie der sogenannten einfachen Functionen" (x^a, a^x, $\log x$, $\cos x$, $\sin x$, etc., $\arcsin x$, $\operatorname{arctang} x$, etc.). Diese Definition hat auch noch den Vortheil, dass sie nicht die zufälligen Mittel der Bearbeitung oder die Form, in welcher das Resultat erscheint (wie z. B. $a + bx + cx^2 +$ etc.), sondern ein ganz bestimmtes Object als Eintheilungsgrund benutzt.

Bei dem Rechnen mit der Form $a + bx + cx^2 +$ etc. ist dem Verfasser die Schwierigkeit nicht entgangen, welche aus der etwaigen Divergenz der Reihe entspringt; über diesen Knoten kommt der Verfasser auf eine seltsame Weise hinweg, wozu vielleicht Referent die unschuldige Veranlassung gegeben hat. Vor längerer Zeit, als es noch Leute gab, welche die analytische Summe (erzeugende Function) einer Reihe von deren arithmetischer Summe unterscheiden wollten, machte Referent (in Grunert's Archiv) den gewiss plausiblen Vorschlag, jene esoterische und exoterische Bedeutung der Reihen durch verschiedene Zeichen aus einander zu halten; der Verfasser scheint sich dies gemerkt zu haben, denn er sagt auf Seite 20: Wenn aus den Reihen

---

*) Der Verf. erklärt es (Vorrede VI) für praktisch bedenklich, unmittelbar auf die Arithmetik die Differentialrechnung folgen zu lassen; dagegen ist Referent durch vieljährige Erfahrung zu dem Ergebnisse gekommen, dass jene Aufeinanderfolge gar keine Schwierigkeiten hat, wenn die Schüler etwas analytische Geometrie verstehen. Hält man die Beweise der Formeln

$$\frac{d(x^m)}{dx} = mx^{m-1}, \quad \frac{d(a^x)}{dx} = a^x\, la, \text{ etc.}$$

frei von den gewöhnlichen aber überflüssigen Reihenentwickelungen (vergl. des Referenten „Compendium der höheren Analysis", zweite, völlig umgearbeitete Auflage, wovon die 1. Lieferung erschienen ist), so gewinnen die Anfangsgründe der Differentialrechnung sogar noch den Vorzug, viel einfacher und verständlicher zu sein, als die immer etwas peniblen Betrachtungen der algebraischen Analysis.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots$$
$$b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots$$

die neue Reihe

$$(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + (a_2 + b_2) x^2 + \dots$$

gebildet wird, so soll letztere die der Addition entsprechende Summe sein, oder symbolisch ausgedrückt:

$$\Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r \ddagger \Sigma (a_r + b_r) x^r;$$

„das Zeichen $\ddagger$ soll das Zeichen des Entsprechens heissen.“ In diesen wenigen Worten steckt eine doppelte Unklarheit. Zwischen drei unendlichen Operationen irgend eine Beziehung — mag sie nun durch $=$ oder $<$ oder $>$ etc. bezeichnet sein — aufstellen, hat so lange gar keinen vernünftigen Sinn, als nicht nachgewiesen ist, dass bei jenen Operationen eine angebbare und darum mit anderen vergleichbare Grösse herauskommt; wer z. B. hinschreibt: $\sin \infty + \cos \infty = \tan \infty$, wird schwerlich um diese Weisheit beneidet werden, muss sich aber auch gefallen lassen, dass ein Anderer das Zeichen $=$ durch $<$ ersetzt und gleichfalls Recht zu haben behauptet. Eben deswegen lässt sich schon einer Gleichung von der Form

$$\Sigma a_r x^r + \Sigma b_r x^r = \Sigma (a_r + b_r) x^r$$

gar keine fassbare Bedeutung unterlegen, wenn nicht beide Reihen convergiren; noch viel unklarer aber wird die Sache, wenn der Verfasser statt des Gleichheitszeichens ein neues Zeichen einführt, ohne eine Definition desselben zu geben. Oder meint der Verfasser wirklich, in dem blossen „Entsprechen“ liege etwas bestimmtes? Man braucht doch nur an die geometrischen Verwandtschaften zu denken, um sich zu erinnern, dass z. B. einer Geraden sowohl ein Punkt, als eine Gerade und überhaupt alles Mögliche, ja sogar Unmögliches (Imaginäres) entsprechen kann. — Später freilich hört diese Unbestimmtheit wieder auf, denn der Verfasser ist da, wo es auf sichere Resultate ankommt, klug genug, nur convergirende Reihen zu benutzen und $\ddagger$ in $=$ zu verwandeln. Nahe liegt da die Frage: *cui bono?* wozu überhaupt die curiose Theorie des Entsprechens, wenn sie nicht wieder gebraucht wird und wenn sich der Verfasser nicht getraut, mit ihr allein etwas Ordentliches anfangen zu können?

Nachdem in Cap. V das Resultat

$$(1 + x)^m \ddagger \Sigma\, {}^m\mathfrak{B}^{r}\, x^r$$

gewonnen worden ist, wobei der Verfasser ganz wie Thibaut rechnet und bezeichnet, folgt die Lehre von der Convergenz der Reihen (Cap. VI) jedenfalls nur, um $=$ statt $\ddagger$ setzen zu dürfen, und daran schliessen sich in Cap. VII die Reihen für Exponentialgrössen und Logarithmen. Zu einiger Ueberraschung unbefangener Leser kommt jetzt die Bemerkung, dass auch Reihen von der Form

$$a_0 + a_1 (u + v\sqrt{-1}) + a_2 (u + v\sqrt{-1})^2 + \dots$$

betrachtet werden müssen, und, nachdem das Nöthige hierüber gesagt worden ist, definirt der Verfasser $e^{u+v\sqrt{-1}}$ als Summe der Reihe

$$1+\frac{u+v\sqrt{-1}}{1}+\frac{(u+v\sqrt{-1})^2}{1.2}+\dots$$

und bleibt seinem Vorbilde Thibaut auch darin getreu, dass er $\cos x$ und $\sin x$ nur im analytischen Sinne, nämlich als Summen der bekannten Reihen nimmt. Dieser bekannte Gedankengang enthält zwar keine Unrichtigkeit, leidet aber an einigen auffallenden methodischen Fehlern und Unbequemlichkeiten, die vielleicht genauer aus einander gesetzt zu werden verdienen.

Wenn erstens der Gedanke, complexe Variabele in die vorher dagewesenen Reihen einzuführen, mehr als ein scurriler Einfall, wenn er ein Princip sein soll, warum fängt man denn nicht gleich bei der Binomialreihe an und nennt den rellen Theil von

$$1+\frac{\mu}{1}(u+iv)+\frac{\mu(\mu-1)}{1.2}(\mu+iv)^2+\dots$$

etwa den binomischen Cosinus und den Factor von i den binomischen Sinus? Gleichwol hütet sich Jeder vor solcher Consequenz und zwar aus dem einfachen Grunde, weil sie auf complicirte Functionen zweier Variabelen führt. Damit wird das Princip von Hause aus verletzt, man folgt ihm nur, soweit es bequem ist. — Der zweite methodische Fehler besteht darin, dass man ganz unnützer Weise die Theorie des Imaginären von der Theorie der unendlichen Reihen abhängig macht. Die Quelle des Imaginären liegt in der Algebra, ebendaher kommt auch die Potenz, und so ist es doch nicht mehr als naturgemäss, die Frage nach der Bedeutung von $(u+iv)^{\mu}$ mittelst der niederen Mathematik zu beantworten, wenn dies irgend geschehen kann. Zu welchen Monstrositäten jener Thibaut'sche Weg führt, sieht man am deutlichsten bei dem einfachen Theoreme, dass immer

$$1)\qquad x+iy=r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)$$

gesetzt werden darf. Hier ist geometrisch die Sache unmittelbar einleuchtend, der Analytiker aber braucht hierzu 1) die Lehre von der Convergenz der Reihen, 2) den binomischen Satz, 3) die Exponentialreihe, 4) die Zerfällung derselben bei complexen Exponenten, 5) den Nachweis, dass der analytische Cosinus und Sinus identisch sind mit dem trigonometrischen Cosinus und Sinus. Wenn dies keine Umwege sind, so giebt es keine. Viel einfacher wird die ganze Theorie, wenn man von der Gleichung 1) ausgeht und $\cos$ und $\sin$ im goniometrischen Sinne nimmt. Man erhält zunächst

$$r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta).\ r'(\cos\vartheta'+i\sin\vartheta')=rr'\left[\cos(\vartheta+\vartheta')+i\sin(\vartheta+\vartheta')\right]$$

und durch mehrmalige Anwendung dieser Formel gelangt man zu dem Moivre'schen Satz und überhaupt zur Bedeutung der Potenz

$$(x+iy)^{\frac{p}{q}}=\left[r(\cos\vartheta+i\sin\vartheta)\right]^{\frac{p}{q}}.$$

Die Definition der Exponentialgrösse mit complexen Exponenten bietet für den ersten Anblick eine kleine Schwierigkeit, welche Referent seit langer Zeit überwunden hat, indem er zeigte, wie die identische Gleichung

$$\frac{a^n - b^n}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1}$$

vollkommen ausreicht, um zu beweisen, dass $\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$ gleichzeitig mit m wächst, aber kleiner als 4 bleibt und sich daher einer bestimmten endlichen Grenze nähert, welche e genannt wird. Daran knüpft sich leicht die allgemeinere Gleichung

$$2) \qquad Lim\left[\left(1 + \frac{z}{m}\right)^m\right] = e^z,$$

der zu Folge die Exponentialgrösse als Grenzwerth einer gewissen Potenz angesehen werden kann. Da nach dem Vorigen die Bedeutung der Potenz für jede complexe Basis gesichert ist und m als ganze und positive Zahl genommen werden kann, so lässt sich auch e^{u+iv} genau definiren, indem man sagt, es sei

$$e^{u+iv} = Lim\left\{\left(1 + \frac{u+iv}{m}\right)^m\right\}.$$

Die Ausführung des angedeuteten Grenzenüberganges liefert die Gleichung

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v),$$

und von hier an bleibt der Gedankengang der gewöhnliche. Durch diese Darstellung gewinnt die Theorie des Imaginären eine solche Unabhängigkeit, dass sie an jeder beliebigen Stelle der algebraischen Analysis eingeschaltet, ja sogar gleich zu Anfang vorgenommen werden kann. Ferner erspart man sich die langweilige Untersuchung über die Periodicität des analytischen Cosinus und Sinus, den umständlichen Beweis, dass es eine Zahl $(\frac{1}{2}\pi)$ giebt, deren analytischer Sinus $= 1$ ist; endlich fällt der Nachweis der Identität des analytischen und des goniometrischen Sinus ganz von selber weg.

Der Verfasser beschliesst sein Werk mit zwölf Noten, welche gerade ein Drittheil des Ganzen ausmachen und manche hübsche Entwickelung enthalten namentlich in Beziehung auf Reihen, Kettenbrüche und Zahlentheorie; diese Anhänge sind überhaupt das Beste am Buche.

Damit man übrigens dem Referenten nicht nachsage, dass Tadeln leichter sei, als Bessermachen, so erlaubt sich derselbe hiermit auf sein Handbuch der algebraischen Analysis zu verweisen, dessen dritte verbesserte und vermehrte Auflage in wenigen Wochen die Presse verlassen wird.

SCHLÖMILCH.

Lehrbücher der Arithmetik und Algebra.

Lehrbuch der Algebra für Ober-Gymnasien und Ober-Realschulen. Von August Decker, Lehrer der Mathematik und Physik am k. k. Ober-Gymnasium in Troppau. Troppau 1859, Otto Schüler's Buchhandlung. 8. 218 S.

Das vorliegende Lehrbuch, dessen Inhalt die allgemeine Arithmetik und die Grundlehren der Algebra bilden, ist den Bedürfnissen des mathematischen Unterrichts in den höheren Klassen der Gymnasien und Realschulen angepasst. In acht Abschnitten handelt es von den arithmetischen Operationen, von den Brüchen (incl. Kettenbrüchen), von den Potenz- und Wurzelgrössen, von den Verhältnissen und Proportionen, von den Logarithmen, von den Gleichungen (Gleichungen des ersten und zweiten Grades, unbestimmte Gleichungen des ersten Grades), von den Progressionen, von der Combinationslehre oder Syntaktik. Die einzelnen Lehren sind mit ziemlicher Ausführlichkeit vorgetragen und durch Beispiele erläutert. Das Buch ist mit anerkennungswerthem Fleisse geschrieben und bekundet überall ein Streben nach wissenschaftlicher Strenge, so dass es in den Kreisen, für welche es bestimmt ist, gewiss mit Nutzen von Lehrern und Schülern gebraucht werden kann. Die äussere Ausstattung verdient ganz besonders auch gelobt zu werden.

Die Elemente der Mathematik. Ein Leitfaden für den mathematischen Unterricht an höheren Lehranstalten. Von Wilh. Gallenkamp, Director der Realschule in Mühlheim an der Ruhr. Zweite verbesserte und vermehrte Auflage. 1. Theil. Der Arithmetik und Algebra erste Abtheilung und die Planimetrie. Mit einer Figurentafel. Iserlohn, Verlag von Julius Bädecker. 1860. 8. 148 S.

Ein durch gedrängte Kürze und klare und übersichtliche Darstellung sehr empfehlenswerthes Buch. Es enthält auf 72 Seiten die erste Abtheilung der Arithmetik und Algebra, nämlich die Grundrechnungsarten in ganzen Zahlen, die Grundrechnungsarten in Brüchen, die Grundrechnungsarten in algebraischen Zahlen, die Lehre von den Potenzen (mit ganzen und gebrochenen, positiven und negativen Exponenten), Anwendung der Potenzlehre auf Zahlensysteme mit beliebiger Grundzahl, die Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten. Der zweite Theil des Buches enthält auf 76 Seiten die Planimetrie, und es handeln die sechs Capitel von der geraden Linie und der Lage gerader Linien gegen einander, vom Dreieck, vom Viereck und dem Vieleck, von der Grössenvergleichung der geradlinigen geschlossenen Figuren, von der Formvergleichung geradliniger Figuren, vom Kreise (Aehnlichkeit, Polarität und Potenzialität der Kreise, Kreisberührungen). In einem Punkte können wir uns mit dem Verfasser nicht ganz einverstanden erklären und dieser betrifft die Auf-

stellung zu allgemeinen Definitionen am Anfange der einzelnen Lehren der Arithmetik. Jedenfalls wird dadurch die Einsicht in die Bedeutung der einzelnen Rechnungsoperationen nicht gefördert. Wenn der Verfasser z. B. zu Anfang der Potenzlehre die Erklärung aufstellt, eine Potenz ist eine Zahl, welche so durch Multiplication aus einer gegebenen Zahl, der Grundgrösse, entsteht, wie eine andere gegebene Zahl, der Exponent, durch Addition aus 1 entstanden ist, so wird durch eine solche oder ähnliche Erklärungen nicht nur die Grundbedeutung der Potenz als eines Productes gleicher Factoren verdunkelt, sondern es wird auch die symbolische Bedeutung der Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten dadurch nicht in das rechte Licht gestellt und die Erklärung bekommt einen Anschein von Willkür, den sie doch nicht haben soll. Ebenso will es uns in der Geometrie nicht recht gefallen, den Winkel zweier Geraden gleich anfänglich als Drehungsgrösse aufzufassen; wissenschaftlicher ist es jedenfalls, den Winkel zu definiren als das Stück der unbegrenzten Ebene, welches zwischen zwei von einem Punkt ausgehenden Geraden liegt. Die Vergleichung der Winkel rücksichtlich ihrer Grösse wird dadurch gewiss nicht erschwert, sobald man einmal erklärt hat, was man unter zwei gleichen Winkeln versteht. Sehen wir von diesen Einwürfen ab, so bleibt dem Verfasser das Verdienst einer gewandten Darstellung, die ein nicht geringer Vorzug des sehr hübsch ausgestatteten Buches ist.

Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und höhere Lehranstalten. Von Dr. Johann Robert Boyman, Oberlehrer am Gymnasium zu Coblenz. Dritter Theil: Arithmetik. Cöln und Neuss, L. Schwann'sche Verlagshandlung. 1861. 8. 224 S.

Das vorliegende Buch nimmt besonders Rücksicht auf Heis' Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra und kann derselben als Commentar dienen. Nur die Gleichungen, welche den dritten Grad überschreiten, sowie die transcendenten Gleichungen sind unberücksichtigt geblieben. In dem Streben, von vornherein alle Sätze und Formeln durch Beweise zu stützen und folgerichtig zu begründen, ist der Verfasser jedenfalls über das Erlaubte hinausgegangen, indem er von Formeln Beweise giebt, in denen eine Erklärung enthalten ist. Es nimmt sich in der That komisch aus, für die Formeln, wie

$$(a-b)+b=a,\; a-a=0,\; \frac{a}{b}.b=a,\; a^0=1,\; a^{-p}=\frac{1}{a^p} \text{ etc.}$$

Beweise zu finden. Dass man in den Lehrbüchern, die auf Erweckung und Belebung eines wissenschaftlichen Sinnes gerichtet sind, immer noch den Begriff der Null und den des Unendlichkleinen zusammenwirft und dadurch unvermeidliche Widersprüche hervorruft, ist gewiss im Interesse der Wissenschaft zu beklagen. Sonst enthält das Buch bei einer sauberen Ausstattung (Druckfehler abgerechnet) manches Gute und wird denen,

:he bei ihrem Unterrichte die Sammlung von Heis zu Grunde legen, erhin von Nutzen sein können.

faden der allgemeinen Arithmetik und Algebra für Gymnasien, höhere Bürger- und Gewerbeschulen, besonders auch als Commentar zu der Sammlung von Beispielen aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra, herausgegeben von E. Heis, zu gebrauchen, einfach und leicht fasslich dargestellt von DAVID GIFFHORN, Lehrer der Mathematik am Obergymnasium zu Braunschweig. Braunschweig, Verlag der Schulbuchhandlung. 1861. 8. 220 S.

Dieser Leitfaden, dessen Titel seine Bestimmung hinlänglich bekun- behandelt die Lehren der allgemeinen Arithmetik und Algebra in der :ömmlichen Weise. Kettenbrüche, die Combinationslehre, die Glei- ıgen des dritten und höherer Grade sind nicht berücksichtigt. Dem be sind Tabellen zur Vergleichung verschiedener Maass- und Gewichts- eiten beigefügt. Die Ausstattung des Buches ist recht gut.

rbuch der Arithmetik mit Einschluss der Algebra und der niederen Analysis. Zum Gebrauch bei den Vorträgen an der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule und zum Selbstunterrichte bearbeitet von Dr. K. H. M. ASCHENBORN, Professor am Berliner Cadettenhause, Lehrer und Mitglied der Studiencommission der vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule. Berlin 1859, Verlag der königl. geheimen Ober-Hofbuchdruckerei (R. Decker). 8. 458 S.

Ist das vorliegende Lehrbuch zunächst zum Gebrauch bei den Vor- ;en an der königlichen vereinigten Artillerie- und Ingenieurschule be- ımt und dieser Zweck für Umfang, Inhalt und Methode massgebend esen, so wird dieses Buch doch auch für andere Fachschulen, in denen mathematische Unterricht ein wesentliches Moment bildet, mit grossem zen gebraucht werden können. Klarheit der Darstellung, Strenge der reisführung, hinreichend viele und passend gewählte Uebungsbeispiele, :hhaltigkeit des Inhalts und glückliche Auswahl aus dem reichen Ma- ıle der allgemeinen Arithmetik und der niederen Analysis machen das h zu einer erfreulichen Erscheinung auf dem so überreich angebauten iete der mathematischen Schulliteratur. Obgleich dieses Buch zunächst eine Fachschule geschrieben und daher die Anwendung der Mathematik zugsweise mit berücksichtigt worden ist, so enthält dasselbe doch auch ıche Hinweisungen auf Theile der höheren Analysis, so dass es auch hen Lesern empfohlen werden kann, die sich dem Studium der Mathe- ik speciell widmen wollen.

rbuch der Arithmetik. Verfasst von Dr. GEORG ZEHFUSS. Oppenheim am Rhein, Verlag und Eigenthum von Ernst Korn. 1857. 8. 144 S.

Die Grundzüge der Algebra. Zum Gebrauche bei Vorlesungen, für höhere Lehranstalten und zum Selbststudium dargestellt von Dr. Georg Zehfuss. Oppenheim a. Rh. und Darmstadt, Verlag und Eigenthum von Ernst Korn. 1860. 8. 200 S.

Beide Bücher zeichnen sich durch theilweise neue Behandlung des Stoffes, durch grösste wissenschaftliche Strenge, durch Kürze und Reichhaltigkeit vor anderen Schriften über denselben Gegenstand vortheilhaft aus. Wir machen nur aufmerksam auf die Untersuchung der Multiplication und Division der gebrochenen Zahlen, auf die Lehre von den positiven und negativen Grössen und die Lehre von den Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten, auf die Rechnung mit imaginären Grössen, auf die Behandlung der Gleichungen des ersten Grades. Wie in dem Lehrbuch der Arithmetik die für das Studium der Zahlentheorie so wichtige Lehre von der Congruenz, so weit sie in das Gebiet der Elemente gehört, so ist in der Algebra die für die gesammte höhere Analysis so wichtige Determinantenlehre, das Nöthigste über die höheren Gleichungen und die unbestimmte Analysis (höhere Congruenzen, unbestimmte Gleichungen des zweiten Grades) aufgenommen. Das Lehrbuch der Arithmetik enthält übrigens auch die praktischen Rechnungsarten (Reductionsrechnungen, Zinsrechnungen, kaufmännische Rechnungen). Beide Bücher des Verfassers sind so anregend geschrieben, dass wir nur wünschen können, es mögen dieselben in recht viele Hände gelangen; der Nutzen für den Leser wird nicht ausbleiben.

Lehrbuch der Elementar-Mathematik von Dr. Theodor Wittstein, Professor und Lehrer an der königl. Cadettenanstalt, der königl. Militärakademie und der städtischen Handelsschule zu Hannover. 1. Band: Arithmetik und Planimetrie. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1856. 8. 398 S.

Ein Buch, was nur die wichtigsten Lehren der Arithmetik und Planimetrie enthält, diese aber bis in die kleinsten Einzelnheiten ausgearbeitet dem Schüler vorlegt. Der Verfasser hat Schulen im Auge gehabt, bei denen die Mathematik hauptsächlich nur als Bildungsmittel des Verstandes betrachtet wird und für solche wird es gewiss in Bezug auf die Auswahl und Behandlung des Stoffes als zweckmässig befunden werden.

Dr. Rudolf Hoffmann.

Neue Elemente der Mechanik. Von K. H. Schellbach, Professor am Friedrich-Wilhelms-Gymnasium und an der Kriegsakademie zu Berlin. Dargestellt und bearbeitet von G. Arendt, ordentlicher Lehrer am Französischen Gymnasium zu Berlin. Berlin, Reimer. 1860.

Ueber die Entstehung des vorliegenden Buches theilt Herr Professor Schellbach in der Vorrede, durch welche er dasselbe einleitet, mit, dass es aus den Lehrstunden hervorgegangen sei, welche er seit einer längeren Reihe von Jahren unter Theilnahme einiger jüngeren Lehrer der Mathematik und Physik in der ersten Classe des Friedrich-Wilhelms-Gymnasiums zu Berlin gehalten hat. Der Zweck dieses Unterrichts war hauptsächlich, die Vorstellungen, welche sich die Schüler bereits über mechanische Vorgänge gebildet hatten, zu grösserer Klarheit zu entwickeln, die Auffassung dieser Processe auf möglichst einfache Grundbegriffe zurückzuführen und letztere durch vielfache Uebung gehörig zu befestigen. Das aus diesen Lehrstunden hervorgegangene Lehrbuch hat daher weniger den ersten Anfänger, als vielmehr solche Leser im Auge, welche ihre mechanischen Kenntnisse durch zweckdienliche mathematische Uebungen fester begründen wollen. In der Art seiner Entstehung, sowie in der mathematischen Behandlung des Stoffes zeigt das Buch mehrfache Verwandtschaft mit den im fünften Jahrgange der Literaturzeitung S. 66 besprochenen „mathematischen Lehrstunden" desselben Verfassers, denen es auch in Beziehung auf die reiche Fülle des behandelten Materials würdig zur Seite tritt. Für die Leser dieser Blätter, denen das neue Werk noch nicht zu Gesicht gekommen sein sollte, wird es daher jedenfalls von Interesse sein, mit seinem Inhalte näher bekannt gemacht zu werden.

Nach Feststellung der Begriffe: Atom, Trägheit, gleichförmige Bewegung und gegenseitige Anziehung der Atome und Atomgruppen (Molecüle) wendet sich das erste, von der geradlinigen Bewegung handelnde Capitel zunächst zu der gleichförmig beschleunigten Bewegung, welche hier als eine Bewegung des Atoms auftritt, das von einem anderen angezogen wird, während die gegenseitige Entfernung beider Atome unverändert bleibt. Die entwickelten Gesetze werden auf den freien Fall und den verticalen Wurf der Körper angewendet, woran sich ein Excurs über das Newton'sche Gravitationsgesetz und die Einwirkung der Himmelskörper auf die Fallerscheinungen an der Erdoberfläche schliesst. Die Bewegung von Atomsystemen, welche über eine gerade Linie vertheilt in unveränderlichen Entfernungen gehalten werden, während sie einer in der Richtung dieser Geraden wirkenden Anziehung ausgesetzt sind, führt zu dem Begriffe der Spannung zwischen den einzelnen Atomgruppen; an die Bewegung freier Atomgruppen auf derselben Geraden reihen sich zum Schlusse des Capitels die Gesetze des Stosses.

Das zweite Capitel führt die Ueberschrift: Das Parallelogramm der Kräfte, die schiefe Ebene, parabolische Bewegung. Von dem Bewegungsparallelogramm ausgehend behandelt hier der Verfasser die Bewegung auf der schiefen Ebene, sowohl unter alleiniger Wirkung der Schwerkraft, als mit Rücksichtnahme auf die Reibung, sowie die Bewegung fest verbundener Atomgruppen auf zwei zusammengestellten schiefen Ebenen. An die

Untersuchung der Wurflinie sind mehrfache interessante mathematische Aufgaben geknüpft, z. B. über die Umhüllende der bei gegebenem Ausgangspunkte und gegebener Anfangsgeschwindigkeit in derselben Verticalebene möglicher Wurflinien.

Die im dritten Capitel enthaltene Theorie der Schwungkraft wird durch die Untersuchung derjenigen discontinuirlich wirkenden Kraft eingeleitet, durch welche ein materieller Punkt genöthigt wird, den Umfang eines einem Kreise eingeschriebenen regelmässigen Polygons zu durchlaufen. Das hieraus gewonnene Gesetz der Schwungkraft findet seine Erläuterung in vielfachen Uebungsbeispielen aus dem Gebiete der Astronomie und Physik, z. B. in der Berechnung der Massen und der Dichtigkeit der Himmelskörper, in der Begründung des dritten Kepler'schen Gesetzes bei Voraussetzung einer kreisförmigen Planetenbahn, in der Untersuchung der Zusammensetzung von Schwerkraft und Centrifugalkraft an der Erdoberfläche, in der Theorie des conischen Kreispendels u. s. f.

Das vierte Capitel enthält die Theorie der Attraction von festen Atomsystemen in einer Vollständigkeit, wie der Attractionscalcül unter Voraussetzung elementarer mathematischer Hilfsmittel nur in wenigen Lehrbüchern durchgeführt sein dürfte. Vorausgeschickt sind einige Betrachtungen über die Construction der Körper, in denen sich der Verfasser zu der bekannten atomistischen Naturansicht bekennt, ohne jedoch in seinen Rechnungen, welche streng genommen einen continuirlich mit Materie erfüllten Raum voraussetzen, von dieser Ansicht weiteren Gebrauch zu machen. Untersucht werden die Anziehung einer homogenen Kreisfläche auf ein in ihrer Achse gelegenes Atom, sowie einer Kugelschicht und einer homogenen Kugel, sowohl auf einen äusseren, als einen inneren Punkt, nicht allein unter Voraussetzung des Newton'schen Attractionsgesetzes, sondern auch eines solchen, wo die Anziehung irgend einer Potenz der Entfernung proportional ist. Mit Beschränkung auf das Newton'sche Gesetz behandelt der Verfasser die Attraction einer homogenen materiellen Geraden, die Wirkung eines linearen Magneten auf ein in ausserordentlicher Entfernung befindliches einfach magnetisches Element und einige leichteren Fälle der Attraction zwischen zwei Atomsystemen.

Im fünften Capitel wird die Bewegung eines Atoms unter der Wirkung einer der Entfernung proportionalen Centralkraft aus der Parallelprojection einer gleichförmigen Bewegung im Kreise abgeleitet und durch die folgenden Beispiele erläutert: Bewegungen der in ihrem Gleichgewichte gestörten Atome elastischer Flüssigkeiten (Fundamente der Undulationstheorie), Bewegungen eines Körpers in einem diametral durch die ganze Erde gegrabenen Schachte (unter Voraussetzung eines homogenen Erdkörpers), Longitudinalschwingungen einer Spiralfeder.

Für die Bewegung eines Atoms unter dem Einflusse einer Centralkraft *im Verein* mit anderen Kräften, welche den Gegenstand des sechsten Ca-

pitels bildet, stellt der Verfasser nur die ersten Grundlagen fest, ohne jedoch, da dieselben streng genommen auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung hinauslaufen, die Aufgabe in ihrer allgemeinen Form weiterzuführen. Die gewonnenen Resultate werden daher nur in zwei Beispielen weiter verfolgt, in der Theorie des Pendels und der Lehre von der Bewegung eines Atoms auf einer rotirenden Geraden. An die Theorie des Pendels reihen sich die Anwendung desselben zur Bestimmung der Erdschwere, zu Höhenmessungen, zur Bestimmung der mittleren Dichtigkeit der Erde, sowie eine elementare Erläuterung des Foucault'schen Pendelversuchs.

Der Inhalt des siebenten Capitels ist den Kepler'schen Gesetzen gewidmet, wobei unter Anderem die im dritten Capitel dem dritten Kepler'schen Gesetze auferlegte Beschränkung auf eine kreisförmige Bahn wieder aufgehoben wird. Eine Anwendung des ersten Kepler'schen Gesetzes bildet die Untersuchung der Abweichung frei fallender Körper von der Verticalen.

Das Schlusscapitel handelt von der Bewegung eines Systems, das aus zwei mit einander fest verbundenen Atomgruppen besteht. Das Gesetz der aus fortschreitender Bewegung des Schwerpunktes und Rotation um eine durch den Schwerpunkt gehende Achse zusammengesetzten Bewegung wird hier für den einfachen Fall entwickelt, wo sie von zwei Impulsen herrührt, welche im Anfange der Bewegung den beiden Atomgruppen in beliebiger Richtung ertheilt wurden.

Was die mathematische Behandlung des Stoffes betrifft, so ist dieselbe, wie es bei einem Werke, welches den Namen des Herrn Professor Schellbach an der Spitze trägt, nicht anders erwartet werden konnte, eine durchgängig strenge und correcte. Der Umfang des mathematischen Wissens, welchen der Gebrauch des Buches voraussetzt, beschränkt sich auf die Elementarmathematik mit Einschluss der Anfangsgründe der analytischen Geometrie der Ebene, sowie des allgemeinen Binomialtheorems und der hieraus abgeleiteten Reihenentwickelung für die Exponentialgrösse. Welche seltene Virtuosität Herr Prof. Schellbach besitzt, mit so wenigen Hilfsmitteln Aufgaben zu behandeln, welche ausserhalb des Gebietes der Elementarmathematik zu liegen scheinen, ist bereits bei Besprechung der mathematischen Lehrstunden rühmend erwähnt worden; das vorliegende Buch liefert hierfür fast auf allen Seiten sprechende Beweise. Es kann daher dasselbe nicht allein den Studirenden der Mathematik bestens empfohlen werden, für welche es gleichzeitig durch die Eigenthümlichkeit seiner Methoden eine gute Einleitung in das Studium der höheren Mathematik bildet; auch der Lehrer wird es im Interesse des Unterrichts nicht unbefriedigt aus der Hand legen.

O. Fort.

Die Ericsson'sche calorische Maschine. Von H. Boetius, Civilingenieur. 2. Auflage. Hamburg, O. Meissner.

Die so rasche Folge einer zweiten Auflage der genannten Schrift deutet auf ein Interesse für dieselbe hin, welches eine kurze Beurtheilung den Lesern der Zeitschrift gegenüber rechtfertigen dürfte.

Die theoretischen Untersuchungen des Verfassers sollen klarere Einsicht in die Wirkungsweise der motorischen Wärme in ihrer Vereinigung mit atmosphärischer Luft und hierdurch Handhaben liefern, welche das Streben nach Ausbildung und Vervollkommnung der calorischen Maschinen verwenden können. Sie sollen ferner nähere Aufschlüsse über die Wirkungsweise der Ericsson'schen Maschine und dadurch Rechnungsunterlagen geben, mit denen der Nachweis über den industriellen Werth dieser Maschine geführt werden könne. Die ersten dieser Untersuchungen sind bereits von Redtenbacher in dessen „Die calorische Maschine, Mannheim 1853", an welche Schrift der Verfasser sich anlehnt, ungleich umfassender und einsichtsvoller durchgeführt, die zweiten nur höchst lückenhaft und unzureichend angestellt worden.

Eine industrielle Werthbestimmung pflegt durch Vergleich mit der Dampfmaschine in Bezug auf Leistung, Betriebsaufwand und Anlagekosten vorgenommen zu werden. Die beiden ersten Punkte fertigt man in der Regel mit Berechnung des pro Zeiteinheit und Leistungseinheit verbrauchten Brennmaterialquantums ab. Dieses Brennmaterialquantum ist von dem Wärmeerzeugungs-, Wärmeübertragungs- und Wärmenutzungsapparate der Maschine abhängig. Bei Betrachtung der Ericsson'schen Maschine findet sich, dass gerade die beiden ersten sehr stiefmütterlich bedacht sind, also den Brennmaterialverbrauch vorwiegend beeinflussen werden. Der Verfasser betrachtet trotzdem nur den dritten und setzt für die ersten ohne Weiteres willkürlich abgeschätzte Wirkungsgrade in seine Rechnung; ja er behandelt sogar auch den letzten nur höchst unvollständig; er bestimmt blos die sogenannte theoretische Leistung desselben, während an der beredeten Maschine gerade die Reibungswiderstände in dem allerdings höchst ingenieusen, aber gleichwohl sehr complicirten Hebelmechanismus, die Wärmeverluste an der bedeutenden Abkühlungsfläche des Cylinders und die Luftverluste an dem in dieser Beziehung unzweckmässig construirten Steuerkolben den Totaleffect auffällig deprimiren. Indem er für diese Effectverluste, wie für die Wirkungsgrade des Feuerraumes und der Heizfläche Werthe einsetzt, die mit sanguinischer Vorliebe für die calorische Maschine gewählt sind, gelangt er zu Resultaten, die die ökonomische Vortrefflichkeit dieser Maschine ausser Zweifel zu setzen scheinen. Er findet, dass eine einpferdige Ericsson-Maschine mit einem Coaksquantum von 4 bis 5 Pfund pro Stunde ausreicht, während eine Dampfmaschine deren 10 erfahrungsmässig nöthig hat.

In der That hat sich durch Messung mit Dynamometer und Waage

ergeben (Dingler's polytechn. Journal CLIX, Heft 6), dass die Ericsson-Maschine für oben gedachte Leistung und Zeit 30 Pfund Holz- oder 15 Pfund Steinkohle oder Coaks beansprucht, ausserdem aber noch Unterhaltungskosten erfordert, welche eine Dampfmaschine selbst unter den ungünstigsten Umständen nicht nöthig macht.

Nach diesen Erörterungen kann die theoretische Untersuchung des Verfassers nur als ein Rechenexempel erscheinen, welches eine mässige Illustration für ein paar Theoreme der Thermodynamik vorführt.

Dresden. Dr. Weiss.

Die Fluorescenz des Lichtes. Vorgetragen von F. J. Pisko. Wien, Verlag von Carl Gerold's Sohn. 1861.

Dieses kleine Schriftchen enthält eine recht vollständige Zusammenstellung alles dessen, was über die Fluorescenz bekannt ist, und empfiehlt sich ganz besonders zum Studium aller hierher gehörigen Erscheinungen. Die ersten 63 Seiten füllen die Grundversuche mit Sonnenlicht, künstlichem Licht, sowie mit einfachem Licht, und die Untersuchung mittels farbiger Zwischenmittel, desgleichen eine geschichtliche Rückschau über den Gegenstand aus. Seite 63—93 beschreibt der Verfasser die wissenschaftlichen Untersuchungsmethoden und ihre Ergebnisse, Seite 93—100 die verschiedenen Erklärungsmethoden der Fluorescenz und Seite 101—107 die Anwendung der Fluorescenz auf Prüfung der Durchlässigkeit der Körper für ultraviolette Strahlen, auf Photographie und Mikroskopie etc. Der klare und deutliche Vortrag, der durch in den Text aufgenommene Holzschnitte unterstützt wird, die Vollständigkeit des Berichtes über die experimentellen Untersuchungsmethoden, sowie der am Schlusse angefügte literarische Nachweis empfehlen das Schriftchen sehr für das Studium der Fluorescenzerscheinungen. Dr. Kahl.

Notiz.

Als ich ehedem mit der Bearbeitung meiner Tafeln bestimmter Integrale beschäftigt war, habe ich an das mathematische Publicum die Bitte gerichtet, mir zur Erreichung möglichst grosser Vollständigkeit die hier und da erschienenen Monographieen über diese Functionen zusenden zu wollen; einige Journale haben diese Aufforderung damals aufgenommen. Vor der Herausgabe der Tafeln ist mir nichts zugekommen. Denjenigen aber, die mir später ihre werthvollen Abhandlungen zusendeten, statte ich hier nochmals meinen verbindlichsten Dank ab, sowie auch denen, die

mir die Recensionen der genannten Arbeit zukommen zu lassen die Güte hatten. Da ich nun durch den meine Erwartungen übertreffenden Absatz der „*Tables d'intégrales définies* (*publié par l'Académie Royal des sciences. Amsterdam*)“, wodurch die Auflage fast erschöpft worden ist, zu einer neuen, gänzlich umgearbeiteten Ausgabe schreiten muss, wozu von der ersten Auflage noch einiges Material vorhanden ist, so rufe ich noch einmal die freundliche Hilfe der Sachverständigen zu doppeltem Zwecke an und bitte dieselben

1) um die betreffenden Abhandlungen, insoweit sie in den „*Tables etc.*“ S. 21 und 22 nicht citirt und also nicht benutzt worden sind;
2) um die erschienenen Recensionen, insofern die Herren Referenten sie mir zu übersenden noch nicht die Güte hatten.

Das grosse Interesse, welches meinem Unternehmen zu Theil geworden, und die — ich darf wohl sagen — überaus günstige Aufnahme von Seiten der Akademien und der wissenschaftlichen Journale ermuthigen mich sowohl zu diesem Schritte, als auch zu der nicht geringen Mühe einer Umarbeitung des genannten Werkes.

Deventer (Niederlande).

Dr. Bierens de Haan.

Bibliographie

vom 15. April bis 15. Juni 1861.

Periodische Schriften.

onatsberichte der königl. preuss. Akademie der Wissenschaften. Jahrg. 1861. 1. Heft. Berlin, Dümmler in Comm. pro compl. 2 Thlr.

itzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. Jahrgang 1861. 1. Heft. München, Franz in Comm. 16 Ngr.

REIL, K., Jahrbücher der k. k. Reichsanstalt für Meteorologie und Erdmagnetismus. 7. Bd. Jahrg. 1855. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 8 Thlr.

relle's Journal, fortgesetzt von C. W. BORCHARDT. 59. Bd. 1. Heft. Berlin, G. Reimer. pro compl. 4 Thlr.

REMIKER, C., Nautisches Jahrbuch, oder vollständige Ephemeriden und Tafeln für das Jahr 1863. Berlin, G. Reimer. ½ Thlr.

— *Annuaire nautique, ou éphémerides et tables complètes pour l'an* 1863. Ebendaselbst. ½ Thlr.

ibliotheca historico-naturalis, physico chemica et mathematica. Ed. A. v. ZUCHOLD. 10. Jahrg. 2. Hälfte. Juli—December 1860. Göttingen, Vandenhoeck & Ruprecht. 8 Ngr.

Reine Mathematik.

EINE, E., Handbuch der Kugelfunctionen. Berlin, G. Reimer. 1⅚ Thlr.

EISSEL, E., Lehrbuch der Arithmetik und Algebra für höhere Lehranstalten. Berlin, Springer. 1⅚ Thlr.

OERK, H. G., Lehrbuch der Mathematik für Gymnasien und Realschulen. 2. Bd., 2. Thl. enth.: Stereometrie, sphärische Trigonometrie und analytische Geometrie. Berlin, Weidmann'sche Buchhandlung. 24 Ngr.

ILL, C. J. D., *Matheseos fundamenta nova analytica. Pars I.* Greifswald, Akademische Buchhandlung in Comm. 2⅓ Thlr.

Angewandte Mathematik.

HOLTZMANN, C., Lehrbuch der theoretischen Mechanik. Stuttgart, Metzler. 2 Thlr. 6 Ngr.

BRUHNS, C., Die astronomische Strahlenbrechung in ihrer historischen Entwickelung dargestellt. Leipzig, Voigt & Günther. 1⅓ Thlr.

MÄDLER, J. H., Die Fixsternwelt. 2. Auflage des Werkes über die Fixsterne im Allgemeinen und die Doppelsterne insbesondere. Berlin, Heymann. ¾ Thlr.

ALLÉ, M., *De methodis variis perturbationes speciales computandi. Diss. inaug.* Kiel, Akadem. Buchh. in Comm. 8 Ngr.

HOEK, M., *Recherches astronomiques de l'observatoire d'Utrecht.* Haag, Nijhoff. 1⅔ Thlr.

STURM, *Cours de Mécanique de l'école polytechnique; publié par* E. PROUHET. *Tome I. Paris, Mallet-Bachelier. Les deux volumes* 12 *frcs.*

Physik.

RIESS, P., Ueber elektrische Ringfiguren. (Akad.) Berlin, Dümmler in Comm. 12 Ngr.

SPILLER, PH., Neue Theorie der Elektricität und des Magnetismus in ihren Beziehungen auf Schall, Licht und Wärme. 3. Aufl. Berlin, Mittler & Sohn. ⅓ Thlr.

Repertorium der Meteorologie, herausgegeben von der kaiserl. geographischen Gesellschaft zu Petersburg; redigirt von KÄMTZ. 2. Bd. 1. Heft. Dorpat und Leipzig, Köhler. pro compl. 7 Thlr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Studien über die Methoden und die Benutzung hypsometrischer Arbeiten, nachgewiesen an den Niveauverhältnissen der Umgebung von Prag. Ein neuer Beitrag zur Geodäsie und zur Orographie von CARL KOŘISTKA, Professor der Geodäsie am polytechnischen Institute zu Prag etc. Mit zwei Niveaukarten und mehreren Holzschnitten. Gotha, Justus Perthes, 1858.

Der Nutzen, den hypsometrische Bestimmungen im Allgemeinen gewähren, ist so vielseitig, dass nicht allein eine Vermehrung und Vereinfachung der Hilfsmittel zur Ausführung solcher Messungen höchst wünschenswerth erscheint, sondern auch alle Diejenigen, welche derartige Messungen unternehmen, sich den Dank des wissenschaftlichen Publicums in hohem Grade erwerben.

Durch die Erfindung des Barometers wurde ein sehr einfaches Mittel entdeckt, Höhen ohne grossen Zeit- und Kostenaufwand zu bestimmen, und die meisten Höhenmessungen datiren von dem Zeitpunkte an, in welchem die Vervollkommnung des Barometers so weit vorgeschritten war, dass dasselbe mit mehr Zuverlässigkeit, als ursprünglich, zu derartigen Bestimmungen verwendet werden konnte.

Das im Jahre 1829 in Gehler's physikalischem Wörterbuche (5. Bd., S. 339 u. f.) aufgestellte Verzeichniss der Meereshöhen von verschiedenen Punkten der alten und neuen Welt weist 4550 solcher Bestimmungen nach, von denen nur verhältnissmässig sehr wenige auf trigonometrischem Wege, die meisten mittelst des Barometers ausgeführt sind.

Insbesondere ist es A. v. Humboldt, welcher zu Anfang des gegenwärtigen Jahrhunderts durch seine ausnehmend zahlreichen barometrischen Beobachtungen in Amerika die regste Thätigkeit auf diesem Gebiete hervorrief.

Hinsichtlich der Genauigkeit bleibt aber die barometrische Methode wesentlich hinter der trigonometrischen zurück, weshalb man auch in neuerer Zeit die erstere nur da anwendet, wo man ohne bedeutenden Zeit-

und Kostenaufwand die letztere nicht benutzen kann und wo es Zwecken gilt, welche durch die Ungenauigkeit der Methode nicht beeinträchtigt werden.

Die barometrischen Bestimmungen sind aber auch in den letzten Decennien hauptsächlich in solchen Ländern in den Hintergrund gedrängt worden, in welchen bei Gelegenheit der trigonometrischen Landesvermessungen trigonometrische Höhenbestimmungen mit ausgeführt werden konnten, an welche sich nun weitere hypsometrische Arbeiten entweder ebenfalls auf trigonometrischem Wege oder durch Nivelliren im engeren Sinne leicht anschliessen lassen.

Der Verfasser des oben annoncirten, schätzenswerthen, sehr reichlich mit literarischen Citaten versehenen Werkes, welcher sich bereits seit dem Jahre 1850 alljährlich mit Höhenmessungen in den österreichischen Alpen, auf dem böhmisch-mährischen Hochplateau, in den Sudeten und dem westlichen Ausläufer der Karpathen beschäftigte, hat im Auftrage der naturwissenschaftlichen Section des böhmischen Landesmuseums in der Umgegend von Prag 1042 Höhenbestimmungen zum Theil durch das Barometer, zum Theil durch Nivelliren, hauptsächlich aber auf trigonometrischem Wege in der verhältnissmässig kurzen Zeit von 30 Tagen, mit wenig Kostenaufwand und mit einer für ihren Zweck vollkommen ausreichenden Genauigkeit ausgeführt, deren Resultate er in obigem Werke dem wissenschaftlichen Publicum übergiebt.

Hierbei hat derselbe zugleich Gelegenheit genommen, seine gesammelten reichen, praktischen Erfahrungen über Höhenbestimmungen zusammenzustellen, „um dadurch — wie derselbe in der Einleitung sagt — jenen Geodäten und Naturforschern, welche derartige Messungen in einem grösseren Gebiete in möglichst grosser Zahl ohne viele Kosten und doch mit hinlänglicher Genauigkeit ausführen wollen, manche unnöthige, zeitraubende und kostspielige Arbeit zu ersparen."

Sodann hat aber auch derselbe an einem bestimmten Beispiele die Beziehungen nachzuweisen gesucht, in welchen derartige Messungen mit wichtigen Fragen der Orographie, Geologie, Pflanzengeographie und der gesammten Landescultur stehen.

Referent glaubt seinem Beifalle, welchen er diesem ausgezeichneten Werke zu Theil werden lässt, am besten dadurch Ausdruck zu geben, indem er in Folgendem auf den Inhalt desselben etwas näher eingeht.

Das ganze Material ist in zwei Hauptabschnitte gesondert. In dem ersten werden die geodätischen Operationen und die Berechnungsmethoden beschrieben und die Messungsresultate zusammengestellt, im zweiten ist alsdann gezeigt, wie sich solche Messungsresultate zur Construction von Niveaukarten benutzen lassen und wie diese Karten zur Beantwortung von Fragen der Orographie, Hydrographie, Geologie u. s. w. zu verwenden sind. —

Nachdem der Verfasser im §. 1 eine kurze Geschichte der früheren Messungen, insbesondere in der Gegend von Prag, und der Bemühungen, die Seehöhe der Prager Sternwarte zu bestimmen, gegeben, berührt er im §. 2 die von ihm hauptsächlich angewendeten und oben schon berührten drei Methoden der Höhenbestimmung und geht in den folgenden Paragraphen zunächst auf die trigonometrische Höhenmessung näher ein. Im §. 3 behandelt er die Messung der Höhenwinkel, zeigt die Benutzung der Schraube nach Hogreve und Stampfer für kleine Winkel, beschreibt das hierbei nicht ohne grossen Vortheil angewendete, bis dahin aber noch nirgends erwähnte, von Starke in Wien mit Höhenkreis und Mikrometerschraube construirte Nivellirinstrument und untersucht den nicht unbedeutenden Genauigkeitsgrad desselben.

Der §. 4 zeigt die Bestimmung der zur trigonometrischen Höhenmessung nöthigen Distanz nach irgend einer vorhandenen guten topographischen Specialkarte, handelt von den bei diesen Bestimmungen auftretenden Fehlerquellen und dem Einflusse derselben auf die Höhenbestimmungen, geht dann auf die Unterlagen näher ein, welche der Verfasser für seine Distanzbestimmungen in der Umgegend von Prag benutzt hat, wodurch derselbe zu dem Schlusse geführt wird, dass die durch die Unsicherheit der Distanzen entstandenen Fehler in seinen Höhenbestimmungen wohl nie mehr als 0,4 Klaftern betragen und dass mit Hinzurechnung des Fehlers in dem Höhenwinkel die Fehlergrenze in den Höhenbestimmungen 0,5 Klaftern oder 3 Wiener Fuss wohl überschreiten dürfte.

Mit Bedauern hat aber Referent eine Mittheilung der Erfahrungen des Herrn Verfassers in Bezug auf die von ihm im §. 3 angezogene Methode des trigonometrischen Nivellirens des Prof. Stampfer in Wien vermisst, da dieselbe doch in neuerer Zeit sehr häufig und zwar im gebirgigen Terrain mit grossem Vortheil in Anwendung gebracht wird.

Der §. 5 enthält die Berechnungsmethoden und zwar aus correspondirenden und aus einfachen Höhenwinkeln, selbstverständlich unter Berücksichtigung des Einflusses der Refraction und der Krümmung der Erde. Insbesondere geht derselbe auf den Einfluss der terrestrischen Refraction näher ein, erwähnt die hauptsächlichsten Resultate, welche Sabler durch seine höchst scharfsinnigen Untersuchungen bei Gelegenheit des Nivellements zwischen dem Schwarzen und dem Caspischen Meere festgestellt hat, führt die eigenen Erfahrungen des Verfassers in dieser Beziehung an, daraus den zweckmässigsten Zeitpunkt für das Vorherrschen der normalen Refraction im mittlern Böhmen und Mähren ableitend.

Hieraus entwickelt der Verfasser die Formel zur Berechnung des Höhenunterschiedes aus dem einfachen Höhenwinkel w und gelangt zu der für seine Bestimmungen angewendeten abgekürzten Formel

$$H = D \tang w \pm \frac{683}{10^{10}} D^2 \text{ für Metermaass}$$

oder

$$H = D \tan w \pm \frac{1295}{10^{10}} D^2 \text{ für Wiener Klaftern,}$$

welche 133 Klaftern nicht überschreitende Höhenunterschiede H für horizontale Entfernungen D, die kleiner als 24050 Klaftern sind, bis auf zwei Decimalen sicher geben. Am Schlusse dieses Paragraphen werden noch die Formeln aufgeführt, welche die berühmtesten Geometer für die trigonometrischen Höhenbestimmungen gegeben haben.

Nachdem der Verfasser im §. 6 die Wahl der Stand- und Fixpunkte für seine trigonometrischen Messungen im Allgemeinen besprochen und die Ortsbeschreibung der letzteren gegeben, macht er im §. 7 zunächst einige Mittheilungen über die Genauigkeit der Seehöhen der Triangulirungspunkte der österreichischen Landesvermessung, sucht dann Gewichtszahlen für die Genauigkeit seiner Messungen auf, wobei er insbesondere nach Sabler den Grad der Unruhe des Bildes im Fernrohre während der Beobachtung des Höhenwinkels mit berücksichtigt und stellt endlich unter Benutzung dieser Gewichtszahlen die Formeln auf, nach welchen seine Berechnung der wahrscheinlichsten Werthe für die definitiven Seehöhen der Standpunkte etc. erfolgte, deren Resultate nicht nur, sondern auch die Beobachtungsgrössen, aus denen sie hervorgegangen sind, in übersichtlicher Weise in den §§. 8 und 9 tabellarisch zusammengestellt sind.

§. 10 handelt von der nivellirenden Methode und ihrer Genauigkeit mit besonderer Rücksicht auf das in der Stadt Prag ausgeführte Detailnivellement und bespricht die Genauigkeit der gewöhnlichen Eisenbahnnivellements etc., sowie die Vorsicht, mit welcher solche zur Bestimmung von Seehöhen verschiedener Landestheile anzuwenden sind, in sehr treffender Weise.

§. 11 zeigt die Art und Weise des Anschlusses des Nivellements der Stadt Prag an trigonometrisch bestimmte Höhenpunkte zum Behuf der Bestimmung der Seehöhen der nivellirten Punkte, sowie der Berechnung des durchschnittlichen Fehlers der angegebenen Seehöhen der Triangulirungspunkte, worauf dann im §. 12 die Resultate dieses Nivellements und im §. 13 die einiger in der nächsten Umgebung von Prag ausgeführten Nivellements folgen, welche letztere wiederum zur Prüfung der Genauigkeit der ausgeführten trigonometrischen Höhenbestimmungen benutzt werden.

In dem die barometrische Methode und ihre Genauigkeit behandelnden §. 14 bespricht der Herr Verfasser die Fälle, in welchen barometrische Messungen überhaupt „brauchbare", d. h. solche Höhenunterschiede liefern, „deren Unsicherheiten sich innerhalb solcher Grenzen bewegen, dass der Werth der letzteren noch keinen Einfluss auf die Schlüsse übt, zu deren Zweck man die Messung unternommen hat," und *geht nach* einigen Bemerkungen über die Veränderung der Barometer nach *Kreil's* Erfahrungen zu der Art und Weise seiner Messung und Berechnung

über, welche letzere er noch nach den von Gauss im Jahre 1818 bekannt gemachten Tafeln ausführt. Da die gewichtigen Bedenken, welche Ohm, Zech und Peters gegen die Correction wegen der Veränderung der Schwerkraft mit Veränderung der Meereshöhe erhoben haben, nach einer grösseren Arbeit Frisiani's noch nicht als abgethan zu betrachten sind, überdiess aber auch die Correction einen nur sehr geringen Einfluss auf den berechneten Höhenunterschied ausübt. Aus dem letzteren Grunde berücksichtigt der Verfasser auch die von Bessel eingeführte Correction der Höhenformel wegen der Luftfeuchtigkeit nicht, was umsomehr gerechtfertigt erscheint, als ohnediess durch die neueren Untersuchungen Lamont's diese Correction einer wesentlichen Veränderung unterworfen werden dürfte. Gewiss nicht mit Unrecht legt der Verfasser auf eine möglichst schnelle und möglichst einfache Berechnungsmethode einen grossen Accent und zieht dieselben selbstverständlich mit Rücksicht auf den zu erzielenden Zweck den weitläufigen Berechnungen problematischer Correctionen so lange vor, als die überwiegende Hauptursache der Unsicherheit der Barometermessungen, nämlich die nicht horizontale Lage der Luftschichten von gleicher Dichtigkeit und — wie noch hinzuzufügen sein dürfte — das Gesetz der Abnahme der Lufttemperatur mit der zunehmenden Höhe nicht zu erkennen und zu berechnen ist.

Nachdem er in diesem Paragraph noch die Bestimmung der Seehöhe des Prager Sternwarte-Barometers über dem Adriatischen Meere besprochen, führt er im §. 15 seine in den Jahren 1855 und 1856, sowie die früher von einigen anderen Herren ausgeführten Barometermessungen der Umgebung von Prag auf und schliesst den ersten Abschnitt mit der Vergleichung einiger Seehöhen, welche sowohl trigonometrisch, als barometrisch bestimmt worden sind, und mit daraus folgenden beachtenswerthen Bemerkungen über den Zusammenhang des Fehlers der barometrischen Messung und der horizontalen Entfernung.

Mit der Ueberschrift: „die orographischen Resultate" beginnt der zweite Abschnitt, welcher, wie schon bemerkt wurde, die Verarbeitung der im ersten Abschnitte aufgestellten Messungsresultate zeigt.

Derselbe wird im §. 16 durch Aufstellung der Art und Weise eingeleitet, nach der die hypsometrischen Messungen dem Hauptzwecke derselben, der möglichsten Erkenntniss der Unebenheiten des Terrains, dienstbar zu machen sind, herorhebend, dass dies am übersichtlichsten durch graphische Darstellung der Resultate in einer Niveau- oder hypsometrischen Karte erfolgen kann.

Nach einer kurzen Erwähnung der verschiedenen Versuche, die Terraindarstellung durch künstliche Reliefe zu bewirken, giebt der Herr Verfasser im §. 17 einige geschichtliche Notizen der einzelnen Darstellungsmethoden der Höhenverhältnisse, welche sich hauptsächlich nach zwei Methoden *sondern* lassen: der alt-französischen oder italienischen — auch

hier und da die Triel'sche Methode genannt — und der deutschen oder Lehmann'schen.

Nach diesen beiden Methoden, hauptsächlich aber nach der letzteren, welche später auch von den Franzosen theilweise angenommen wurde, sind sämmtliche in den letzten 50 bis 60 Jahren namentlich in Europa vorgenommenen officiellen und privaten Terrainaufnahmen ausgeführt und doch sind alle die auf diese Weise entstandenen Blätter, so werthvoll für die Bodenplastik sie auch sind, zu einer deutlichen und zugleich auch übersichtlichen Erkenntniss der Höhenverhältnisse wenig oder gar nicht geeignet, weil in denselben die sogenannten äquidistanten Horizontalen, auch Niveau- oder Schichtenlinien genannt, wie dieselben von der Triel'schen Methode eigentlich gefordert werden, nicht mit eingezeichnet, sondern meist bei den Originalaufnahmen nur in idealer Weise zur Herstellung der Bergschraffur benutzt wurden.

Erst in den letzten Decennien hat das praktische Bedürfniss des Technikers bei Projectirung von Eisenbahn-, Strassen- und Canalanlagen Veranlassung zur weiteren Ausbildung der Terraindarstellung nach der Triel'schen Idee geführt, nämlich zu der Herstellung der sogenannten Niveaukarten. Werden nämlich die Niveaulinien, d. h. die Curven, in welchen die Oberfläche des natürlichen Bodens von Horizontalflächen, die in gleichweiten (äquidistanten) Abständen als durch die feste Masse der Erdoberfläche gelegt gedacht sind, geschnitten werden, auf geometrischem Wege mit möglichster Genauigkeit ermittelt und ihre Horizontalprojectionen in die betreffende Karte eingetragen, so gewähren dieselben nicht allein ein vollständiges Bild des Terrains, sondern auch einen vollkommen bestimmten Begriff von der Gestalt desselben, ein graphisches Relief, welches in der vollständigsten Weise alle Höhenverhältnisse repräsentirt.

Der Nutzen, den solche Niveaukarten, insbesondere für Tracirungen von Eisenbahn-, Strassen- und Canalanlagen gewähren, ist in mehrfacher Beziehung ausserordentlich; denn nicht nur werden die nöthigen Voruntersuchungen in viel kürzerer Zeit bewirkt, sondern es lässt sich auch mit Hilfe derselben dem Terrain ein Project abgewinnen, welches als das technisch vollkommenste, mithin als das allein richtige sich darstellt.

Leider sind wir aber noch keineswegs im Besitz vieler derartiger Karten von entsprechender Genauigkeit. Die genauere Darstellung datirt erst seit der Zeit, wo dieselben zu den erwähnten technischen Zwecken gebraucht wurden, so dass man genöthigt war, da, wo sich das Bedürfniss herausstellte, derartige Aufnahmen zu bewirken, was namentlich zunächst in Baiern erfolgte.

Immer werden aber solche genaue Darstellungen nur localer Natur sein können und da, wie der Verfasser sagt, es nicht wahrscheinlich ist, dass die Europäischen Staaten eine halbhundertjährige, bereits sehr weit vorgerückte Arbeit wieder von vorn beginnen lassen werden und da, selbst

wenn dies der Fall wäre, die ungeheuern Kosten eines Detailnivellements in keinem Verhältniss stehen würden zu den kleinen Landestheilen, bei denen voraussichtlich oder möglicher Weise dasselbe künftighin zu technischen oder anderen Zwecken benutzt werden könnte, so liegt die Frage nahe, ob man nicht, bei dem grossen Bedürfnisse einer übersichtlichen graphischen Darstellung der allgemeinen Niveauverhältnisse, die bereits vorhandenen guten Terrainaufnahmen in Verbindung mit einer zweckmässig vertheilten grösseren Anzahl von Höhenmessungen für eine solche Darstellung nutzbar machen und daraus jene Niveaukarten construiren könnte, welche vorhin als besonders geeignet bezeichnet wurden, die Höhenverhältnisse eines Gebiets besonders zu veranschaulichen."

Indem der Verfasser diese Frage bejaht, zeigt er im §. 18 seine angewendete Methode der Construction von Niveaulinien auf einer als Grundlage dienenden, nach der Lehmann'schen Manier ausgeführten Karte, Bezug nehmend auf die in den Text gedruckten Figuren sowohl, als auf die dem Werke beigegebenen beiden in Farbendruck ausgeführten Niveaukarten von Prag und Umgegend, deren correcte Ausführung dem Verfasser sowohl, als dem Verleger zum grössten Ruhme gereicht.

Am Schlusse des genannten Paragraphen berührt er noch das zur grösseren Uebersichtlichkeit der Höhenverhältnisse nothwendige Colorit der verschiedenen Schichtungen und bezeichnet es als wünschenswerth, gerade jetzt, wo man den Schichtenkarten eine grössere Aufmerksamkeit schenkt, eine Einigung hierüber und insbesondere über die verschiedenen Töne für tiefer und höher gelegene Schichten zu erzielen.

Mit den entwickelten Gründen, der tiefsten Schicht das grösste Licht und den höheren Regionen dunklere Farbenschattirungen zu geben, kann man sich nur ganz einverstanden erklären und es hat dieses Princip bereits anderweit praktische Anwendung gefunden, indem dasselbe nicht allein Director Dr. Vogel in der Farbenwahl seiner Wachstuchwandkarten und in seinem Schulatlas, sondern auch in neuerer Zeit Dr. Henry Lange bei seiner Höhenschichtenkarte von Sachsen*) in Anwendung brachte.

Der §. 19 zeigt die Art und Weise der Benutzung derartiger Niveaukarten zur Beantwortung von Fragen, die sich auf die verticale Gliederung des Bodens beziehen, welche sich entweder unmittelbar aus der Karte ergiebt oder mittelbar unter Zuhilfenahme bekannter Gesetze der Meteorologie, Geologie, Pflanzengeographie etc. ermöglicht wird. Namentlich macht der Verfasser in Bezug auf die beigegebenen Niveaukarten und zwar hinsichtlich der Ausdehnung und Begrenzung der einzelnen Schichten über den Flächeninhalt derselben, über die grössten Höhen und Tiefen, über das Volumen des über die tiefste im Gebiete vorkommende Schichte er-

*) Henry Lange's Atlas von Sachsen. Ein geographisch-physikalisch-statistisches Gemälde des Königreichs Sachsen. In 12 Karten mit erläuterndem Texte. Leipzig, F. A. Brockhaus, 1860.

hobenen Bodens, über die mittlere Erhebung des Bodens, über die mittlere Temperatur eines Orts, sowie über die Bonität des Bodens und die Vegetation desselben höchst interessante und beachtenswerthe Bemerkungen, wodurch er darthut, dass er der Verarbeitung des so reiflich gebotenen Stoffes nach allen Richtungen hin vollständig Meister ist.

Nicht minder beachtenswerth sind die Bemerkungen des §. 20 über die allgemeinen Neigungsverhältnisse des Bodens, namentlich über die mittlere Neigung einzelner Terrainabschnitte, über diejenige der Thäler und über die Tiefenlinien derselben. Nur kann Referent sich mit dem Seite 98 aufgeführten Verfahren der Bestimmung der mittleren Neigung jeder einzelnen Schicht nicht ganz einverstanden erklären.

Da nämlich der mittlere Neigungswinkel einer Schicht als das arithmetische Mittel aus den sämmtlichen in derselben vorkommenden unendlich vielen Neigungswinkeln zu betrachten ist, so kommt man dieser Definition jedenfalls sehr nahe, wenn man sich die Horizontalprojection dieser Schicht im Allgemeinen durch den Ausschnitt eines Kreisringes ersetzt denkt, welcher mit der Schicht sowohl hinsichtlich des horizontalen Flächeninhalts, als hinsichtlich der mittleren horizontalen Länge übereinstimmt. Die als Quotient aus Flächeninhalt und mittlerer Länge hervorgehende Breite des Ringstücks ist als Projection der zwischen den beiden kreisförmigen Schichtenlinien gezogenen Neigungslinie zu betrachten und es kann mit Hilfe derselben und der Schichthöhe der dazu gehörende Neigungswinkel, d. i. die gesuchte mittlere Neigung berechnet werden. Der Herr Verfasser weicht von dieser Bestimmungsweise insofern ab, als er sich die Horizontalprojection der Schicht nicht durch den Ausschnitt eines Kreisringes, sondern durch einen vollen Kreisring ersetzt denkt und — worin der wesentliche Unterschied besteht — zur Bestimmung von dessen Breite ausser seinem Flächeninhalte nicht die mittlere Länge desselben, sondern den Flächeninhalt des inneren Kreises wählt, welchen er mit dem Inhalte der von der die betreffende Schicht begrenzenden inneren Horizontalen einschliessenden Fläche annimmt. Hierdurch wird aber die Grösse des mittleren Neigungswinkels von der Zufälligkeit des letztgenannten Flächeninhalts abhängig gemacht, dessen Unzulässigkeit hierbei umsomehr in die Augen springt, wenn man es mit Schichten zu thun hat, die auf der betreffenden Karte nicht in sich zurückkehren, sondern nur theilweise auf dem dargestellten Terrain sich befinden. Der Inhalt der von der inneren Horizontalen begrenzten Fläche kann dann nur bis zur Sectionslinie genommen werden und ist grösser oder kleiner, je nachdem diese Sectionslinie entfernter oder näher der inneren Schichtenlinie liegt. Durch diese Zufälligkeiten kann es nothwendig kommen, dass für zwei Schichten, deren mittlere Neigungswinkel gleich sind, ganz verschiedene Werthe derselben gefunden werden, was nicht der Fall ist, wenn ausser den Flächeninhalten derselben die mittleren Längen mit in Betracht gezogen werden.

Endlich deutet der Herr Verfasser im §. 21 seine Ansichten über Aufstellung einer neuen und zwar einer nach geometrischen Grundsätzen behandelten Terminologie des Terrains an, welche verdienen, dass sie weiter Berücksichtigung finden. Hiernach kommen zunächst die Terrainelemente in Betracht, welches Flächenelemente sind, deren Natur durch die Krümmung zweier unmittelbar über einander befindlicher Schichtenlinien bestimmt wird. Jede dieser Schichtenlinien kann entweder gerade, convex oder concav sein und es würden hiernach, je nachdem entweder zwei gerade, oder zwei convexe, oder zwei concave, oder eine convexe und eine concave Schichtenlinie das Element begrenzen, ebene und windschiefe, convexe, concave oder endlich convex-concave Terrainelemente geben.

Die Vereinigung mehrerer Flächen- oder Terrainelemente zu einer Figur, welche sich als solche unterscheidbar von dem Angrenzenden abhebt, nennt der Verfasser ein Terrainglied und hängen mehrere solcher Glieder so mit einander zusammen, dass sie alle von einem gemeinschaftlichen Punkte oder von einer gemeinschaftlichen Linie auszugehen scheinen, so entsteht ein weit höherer Grad der Zusammensetzung, welcher mit dem Namen Terraingebiet zu bezeichnen sein möchte.

„Eine Terminologie — führt der Verfasser fort — nach ähnlichen Grundsätzen entworfen, würde keiner praktischen Anwendung oder Benützung im Wege sein, wenn sie auch nicht für einen besonderen Zweck geschaffen wurde. Sie würde weder Geologen bei der Aufsuchung der Uebereinstimmung des inneren Schichtenbaues mit der äusseren Oberfläche, noch dem Militär bei der Auffindung von Angriffspunkten und Vertheidigungslinien, noch dem Civilingenieur bei Entwerfung seiner Projecte für Communication und Bodenmelioration hinderlich sein, sondern im Gegentheile die Arbeiten derselben mächtig unterstützen. Hinderlich sein würde sie blos hohlen Speculationen und Hypothesen, denen die nackte Wahrheit der natürlichen Beschaffenheit der Oberfläche des Bodens einen fortwährenden stillen, aber entschiedenen Widerspruch entgegenstellen würde.“

Der Leser wird aus dem Mitgetheilten ersehen, dass sich auf diesem Felde wohl selten noch die Wissenschaft so eng mit der Praxis verbunden hat, dass sich gewiss beide Theile völlig befriedigt fühlen dürfen. Referent steht nicht im geringsten an, dem Verfasser für die glückliche Durchführung seiner so manches Neue enthaltenden Arbeit in dieser nur noch wenig verfolgten Richtung, sowie dem Herrn Verleger für die vorzügliche Ausstattung des Werkes und insbesondere auch der beiden beigegebenen Karten, seinen Dank und seine wahrhafte Hochachtung darzubringen.

A. Nagel.

Die Elemente der ebenen Trigonometrie. Bearbeitet von Dr. Eduard Zetzsche, Lehrer an der königl. Gewerbeschule zu Chemnitz. Altenburg. Verlagsbuchhandlung H. A. Pierer. 1861. 8. 108 S.

Wenn die Elemente der Goniometrie und Trigonometrie der Einfachheit und scharfen Umgrenzung des Gegenstandes wegen vorzugsweise eine knappe und elegante Darstellung gestatten und eine solche oft schon gefunden haben, so muss es umsomehr befremden, wenn man an einem neuen Buche über Trigonometrie gerade diese Eigenschaften nicht entdecken kann. Der Verfasser des vorliegenden Werkes hat, was Weitschweifigkeit und Schwerfälligkeit anlangt, das Möglichste geleistet. Er beginnt die Goniometrie mit dem Sinusversus. Demselben sind fünf Seiten gewidmet. Es folgen dann auf drei Seiten die Erklärung des Cosinus, Betrachtungen über seine Grösse und sein Vorzeichen, sowie über die Wiederkehr derselben absoluten Werthe desselben. Auf gleiche Weise ist auf den vier folgenden Seiten der Sinus behandelt. Um zu erklären, was ein Sinus ist, braucht der Verfasser allein zwei Seiten, und damit der Leser ja nicht zu schnell zu den übrigen Functionen gelange, ist die Darstellung durch einen Paragraphen unterbrochen, in welchem Sätze, wie die folgenden, demonstrirt werden: „Der Sinus eines Peripheriewinkels ist die Hälfte der zu ihm gehörigen Sehne in einem Kreise vom Halbmesser 1; jede Sehne irgend eines Kreises ist das Product aus dem Durchmesser des Kreises und dem Sinus des über ihr stehenden Peripheriewinkels; der Sinus und der Cosinus wachsen und nehmen durchaus nicht etwa proportional mit dem Winkel ab, u. s. w. Nach dieser Abschweifung erfährt man auf den folgenden zehn Seiten, was der Cosinusversus, die Secante, die Cosecante, die Tangente und die Cotangente sind. In dem Bisherigen sind zwar die Functionen gelegentlich an einem Kreise vom Halbmesser 1 geometrisch dargestellt worden, aber nicht genug damit werden auf S. 35 die trigonometrischen Linien als etwas Neues aufgeführt; bei ihrer Darstellung nämlich muss der Halbmesser des Kreises gleich r sein! Auf S. 37 erfährt der Schüler endlich, dass die trigonometrischen Functionen Verhältnisse zwischen den Seiten des rechtwinkligen Dreiecks sind, und damit er sogleich eine Frucht dieser neuen Erkenntniss brechen kann, ist an dieser Stelle die Berechnung der Seiten des rechtwinkligen Dreiecks eingeschaltet. Wie hier die Goniometrie durch ein Stück Trigonometrie unterbrochen ist, so befindet sich auch in dem Anhange der Goniometrie eine Herleitung der Fundamentalsätze für die Dreiecksberechnung, wohin sie doch offenbar nicht gehört. Den zweiten Abschnitt des Buches bildet die eigentliche Trigonometrie. Wir vermissen hier unter Anderem die Mollweide'schen Gleichungen

$$c \sin \tfrac{1}{2}(A-B) = (a-b) \cos \tfrac{1}{2} C$$
$$c \cos \tfrac{1}{2}(A-B) = (a+b) \sin \tfrac{1}{2} C,$$

die bei der so häufig vorkommenden Aufgabe, wo aus zwei Seiten a, b und

dem eingeschlossenen Winkel C die übrigen Stücke A, B, c zu berechnen sind, füglich nicht entbehrt werden können. Dem Buche sind drei Tafeln beigegeben, die oft mit Nutzen zu gebrauchen sind, nämlich eine Tafel für die Länge eines Bogens vom Halbmesser 1, eine Tafel der trigonometrischen Functionen von 10 zu 10 Minuten und eine Tafel der Quadrate der Zahlen von 1 bis 999. Der Druck der Formeln, namentlich die Anordnung derselben, lässt, was Uebersichtlichkeit anlangt, manches zu wünschen übrig; sonst ist die Ausstattung des Buches recht leidlich.

Dr. RUDOLF HOFFMANN.

Das Prismatoid. Eine Erweiterung der elementaren Stereometrie von THEODOR WITTSTEIN, Dr. phil. und Professor. Hannover, Hahn'sche Hofbuchhandlung. 1860. 4. 24 S.

Wie das Prisma und die Pyramide der Stereometrie dem Parallelogramm und dem Dreieck der Planimetrie entspricht, so ist das Prismatoid das Analogon des Trapezes. Das Prismatoid nun ist ein Polyeder, welches von zwei parallelen Polygonen, die ausserdem vollkommen unabhängig von einander sind, als Grundflächen, und im Allgemeinen von Dreiecken als Seitenflächen begrenzt wird, welche mit je einer Grundfläche eine Seite und mit der anderen einen Eckpunkt gemein haben. Der Koppe'sche Obelisk ist hiernach ein besonderer Fall des Prismatoids. Versteht man unter der mittleren Durchschnittsfläche des Prismatoids die Fläche der Figur, welche ein in halber Höhe parallel den beiden Grundflächen gelegter ebener Schnitt hervorbringt, so wird in vorliegender Abhandlung folgender Lehrsatz bewiesen: „Jedes Prismatoid ist der Summe dreier Pyramiden gleich, von denen eine das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen und jede der beiden anderen die mittlere Durchschnittsfläche des Prismatoids zur Grundfläche hat und deren Höhe gleich der Höhe des Prismatoids ist.“ Oder: Wenn man mit G, g die beiden Grundflächen, mit D die mittlere Durchschnittsfläche und mit h die Höhe des Prismatoids bezeichnet, so findet man allgemein den Inhalt I desselben durch die Formel

$$I=\frac{h}{3}\left(\frac{G+g}{2}+2D\right),$$

oder wenn man das arithmetische Mittel der beiden Grundflächen, $\frac{G+g}{2}$, mit M bezeichnet

$$I=\frac{h}{2}(M+2D).$$

Was die Folgerungen betrifft, die der Verfasser aus diesem Satze zieht, so müssen wir auf die Abhandlung selbst verweisen. Sie beziehen

sich nicht nur auf die Inhaltsbestimmungen specieller Formen des Prismatoids, sondern auch auf die Inhalte von Körpern, die von **Regelflächen** begrenzt sind, auf die Inhalte von **beliebigen Polyedern** und auf die angenäherte Inhaltsbestimmung von körperlichen Räumen, welche von einer **beliebigen krummen Oberfläche** begrenzt werden. Man findet bei dieser Gelegenheit die Giltigkeit der für planimetrische Inhaltsbestimmungen unter dem Namen der **Simpson'schen Formel** bekannten Regel auch für räumliche Figuren nachgewiesen. Es ist wohl kaum nöthig, zu bemerken, dass die Abhandlung des bekannten Herrn Verfassers von Seiten der Geometer alle Beachtung verdient und diese neue Erweiterung der elementaren Stereometrie nur mit Freuden begrüsst werden kann. Die äussere Ausstattung der Schrift ist vortrefflich.

Dr. Rudolf Hoffmann.

(Verspätet.)

Mathematischer Supplementband zum Grundriss der Physik und Meteorologie. Von Dr. Joh. Müller, Professor der Physik und Technologie an der Universität zu Freiburg im Breisgau. Mit 179 in den Text eingedruckten Holzschnitten. Nebst besonders gedruckten Auflösungen. Braunschweig, Druck und Verlag von Friedrich Vieweg und Sohn, 1860.

Dem Studirenden der technischen Wissenschaften, der sich nach einem vorbereitenden Cursus in der Experimentalphysik die Aufgabe stellt, tiefer in das Gebiet der Physik einzudringen, ist jedenfalls, wenn er auch in den mathematischen Wissenschaften gehörig vorbereitet ist, eine Sammlung von Aufgaben erwünscht, die überhaupt zu den lösbaren und häufiger vorkommenden gehören und bei denen er zugleich die experimentellen Grundlagen mitgetheilt erhält, auf welchen die Auflösung basirt. Das vorliegende Werkchen ist als eine mathematische Ergänzung des bekannten „Grundrisses der Physik und Meteorologie" von demselben Verfasser zu betrachten, es giebt, ohne sich tief in die Herleitung einzulassen, die bekannteren mathematisch-physikalischen Gesetze an, wobei jedem Gesetze einige Rechnungsaufgaben beigefügt sind, deren Auflösungen in den besonders abgedruckten Auflösungen, die den zweiten Theil des Werkes bilden, zu finden sind. Es sind nicht nur alle Capitel der Physik, unter Anderem auch die Achromasie und die mechanische Wärmetheorie gehörig berücksichtigt worden, sondern auch, was besonders lobend anerkannt werden muss, die Ausgleichung der Beobachtungsfehler am Schlusse kurz und deutlich, von vielen Beispielen begleitet, aufgenommen worden. Die Zahl der Aufgaben, deren Auflösungen besonders abgedruckt sind, beträgt gegen 400, so dass Demjenigen, der das Buch benutzt, hinreichende Ge-

heit gegeben ist, sich durch Beispiele Kenntniss der physikalischen
tze zu erwerben. Seiner Einrichtung nach empfiehlt sich das vor-
nde Werkchen, aus der geschäftigen Feder eines rühmlichst bekann-
Verfassers hervorgegangen, ganz besonders zum Selbststudium der
ik, nachdem vorher eine tüchtige Grundlage in der Experimental-
k gelegt worden ist. Die äussere Ausstattung ist, wie ähnliche im
ige von Friedrich Vieweg und Sohn erschienene Werke, elegant und
nichts zu wünschen übrig.

Dr. Kahl.

Bibliographie

vom 15. Juni bis 15. August 1861.

Periodische Schriften.

Abhandlungen der mathematisch-physikalischen Classe der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften. 5. Band. Leipzig, Hirzel in Comm. 8 Thlr.

Berichte über die Verhandlungen der königl. sächs. Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Mathem.-phys. Classe. Jahrg. 1860, Heft 3. Leipzig, Hirzel in Comm. ⅓ Thlr.

Sitzungsberichte der kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien. Mathem.-naturw. Classe. Jahrg. 1861, No. 1—3. Gerold's Sohn in Comm. pro compl. 16 Thlr.

Abhandlungen der königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. 9. Band. Von dem Jahre 1860. Dieterich'sche Buchh. 9⅔ Thlr.

Verhandlungen der kaiserl. Leopoldinisch-Carolinischen deutschen Akademie der Naturforscher. 28. Band. Jena, Frommann. 12 Thlr.

Schriften, neueste, der naturforschenden Gesellschaft in Danzig. 6. Bd., Heft 2 und 3. Anhuth in Comm. 1⅓ Thlr.

Mélanges physiques et chimiques tirées du bulletin physico-mathém. de l'académie de Pétersbourg. Tome IV, livr. 5 *et* 6. Leipzig, Voss in Comm. 28 Ngr.

Reine Mathematik.

Hoffmann, L., Mathematisches Wörterbuch. 16. Lieferung. Berlin, Bosselmann. ⅔ Thlr.

Lübsen, H. B., Ausführliches Lehrbuch der Arithmetik und Algebra. 5. Auflage. Hamburg, Meissner. 1⅓ Thlr.

Rauch, C., Planimetrie und Constructionslehre. Hannover, Rümpler. 1⅙ Thlr.

Kerz, F., Die allgemeine Umkehrung der Reihen, nebst Anwendung derselben auf die vollständige Lösung numerischer Gleichungen. 2. Abth. Darmstadt, Jonghaus. 1 Thlr.

Fischer, H., V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen dargestellt. Halle, Schmidt's Verlagsbuchh. 1 Thlr.

Angewandte Mathematik.

Steiner, C. F. C., Geometrische Constructionslehre und Linear-Perspective für Künstler und Gewerke. 2. Auflage. Bearbeitet von W. Hertel. 2 Theile. Leipzig, Deckmann. 2⅔ Thlr.

Wetzel, E., Wandkarte für den Unterricht in der mathematischen Geographie. 9 Blatt. Berlin, Reimer. 3⅓ Thlr.

Baeyer, J. J., Ueber die Grösse und Figur der Erde. Eine Denkschrift zur Begründung einer mittel-europäischen Gradmessung nebst einer Uebersichtskarte. Berlin, Reimer. ⅔ Thlr.

Fils, A. W., Barometer-Höhen-Messungen von dem Herzogthum Sachsen-Meiningen, ausgef. in den Jahren 1855—59. Meiningen, Brückner & Renner. 24 Ngr.

Peters, C. A. F., Ueber die Bestimmung des Längenunterschiedes zwischen Altona und Schwerin, ausgef. im Jahre 1858 durch galvanische Signale. Hamburg, Perthes-Besser & Mauke. 2⅔ Thlr.

Drechsler, Dr. Ad., Astronomische Vorträge über Stellung, Beschaffenheit und Bewegung der Gestirne, gehalten zu Dresden. 2. Auflage. Dresden, Kunze. ⅔ Thlr.

Mädler, J. H. v., Ueber totale Sonnenfinsternisse, mit besonderer Berücksichtigung der Finsterniss vom 18. Juli 1860. Jena, Frommann. 4⅔ Thlr.

Guichard, W. F., Die Grundgesetze der Dynamik. Leipzig, Holze. ⅙ Thlr.

Schmidt, G., Theorie der Dampfmaschinen. Freiberg, Engelhardt. 1⅔ Thlr.

Saxby, S. M., *The projection and calculation of the sphere, for young sea officers: being a complete initiation into nautical astronomy. London, Longman.* 5 *sh.*

Physik.

Gräf, C., Physikalische Generalkarte. I. Vertheilung der Luftströmungen, der Hydrometeore. Hydrographie der Erde. II. Isothermen der Erde. Verbreitung der Vulcane, der wichtigsten Bäume und Strauchgewächse, der wichtigsten Culturgewächse. Weimar, Landes-Industrie-Comptoir. ⅔ Thlr.

Reimann, E. J., Das Luftmeer. Eine physikalische Darstellung für gebildete Laien. Mit einem Vorworte von E. A. Rossmässler. 2. Auflage. Breslau, Leuckart. 1 Thlr.

VALENTIN, G., Die Untersuchung der Pflanzen- und der Thiergewebe in polarisirtem Lichte. Leipzig, Engelmann. 2⅙ Thlr.

KESSELMEYER, P. A., Ueber den Ursprung der Meteorsteine. Versuch eines Quellenverzeichnisses zur Literatur über Meteoriten von O. BUCHNER. Frankfurt a. M., Brönner. 3⅓ Thlr.

ABBE, E., Erfahrungsmässige Begründung des Satzes von der Aequivalenz zwischen Wärme und mechanissher Arbeit. Inaugural-Dissertation. Göttingen, Vanderhoek & Rupprecht's Verlag. 8 Ngr.

DOVE, H. W., Das Gesetz der Stürme in seiner Beziehung zu den allgemeinen Bewegungen der Atmosphäre. 2. Auflage. Berlin, Reimer. 1 Thlr.

PRESTEL, M. A. F., Die thermische Windrose für Nord-West-Deutschland. Jena, Frommann. 1⅙ Thlr.

MATTHIESSEN, L., Beiträge zur Kenntniss der Anordnung und Bindung der Elektricität auf isolirten Leitern. Eine experimentelle Untersuchung. Jever, Druck und Verlag von L. Mettcker & Söhne.

HANKEL, W. G., Elektrische Untersuchungen. 5. Abhandl.: Maassbestimmungen der elektromotorischen Kräfte. 1. Theil. Leipzig, Hirzel. 16 Ngr.

ZIMMERMANN, W. F. A., Magnetismus und Mesmerismus, oder physische und geistige Kräfte der Natur. 4. und 5. Lieferung. Berlin, Thiele. ⅙ Thlr.

DRION, CH., ET E. FERNET, *Traité de physique élémentaire, suivi de problèmes. Paris, Masson & fils.* 1 Thlr. 26 Ngr.

PÉCLET, E., *Traité de la chaleur considérée dans ses applications.* 3. gänzlich umgearbeitete Auflage. 3. Bd. (Schlussband.) Ebend. 3 Thlr. 6 Ngr.

LEYMERIE, A., *Eléments de minéralogie et de géologie.* Ebendas. 1 Thlr. 24 Ngr.

Literaturzeitung.

Recensionen.

Anfangsgründe der beschreibenden Geometrie, der analytischen Geometrie, der Kegelschnitte und der einfachen Reihen. Von Dr. Ed. Fasbender, Professor am königl. preussischen Gymnasium zu Thorn. Essen, Bädeker. 1860.

Die vorliegende Schrift soll dem Unterrichte auf Realschulen zur Grundlage dienen und eine Ergänzung zu Prof. Koppe's mathematischen Lehrbüchern bilden, da letztere seit dem Erscheinen der preussischen Unterrichtsordnung für Realschulen (d. d. 6. October 1859) nicht mehr ausreichen. Diesem Zwecke gemäss wird man begreiflicher Weise an die kleine Schrift von 209 Seiten nicht den Anspruch der Vollständigkeit machen, wohl aber kann man verlangen, dass das Gegebene mit richtigem pädagogischen Takte ausgewählt und begrenzt, und dass die Darstellung wissenschaftlich genau sei. Wie wenig der Verfasser selbst diesen bescheidenen Forderungen genügt hat, wird das Folgende zeigen.

In der descriptiven Geometrie beschränkt sich der Verfasser auf die geradlinigen Gebilde; er hört gerade da auf, wo die Sache interessant und für die Praxis wichtig zu werden anfängt. So wenig man den Realschulen zumuthen wird, die descriptive Darstellung von complicirten krummen Flächen und deren Durchschnitten vorzunehmen, so gewiss ist dagegen die Forderung berechtigt, dass die Schüler wenigstens die in der Stereometrie abgehandelten drei krummen Flächen und deren Durchschnitte mit Ebenen zu construiren verstehen müssen. Nur unter dieser Minimalbedingung erscheint die descriptive Geometrie als das, was sie sein soll, nämlich als Schwester der Stereometrie; im vorliegenden Buche spielt sie nur die untergeordnete Rolle einer Halbschwester oder eines Aschenbrödels. Es scheint dem Verfasser ganz entgangen zu sein, welchen sonderbaren Eindruck es machen muss, wenn einer seiner Schüler beim Eintritt in eine polytechnische Schule sagt: „ich habe bei Herrn Professor Fasbender descriptive Geometrie und Kegelschnitte gehabt, aber die Fundamentalaufgabe der Kegelschnittslehre (nämlich aus dem charakteristischen Dreieck des Kegels und der gegebenen Lage der schneidenden Ebene den Schnitt

zu construiren) kann ich nicht lösen." — Freilich wird dieser Fall selten vorkommen, weil der Verfasser nicht Reallehrer, sondern Gymnasiallehrer ist, aber ebendeswegen hätte er es unterlassen sollen, für Realschulen überhaupt und speciell über descriptive Geometrie zu schreiben. Sowie sich selbst der gelehrte Patholog hüten wird, ein Lehrbuch der operativen Chirurgie herauszugeben, so sollte auch der Mathematiker nur dann ein Schulbuch über descriptive Geometrie schreiben, wenn er als guter Zeichner völlig mit ihr vertraut ist und darin Unterricht ertheilt hat. Ganz besonders aber in Beziehung auf die Realschulen begeht man, den Erfahrungen des Verfassers zu Folge, einen grossen Fehler, wenn man meint, es liesse sich da die descriptive Geometrie im Sinne von Monge, Hachette, Gugler etc. so ohne Weiteres tractiren. Dieser pädagogische Missgriff ist ein so verbreiteter, dass er einer genaueren Auseinandersetzung bedarf. Jedermann wird zugeben, dass die Vorstellungen von begrenzten Geraden, begrenzten Ebenen etc. anschaulicher und für einen jugendlichen Verstand fasslicher sind, als die Vorstellungen von unbegrenzten Geraden, unbegrenzten Ebenen etc.; in der That müssen die letzteren Vorstellungen erst durch Abstraction, nämlich durch Negation der Grenzen erworben werden. Was für die Vorstellung dieser verschiedenen Gebilde gilt, bleibt auch richtig für deren graphische Darstellung (die ohne jene doch nichts werth wäre), und wer demnach die alte gute Regel, vom Leichten zum Schweren fortzuschreiten, festhalten will, der muss seinen Unterricht in der darstellenden Geometrie mit der Zeichnung begrenzter Gebilde anfangen. Hierdurch entstehen zwei Curse des geometrischen Zeichnens; der erste, den man kurzweg Projectionslehre nennen kann, hat die Aufgabe, „jeden begrenzten Körper in jeder beliebigen Lage graphisch darzustellen;" der zweite Cursus beschäftigt sich mit der Darstellung unbegrenzter Gebilde und ist die descriptive Geometrie in dem oben angeführten Sinne. Ob sich diese Eintheilung wissenschaftlich rechtfertigen lässt, ist vielleicht fraglich; ohne Zweifel aber ist sie pädagogisch zweckmässig, endlich ist sie auch praktisch, denn im Leben handelt es sich immer um begrenzte Körper, und in der That wüsste Referent weder in der Baukunst, noch in der Maschinenlehre einen Fall, bei welchem man nicht mit einer guten Projectionslehre auskäme. Gelegentlich sei hier bemerkt, dass der verdienstvolle C. T. Anger durch sein kleines Schriftchen: „Elemente der Projectionslehre, Danzig 1858" bereits eine sehr nette, wenn auch für Realschulen nicht hinreichende Darstellung der Projectionslehre gegeben hat; eine weitere Ausarbeitung der vier ersten Abschnitte dieses Werkchens (mit Hinzufügung der Schnitte von Körpern und etwa der einfacheren Schattenconstructionen) würde für die Zwecke der Realschule recht gut passen, während des Verfassers dürftiger *Auszug aus* der descriptiven Geometrie zu gar nichts zu gebrauchen ist.

Der zweite Abschnitt führt den Titel: „Analytische Geometrie", der

dritte ist überschrieben: „Die Kegelschnitte"; hiernach sollte man denken, dass der dritte Abschnitt ebenso wesentlich vom zweiten verschieden sei, wie dieser vom ersten („beschreibende Geometrie"), dies ist aber keineswegs der Fall, denn die Kegelschnitte werden fast durchgängig rein analytisch behandelt. Warum der Kreis zu Abschnitt II, die Ellipse dagegen zu Abschnitt III gehört, hat Referent nicht ergründen können; es kommt allerdings auf solche Kleinigkeiten nicht viel an, bei Schulbüchern aber soll man selbst in den Eintheilungen genau sein, um die Logik nicht zu verderben. Von den Abschnitten II und III lässt sich im Ganzen sagen, dass zwar viel und richtig gerechnet wird, jedoch mit wenig Geschick und Eleganz. Die Gleichungen der Geraden im Raume z. B. schreibt der Verfasser

$$x = az + b, \quad y = cz + d,$$

und denkt sich dabei die Ebene xy horizontal liegend. Hiergegen ist zweierlei zu erinnern. Die Coefficienten a und c bestimmen die Richtung der Geraden und sind absolute Zahlen; dagegen bedeuten b und d Längenzahlen, nämlich die Coordinaten der Horizontalspur der Geraden. So verschiedenartige Grössen pflegt Jeder, der auf zweckmässige Bezeichnung hält, verschiedenartig zu bezeichnen, und daher hätte der Verfasser besser gethan, der französischen Schreibweise

$$x = Az + a, \quad y = Bz + b$$

zu folgen, wodurch auch die Formeln für den Durchschnitt von Gerade und Ebene, Neigungswinkel etc. eine symmetrische, leicht zu merkende Gestalt bekommen haben würden. Die zweite Erinnerung ist wieder pädagogischer Natur. Wenn ein guter Lehrer erst descriptive und nachher analytische Geometrie vorzutragen hat, so wird er gewiss nicht versäumen, die oft vorhandene Concordanz beider Betrachtungsweisen hervorzuheben; dass die analytische Geometrie bei vielen Aufgaben dieselben Grössen berechnet, welche die beschreibende Geometrie construirt, und dass sich beide Wissenschaften gegenseitig wesentliche Dienste leisten können, das ist gerade für den Unterricht eine sehr fruchtbare Wahrheit. Um sie zu erkennen, muss man natürlicher Weise eine gleichförmige Anschauung benutzen, und eben deswegen ist es ein didactischer Missgriff, wenn der Verfasser in der descriptiven Geometrie die Gerade durch Horizontal- und Verticalprojection bestimmt, während er sie in der analytischen Geometrie auf die beiden Verticalebenen projicirt.

Der letzte Abschnitt, welcher „die einfachen Reihen" behandelt, enthält so viele Fehler, dass Referent nur einige der gröbsten rügen kann. Auf S. 193 wird die Allgemeingültigkeit der Relation

$$(m)_k + (m)_{k-1}(n)_1 + (m)_{k-2}(n)_2 + \ldots = (m+n)_k$$

aus dem Umstande geschlossen, dass diese Gleichung für alle ganzen positiven m und n richtig bleibt; wenn dagegen Jemand behauptete, die *Summe jener Reihe sei* nicht $(m+n)_k$, sondern

$$(m+n)_k\,(1-\sin mn\pi)$$

oder eine ähnliche Function, die bei ganzen positiven m und n mit $(m+n)_k$ zusammenfällt, so möchte es dem Verfasser schwer werden, sein Räsonnement aufrecht zu erhalten. Allerdings lässt sich dieses Räsonnement durch eine strenge Schlussweise ersetzen, aber dann muss vorher bewiesen sein, dass zwei ganze rationale Functionen gleichhohen Grades identisch sind, wenn die Anzahl der Werthe, worin sie übereinstimmen, mehr beträgt als der Grad der Functionen. — In §. 198 wird a^x mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten in eine Reihe verwandelt; kürzer und strenger wäre die Anwendung des Satzes

$$Lim\left\{\left(1+\frac{x}{\omega}\right)^{\omega}\right\}=e^x$$

gewesen. Derselbe Tadel trifft die Entwickelungen der logarithmischen Reihe in §. 199 und der Reihen für $\cos x$ und $\sin x$ in §. 201. Der nächste Paragraph enthält wieder zwei Unrichtigkeiten. Erst wird die Exponentialreihe, deren Giltigkeit nur für reelle x nachgewiesen war, auf imaginäre x ausgedehnt, ohne dass von c^{ix} irgend eine Definition gegeben würde, und dann benutzt der Verfasser auch die Formel $e^u \cdot e^v = e^{u+v}$ für imaginäre u und v, obschon deren algebraischer Beweis sich immer nur auf reelle u und v bezieht. Ebenso geht es in §. 203, wo plötzlich die logarithmischen Reihen mit imaginären Variabelen genommen werden. — Der Verfasser gesteht zwar auf Seite 1 der Vorrede, dass man vielleicht eine streng wissenschaftliche Darstellung im letzten Abschnitte vermissen werde, aber dies ist keine Entschuldigung, da es nicht an Methoden fehlt, um die wenigen Reihen, welche der Verfasser entwickeln wollte, vollkommen genau zu erhalten. Dagegen macht der ganze letzte Abschnitt den Eindruck, als sei er aus einem alten Hefte mühselig genug zusammengestoppelt. Nach diesen Erörterungen würde es Referent nur bedauern, wenn irgend eine Realschule das vorliegende Werk einführen wollte.

Schlömilch.

Neue Theorie der Elektricität und des Magnetismus in ihren Beziehungen auf Schall, Licht und Wärme. Von Ph. Spiller. Berlin 1861.

Das vorstehend genannte, der Redaction dieser Zeitschrift zur Besprechung übersendete Werkchen ist von seinem Verfasser selbst als eine dritte, erweiterte Auflage des 1855 unter dem Titel: „Gemeinschaftliche Principien für die Erscheinungen des Schalles, des Lichtes, der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität“ und 1858 unter dem Titel: „Das Phantom der Imponderabilien in der Physik“ erschienenen Schriftchens bezeichnet worden. Das letztere wurde bereits im vierten Jahrgange dieser *Zeitschrift* (1859) und zwar Seite 89 ff. der zugehörigen Literaturzeitung *ausführlich* besprochen. Mit dem geänderten Titel ändert sich natürlich

auch der Standpunkt, von welchem das Schriftchen zu betrachten ist; für die Beleuchtung der dritten Auflage drängt sich daher gewiss vor Allem die Frage in den Vordergrund: Ist die Erweiterung eine solche, dass das Ganze jetzt füglich mit dem Namen einer Theorie der Elektricität und des Magnetismus belegt werden kann? Um die Antwort auf diese Frage zu finden, habe ich den Inhalt der neuen Auflage mit dem Inhalte des „Phantoms" gewissenhaft verglichen und gebe im Folgenden zunächst einen kurzen, theilweise in der früheren Besprechung des „Phantoms" gewissermaassen seine Ergänzung findenden Ueberblick über den Inhalt, um dabei alle wesentlichen Erweiterungen hervorzuheben und besonders zu beleuchten.

Seite 1—6 zeigen sich in unverändertem Wortlaute; Zweck des Schriftchens ist: das Wesen des Magnetismus und der Elektricität zu ergründen; der Weg dazu aber ist die Forschung nach gemeinschaftlichen Principien, damit dadurch der Zusammenhang der unter sich verbundenen Thatsachen klar hervortrete.

Auf Seite 6—11 folgen die Zweifel an der Materialität der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität. Zu den in der früheren Auflage schon enthaltenen wurden noch zwei hinzugefügt: es wird hingewiesen auf das Auftreten von Wärme, wenn Eis an Eis gerieben wird, und auf die gewaltige Kraft, mit welcher sich die Körper bekanntlich beim Erkalten zusammenziehen, wovon die Ursache „absolut unmöglich" in einem imponderabeln Stoffe liegen könne, „und gewiss am allerwenigsten, wenn seine Menge abnimmt." Wenn man auch die letzte Behauptung nicht ohne Weiteres gelten zu lassen geneigt ist, so muss man doch jedenfalls zugeben, dass die Zweifel an der Materialität der Imponderabilien ganz gerechtfertigt sind (vergl. auch Jahrgang III dieser Zeitschrift S. 366—368). Auf Licht und Wärme ist die Undulationstheorie bis jetzt im weitesten Umfange angewendet worden, und die dadurch erzielten Erfolge sind so überraschend, dass man unbedenklich die stoffliche Auffassung verlassen und Licht und Wärme als blose Bewegungszustände bezeichnen kann ja muss, nachdem beim Licht und bei der gestrahlten Wärme selbst Aufschlüsse über die Art der schwingenden Bewegung erlangt worden sind und sich selbst bei der geleiteten Wärme die Folgerungen der „mechanischen Theorie" im schönsten Einklange mit der Wirklichkeit gezeigt haben. Es bleiben daher eigentlich nur zwei Imponderabilien übrig, nämlich Magnetismus und Elektricität. Von den Zweifeln aber, welche Herr Spiller in Bezug auf diese beiden aufführt, lassen sich mehrere ganz leicht selbst dann beseitigen, wenn man die positive und negative Elektricität als zwei imponderabele Materien betrachtet, dabei aber festhält, dass diese Materien durch Reiben etc. nicht erzeugt, sondern blos von einander geschieden werden; die Thatsachen, auf welche sich diese Zweifel stützen, sprechen also keineswegs

gegen die dualistische Theorie und wären daher in der neuen Auflage besser ganz unberücksichtigt geblieben. Ganz zweckmässig hätte der dadurch gewonnene Raum zu einer scharfen und klaren Fassung und Begründung des Satzes auf Seite 9 verwendet werden können: „Wenn nun Bewegung am Ruhenden den Zustand ändert, ohne eine fortschreitende Bewegung am Ganzen*) zu erzeugen, so kann er nur ein Bewegungszustand der Molekel sein, den wir freilich wegen der geringen Elongation und der kurzen Dauer jeder Phase sinnlich nicht wahrnehmen können; es ist keine Vernichtung, sondern eine Umwandlung der Bewegungsart.“ So viel Wahres von Gewicht nämlich in diesem Satze zu liegen scheint, so unbestimmt ist gleichwohl, was eigentlich darin liegt oder liegen soll, was damit gesagt sein soll. Das Wort „Zustand“ im Vordersatze hat doch offenbar eine weit allgemeinere, umfassendere Bedeutung, als das Wort „Bewegungszustand“ im Nachsatze; eine Aenderung des Zustandes kann auch eine Aenderung des Glanzes, der Durchsichtigkeit, der Farbe, der Structur, namentlich der Dichte, Härte, Elasticität und Festigkeit sein; letztere ändern sich oft durch Bewegung einzelner Theilchen (?Molekel) des Körpers, z. B. Glanz und Dichte beim Poliren, oder beim Ritzen der Oberfläche u. s. w.; demnach wären Glanz, Dichte etc. ebenfalls Bewegungszustände der Molekel? denn das Ganze hat ja keine fortschreitende Bewegung erhalten? Wie aber, wenn das Ganze eine drehende Bewegung erhält? Trotzdem kann es im Vordersatze nicht gut „Bewegungszustand“ heissen; denn dadurch verlöre der ganze (überdies nur einseitige) Satz jeden Gehalt und alle Beweiskraft dafür, dass die Ursache der elektrischen und magnetischen Erscheinungen in Molekularbewegungen zu suchen ist, weil der Nachweis fehlt, dass der elektrische und magnetische „Zustand“ ein „Bewegungszustand“ ist.

Eine längere Erweiterung enthalten Seite 11—16, nämlich: einige Elementarbegriffe über Bewegungsarten und die sie bewirkenden Kräfte. An den Inhalt dieser Seiten ist ein strenger Maassstab zu legen, sofern es hier nicht galt, etwas Neues zu schaffen, sondern Bekanntes klar und bestimmt wiederzugeben. Von diesem Gesichtspunkte erscheint aber die betreffende neu hinzugekommene Stelle zum Theil ziemlich unvollkommen. Vor Allem sollten und dürfen in einer Schrift, in welcher „für die ganze Physik mit allen ihren Erscheinungen eine rein dynamische Grundlage“ gesucht wird, die Erklärungen und Eintheilungen nicht so ungenügend sein, wie hier z. B. auf Seite 11 die Eintheilung der Bewegung der Art nach in:

„1) fortschreitende, bei welcher alle Punkte ihren Ort verlassen „und entweder in offenen oder geschlossenen Bahnen sich be-

*) *Die Worte* „am Ganzen“ fehlen in der zweiten Auflage.

„wegen, ohne auf demselben Wege zurückzukehren (geradlinige, „krummlinige, circulirende Bewegung);

„2) rotirende um eine durch den Körper gehende gerade Linie, „von welcher alle seine Punkte in derselben Entfernung bleiben;

„3) oscillirende, wobei er in abwechselndem Hin- und Rück„gange innerhalb gewisser Grenzen stets dieselbe Bahn zurück„legt.“

Ein Zusammenwerfen ferner der gleichförmigen und der periodischen Bewegung, eine Verwechselung von „Geschwindigkeit“ mit „Bewegung“, von „reflectiren“ mit „brechen“ (S. 34), von „Beharrungszustand“ mit „Beharrungsvermögen“ (S. 43) und dergleichen zeugt nicht eben von starkem Vertrautsein mit der Dynamik. An ähnlichen Schwächen leiden noch mehrere Stellen dieses Abschnittes, namentlich auf Seite 15; ebenso auf Seite 37 und 39.

Hierauf folgen auf Seite 16—39 die Beweise für die innige Verwandtschaft zwischen Schall, Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus. Für diese Verwandtschaft werden einige Belege mehr aufgeführt, als in der zweiten Auflage. Die Verwandtschaft lässt sich nicht hinwegleugnen, sie ist in vielen Stücken augenscheinlich vorhanden*); eine deutlich ausgeprägte Aehnlichkeit in allen Stücken dagegen, oder eine vollkommene Uebereinstimmung lässt sich bis jetzt weder nachweisen, noch auch erwarten. Aus der vorhandenen Verwandtschaft zwischen Schall, Wärme, Licht, Elektricität und Magnetismus lässt sich vermuthen, „dass in ihnen allen etwas Gemeinsames existirt;“ für diese Vermuthung spricht ferner der Umstand, dass sie alle gleiche oder doch ähnliche Entstehungsursachen haben, dass sie sich förmlich in einander verwandeln lassen; daher müssen denn auch Elektricität und Magnetismus, wie Schall, Licht und Wärme, Molecularbewegungs-Erscheinungen sein, und zwar sind sie einfache oder zusammengesetzte oscillatorische Erscheinungen; ihre äusseren Unterschiede aber sind nur [?]

*) Verfehlt jedoch scheint es mir, wenn man die durchsichtigen Körper mit den Leitern der Elektricität zusammenstellt; ich möchte vielmehr jetzt noch wie früher (vergl. S. 372 Jahrg. III und S. 132 Jahrg. IV dieser Zeitschr.) und besonders, nachdem ich gesehen, dass auch von Anderen die Influenzerscheinungen ebenfalls als Strahlung bezeichnet wurden (vergl. u. A. Poggendorf's Annalen Bd. 84, S. 273; auch Fortschritte der Physik im Jahre 1849, Berlin 1853, S. 14), auch für die Elektricität den Unterschied zwischen Leitung und Strahlung festhalten, welchen Herr Spiller (S. 34) für diese Erscheinungen bei der Wärme aufstellt, nämlich: Strahlung = Fortpflanzung der Wellenbewegung im Aether, Leitung = Fortpflanzung derselben in der Materie. Dann sind aber die elektrischen Leiter mit den undurchsichtigen Körpern zusammenzuhalten; bekanntlich sind nun aber auch in der That die undurchsichtigen, die Elektricität dagegen gut leitenden Metalle zwar gute Wärmeleiter, dagegen nicht geschickt, die gestrahlte Wärme in sich fortzupflanzen. Dann braucht man auch nicht in den schlechten Leitern „stehende“, in den guten „fortschreitende“ Bewegungen vorauszusetzen. Ebenso ist die Phosphorescenz wohl besser mit der elektrostatischen Ladung auf gleiche Stufe zu stellen.

durch die Natur der Körper bedingt, welche die Uebertragung vermitteln (S. 37), und zwar sind (nach Seite 26 und 34):

die Töne Schwingungen der kleinsten Massentheilchen eines Körpers;

Licht ohne Wärme Aetherschwingungen;

Licht mit Wärme vereinte Schwingungen des Aethers und der von ihm durchdrungenen Körper (? Körpertheilchen);

Wärme ohne Licht Schwingungen der Molekel irdischer Körper mit einer für Licht noch unzureichenden Schwingungszahl des durchdringenden Aethers."

„Wird also Licht durch dunkle Körper absorbirt und in Wärme verwandelt, so will dies nichts weiter sagen, als dass ohne Aenderung des Bewegungsmomentes die äusserst raschen Schwingungen des Aethers verwandelt werden in langsamere der irdischen massenreichen Körper." „Da es keinen Körper giebt, welcher fähig wäre, die Wärme abzuschliessen, so muss alles Materielle als solches entweder unmittelbar zu Wärmeschwingungen angeregt werden können, oder alles Materielle wird, weil es von dem raumerfüllenden Aether durchdrungen ist, in seine Bewegungen hineingezogen. Die Lichtschwingungen sprechen für die zweite Alternative [wie so?], woraus sich auch, weil die Aetherschwingungen in den Körpern einen Widerstand finden, der sein [wessen?] an sich geringes Bewegungsmoment fort und fort summirt [weshalb?], der bedeutende mechanische Erfolg der Wärmeschwingungen in den irdischen Körpern erklären lässt. Die blosen Aetherschwingungen an sich können ein solches mechanisches Moment nicht haben." Aber doch war das Bewegungsmoment nicht geändert worden, und doch dehnen sich die von Wärmestrahlen getroffenen Körper ebenso gut und ebenso kräftig aus, als die durch Leitung erwärmten; da nun bei der Strahlung die Bewegung eben nur im Aether fortgepflanzt wird, so muss doch das Bewegungsmoment schon vollständig in den Aetherschwingungen enthalten gewesen sein. Besonders hervorzuheben wäre an dieser Stelle noch gewesen, dass sich auch umgekehrt Wärme in Licht umsetzen kann, denn glühende Körper, z. B. auch glühender Kohlenstoff in den Flammen, leuchten, und zwar wird das Eisen früher roth- als weissglühend, auch folgen die Anlauffarben beim Stahl mit zunehmender Hitze nahezu auf einander, wie die farbigen Lichtstrahlen bezüglich ihrer Schwingungszahlen. Dass überhaupt Aetherschwingungen die materiellen Körpertheilchen beeinflussen, zur Bewegung hinreissen können, zeigt ausser der chemischen Wirkung der Lichtstrahlen auch die Phosphorescenz gewisser Stoffe nach dem Aufhören der von aussen kommenden Beleuchtung; dass umgekehrt die Körpertheilchen auch von Einfluss auf die Schwingungen des Aethers sind, beweist *unter Anderem* die Fluorescenz oder das unsichtbare Licht von Stokes. *So kann auch* gestrahlte Wärme, in einem guten Leiter angelangt, in

diesem weiter geleitet werden, aber es ist zu betonen, dass die Wärme zwar im Aether und auch in materiellen Körpern fortgepflanzt werden kann, dass aber die irdische Materie nicht jedes Mal bei der Fortpflanzung betheiligt sein muss.

Vergebens sucht man neben den obigen Unterschieden zwischen Schall, Licht und Wärme eine Andeutung über Elektricität und Magnetismus; es sind weder an den angezogenen Stellen, noch sonst wo die Erklärungen aller fünf hierher gehörigen Bewegungsformen scharf und bündig zusammen gestellt und daraus die Unterschiede zwischen Schall, Wärme, Licht und Elektricität bestimmt und klar hervorgehoben, ja es findet sich sogar nirgends eine erschöpfende und ausführliche Erklärung der Wärmeschwingungen oder der elektrischen und magnetischen Schwingungen. Bei diesem schon früher (S. 93 der Literaturzeitung des Jahrg. IV dieser Zeitschr.) gerügten Uebelstande bleibt wiederum nichts übrig, als den Versuch zu machen, aus den an verschiedenen Stellen zerstreuten Andeutungen die nöthigen Erklärungen zusammenzustellen oder die früher gegebenen unter Benutzung der in der neuen Auflage angebrachten Verbesserungen umzugestalten.

1. Die Wärme (S. 39 – 51).

Herr Spiller erklärt sich (mit Gründen, die ich nicht stichhaltig nennen kann) zunächst wiederum gegen die bekannte, namentlich auch von Clausius und Redtenbacher festgehaltene Ansicht, dass die Atome der Körper von Aethertheilchen eingehüllt sein, welche allein oder mit den Körpertheilchen zugleich in rotirenden oder radialen Schwingungen begriffen sind und nimmt an, „dass die Wärme aus Schwingungen der irdischen Körper besteht, wobei die Gleichgewichtspunkte der Molekel selbst nach jenseits und diesseits der Gleichgewichtslage in allen beliebigen Ebenen schwingen. Dass sich die Atome nicht um, sondern mit ihren Gleichgewichtspunkten fortschreitend [?] bewegen müssen, ist schon aus dem bedeutenden mechanischen Aequivalente klar [wie so?]. Da bei der geleiteten Wärme nicht Wärme-Interferenz-Erscheinungen entstehen, so ist dies ebenfalls ein Zeichen, dass die Leitung der Wärme durch die Bewegung der Körpertheile selbst in der Art stattfindet, dass nicht Verdichtungs- und Verdünnungswellen entstehen, sondern dass nur nach der Wärmequelle hin die Geschwindigkeit und Amplitude der schwingenden Theile nach und nach bis zu einer gewissen Grenze wächst.“

Abermals werden unter Anderem die Erscheinungen am Termophon als directer Beweis dafür geltend gemacht; zwei neue Beweise sind in der neuen Auflage hinzugefügt: „ein recht reiner Wassertropfen auf einem erwärmten Platinbleche gestaltet sich bei der allmäligen Abkühlung stern-

förmig, bildet eine Wärmefigur" und „ein Tropfen auf einer Metallschiene zieht sich von einer erwärmten Stelle nach einer weniger warmen"; auch diese Beweise sind, wie die anderen, wenigstens durchaus nicht entscheidend, denn ebenso leicht lassen sich die angeführten Erscheinungen aus der stossenden Rückwirkung der an den heissesten Stellen reichlicher verdampfenden und kräftig expandirenden Flüssigkeitstheile erklären. Die somit in ihrer Begründung misslungene Erklärung der Wärmeschwingungen ist ferner wenigstens insofern unbestimmt und ungenügend, als über die Art der offenbar einfachen Schwingungen [Quer- oder Längsschwingungen?] und über die Gestalt der Schwingungsbahnen nichts gesagt ist. Dass unter den Gleichgewichtspunkten der Molekel die Schwerpunkte derselben zu verstehen sind, zeigen mehrere, in der neuen Auflage veränderte Stellen, z. B. S. 41, 57, 72, 83. Dadurch ist aber doch auch der Unterschied zwischen Wärmeschwingungen und tönenden Schwingungen aufgehoben, beide sind anscheinend gleichbedeutend. Wenn nun endlich die Wärmeschwingungen blos Schwingungen der materiellen Molekel sind, wie kann dann (S. 43) der „kosmische Aether bei der Wärmestrahlung das Fortpflanzungsmittel" für die Wärmeschwingungen sein?

In dem nun folgenden Versuche, die vorstehenden Annahmen zur Erklärung der Wärmeerscheinungen zu verwenden, herrscht zum Theil die alte Unklarheit, fehlt es selbst nicht an Widersprüchen. Mit der Temperatur soll die Amplitude der Wärmeschwingungen wachsen, d. h. „den Körper ausdehnen", und doch fehlt der Nachweis, dass die Grösse der Amplitude der Schwingungen der Theilchen mit dem Volumen des ganzen Körpers etwas zu schaffen hat. Und daneben soll, wenn zugeführte Wärme nicht im Stande ist, die Schwingungsweise, also die Ausdehnung zu ändern, ihr Einfluss die Schwingungszahl oder Temperatur, d. i. die lebendige Kraft der Molekel betreffen, und bei plötzlicher Zusammendrückung soll mit der Raumverminderung die Amplitude sich vermindern, das Bewegungsmoment jedes Molekels durch das der näher gerückten Nachbarn unterstützt, daher die Schwingungszahl vermehrt und so Wärme frei werden. Die Wirkungen der zugeführten Wärme sind bekanntlich Temperaturerhöhung und Veränderungen in der inneren Anordnung der Theilchen (Clausius: innere Arbeit) und Ausdehnung (Clausius: äussere Arbeit); das zugeführte Schwingungsmoment vertheilt sich also in zwei Posten, und Herr Spiller hätte hier in Zahlen zeigen sollen, wie viel von dem zugeführten Schwingungsmomente in dem oder jenem Falle zu der einen und zu der anderen Wirkung verwendet wird. Die Erklärung der gebundenen Wärme und der Wärmecapacität fällt zusammen; „dass die Wärmecapacität verschiedener Körper verschieden ist, aber die Atome der verschiedenen [?aller] einfachen Stoffe dieselbe Capacität besitzen", hätte nicht als Thatsache hingestellt, sondern als Folgerung abgeleitet werden sollen. — Was anderentheils die neu hinzugekommenen Er-

klärungen für Verdampfung, Destillation und Sublimation anlangt, so sind dieselben ziemlich gezwungen *), ja kaum begreiflich.

2. Der elektrische Strom (S. 51—57).

Auch in diesem Abschnitte ist keine wesentliche Verbesserung zu erkennen, doch lassen einige kleine Abänderungen die Ansicht Herrn Spiller's deutlicher hervortreten. Die „zusammengesetzten" Schwingungen des elektrischen Stromes unterscheiden sich von den einfachen Wärmeschwingungen lediglich dadurch, dass bei letzteren die „Atomgruppen der Molekel" nur mit ihren Schwer- oder Gleichgewichtspunkten, im letzteren Falle aber nur um diese Punkte schwingen, und zwar liegen diese Punkte in diesem Falle ausserhalb, d. h. theils diesseits, theils jenseits der natürlichen Gleichgewichtslage. Wenn nun aber die Gleichgewichtspunkte in dieser einmal angenommenen Lage verharren (was man annehmen möchte, da unter Anderem auf Seite 62 eine einzelne Schwingung ausserhalb der Gleichgewichtslage als ein momentaner Strom bezeichnet wird), so sind offenbar keine zusammengesetzten, sondern nur einfache Schwingungen, nämlich die als Nebenschwingungen bezeichneten Schwingungen um die Gleichgewichtspunkte vorhanden. Will man dagegen (nach S. 64, aber gegen S. 72, 57 und 83) noch die Zurücklegung einer „einseitigen ($\frac{1}{4}$) Oscillation der Hauptschwingung", d. h. die Bewegung des Gleichgewichtspunktes aus der natürlichen Gleichgewichtslage in eine andere (Spannungs-) Lage als zum Wesen des elektrischen Stromes gehörig und nothwendig ansehen, so hat man zwar zusammengesetzte Schwingungen, allein die Annahme von Molekülen, welche wiederum aus Gruppen in der angegebenen Weise um die Schwerpunkte der Gruppe schwingender Atome bestehen, bleibt immerhin gekünstelt und deshalb die Sache selbst verdächtig, wenn auch nicht geradezu unmöglich. Was bedeuten denn ferner die Nebenschwingungen um den Gleichgewichtspunkt, nachdem dieser in der Spannungslage fixirt ist? Wie ist jene Fixirung der Hauptschwingung überhaupt möglich, da doch jeder Körper stets eine gewisse Temperatur hat, stets bis zu irgend einem Grade erwärmt ist. Wenn endlich (S. 73 uhd 79) der dauernde elektrische Strom als eine ununterbrochene Ladung und Entladung bezeichnet wird, „indem alle Molekel gleichzeitig dieselbe Elongation in der Hauptschwingung und dieselbe Amplitude in der Nebenschwingung haben", so geht aus der auf Seite 52 gegebenen Erklärung von Ladung und Entladung hervor, dass im elektrischen Strome nur die Nebenschwingungen, also nur einfache Schwingungen vorhanden sind.

Bemerkt sei hier noch, dass das telegraphische Gegensprechen nicht

*) Natürlicher nimmt sich die von Clausius gegebene, verwandte Erklärung der Verdampfung aus. Vergl. Poggendorff's Annalen, Bd. 100, S. 361.

als Beweis für die Richtigkeit der Vibrationstheorie hätte aufgeführt werden sollen; wer die Einrichtung der dabei verwendeten Apparate kennt, weiss, dass sich das Gegensprechen auch nach der dualistischen Theorie ohne Schwierigkeit erklären lässt, selbst wenn man in dem Leitungsdrathe gar keinen Strom voraussetzt. Ferner kann ich, so lange ich nicht durch einen entscheidenden Versuch dazu genöthigt werde, nicht glauben, dass „ein submarines Telegraphentau in einer bedeutenden Tiefe in Folge der Compression durch den Wasserdruck seine Dienste versagen muss“; auch widerspricht diese Behauptung der Erfahrung, dass die Temperaturabnahme bei festen Leitern den Leitungswiderstand vermindert. „Die Elektricität im Grossen zum Betriebe von Maschinen anzuwenden“, ist aber nicht unmöglich, sondern unpraktisch.

3. Der Magnetismus (S. 57—66)

ist wieder als vorübergehend (Elektro- oder Thermo-Magnetismus) oder dauernd (gewöhnlicher Magnetismus) fixirte Schwingung erklärt, wobei nach Seite 78 das „Diesseits und das Jenseits der Gleichgewichtslage entgegengesetzte Magnetismen“ giebt. „Die Intensität des Magnetismus beruht auf der Weite der Elongation“; natürlich ist hier die Rede von der Elongation der nach Vollendung der zum Magnetismus nöthigen Vierteloscillation“ fixirten Hauptschwingung; denn Nebenschwingungen können nach Seite 82 nicht vorhanden sein, und es würde sich ja sonst auch der Magnetismus als „einseitiger Ausschlag oder Spannungslage“, als „einseitig fixirte Schwingung“ nicht von der Elektricität unterscheiden, u. s. f. u. s. f., wie früher. Ebenso wenig befriedigt der längere Zusatz auf S. 65; es wird hier das Gesetz, dass sich parallele Ströme anziehen, entgegengesetzte abstossen, zwar erwähnt, aber nicht aus den aufgestellten Erklärungen hergeleitet und entwickelt, und nun wird weiter daraus geschlossen, dass „darin das Bestreben der Materie liege, unter allen Umständen Einheit zu bewahren oder zu erlangen; denn bei gleichgerichteten Strömen (Anziehung) haben die Molekel der beiden einander anziehenden Körper bereits eine gleiche Lagerung, und bei entgegengesetzten Strömen (Abstossung) wollen sie eine gleiche erlangen“. Warum stossen sich denn da gleichnamige Elektricitäten oder gleichnamige Magnetpole ab?

4. Spannungselektricität (S. 66—71).

Bei der Spannungselektricität ist der Zustand „vollkommen derselbe, wie beim Magnetismus“. Die mancherlei kleinen Unterschiede zwischen Magnetismus und Spannungselektricität, z. B. die auf Seite 68 und 77 erwähnten, sind ja nicht wesentlich, sind ganz untergeordnet. „Der *Nordpol*, d. h. der nach Norden gerichtete Pol eines Magnetes verhält sich *wie positive*, der Südpol wie negative Elektricität.“ Daher „gehen auch

elektrische Spannungserscheinungen leichter in der Wärme vor, weil da die Massentheilchen wegen ihrer doppelseitigen Schwingungen mit zunehmender [?] Elongation schon gelockert sind und nun durch einseitige [?] Reibung leicht die einseitig fixirte Lage annehmen. Und bereits elektrisches Glas oder Siegellack wird bei der Erwärmung unelektrisch, weil die [erst jetzt?] eintretenden Wärmeschwingungen die fixirte Spannungslage nicht dulden, indem sie vollständige Oscillationen erzwingen. Da Wärme vorhandenen Magnetismus auch schwächt, so ist dies ein neuer Beweis dafür, dass Spannungselektricität und Magnetismus wesentlich dasselbe sind". Bei einer solchen Beweisführung lassen sich mit Leichtigkeit noch ganz andere Dinge beweisen!

5. Erklärung aller übrigen Thatsachen aus den entwickelten Ansichten (S. 72—90).

Diese Partie ist am reichhaltigsten erweitert worden, freilich sind die Zusätze meist keine Verbesserungen. Als Beleg dafür nur zwei Beispiele; Seite 72: „Bei dem Schalle, dem Lichte und der strahlenden Wärme sind die Schwingungen fortschreitende, daher ist in dem fortpflanzenden Medium ein Widerstand vorhanden, es entstehen Maxima und Minima der Verdichtung und die Fortpflanzung ist eine allmälige; bei dem Magnetismus und der Elektricität sind stehende Schwingungen der Molekel um ihre Schwerpunkte ohne fortschreitende Verdichtung und Verdünnung, daher ist der Widerstand unendlich klein und dis Schwingungen müssen sich in einem Körper, welcher ein ununterbrochenes Ganze bildet, fast momentan fortpflanzen". Seite 76: „An dem positiven Pole, an welchem sich der negative Sauerstoff bildet (mit viel Leuchtkraft und wenig Wärme), erscheint zuerst dunkle Wärme mit ihren weiten Oscillationen; an dem negativen Pole, an welchem sich der positive Wasserstoff erzeugt (mit wenig Leuchtkraft und viel Wärme), erscheint zuerst Licht, unabhängig von Verbrennung". Aehnlich steht es um die anderen Zusätze, namentlich um den „kühnen Schluss auf die Rotation der Himmelskörper" (S. 81) und um die Erklärung der chemischen Vorgänge, für welche der „im gewöhnlichen Zustande indifferente [!] Sauerstoff" als Beispiel gewählt wird. Aber auch das Alte enthält noch manche unbegründete und willkürliche Behauptung, z. B. Seite 88: „Während die Wärmeschwingungen die ganze Masse eines Körpers bis in sein Inneres ergreifen, da die Molekel mit ihren Gleichgewichtspunkten schwingen und dadurch die Ausdehnung des Körpers bewirken, können die elektrischen und magnetischen Erscheinungen nur an der Oberfläche des Körpers zur Wahrnehmung und Wirkung gelangen, weil die Schwingungen nur um die Gleichgewichtspunkte geschehen, also eine Ausdehnung des Körpers nicht bewirken können."

Der gegebene Ueberblick zeigt, dass die in Rede stehende Schrift in zwei Theile zerfällt: im ersten Theile (S. 8—39) wird auf die Nothwendigkeit hingewiesen, die dualistische Ansicht von der Materialität der Wärme, des Magnetismus und der Elektricität zu verlassen und dieselben ebenso wie Licht und Schall als Molekularbewegungen zu betrachten; im zweiten Theile (S. 39—91) werden Voraussetzungen über die Form und Art dieser Molekularbewegungen gemacht, wird eine Theorie der Elektricität und des Magnetismus gegeben und versucht, aus dieser die elektrischen und magnetischen Erscheinungen zu erklären. Wenn auch im Inhalte des ersten Theiles in formeller und materieller Hinsicht Manches auszusetzen war, so ist doch nicht nur die stellenweise Mangelhaftigkeit der dualistischen Theorie kaum hinwegzuleugnen, sondern es ist auch höchst wahrscheinlich, dass auch Wärme, Elektricität und Magnetismus nur Bewegungszustände sind, dass dieselbe Theorie, welche sich beim Lichte und bei der Wärme so brauchbar erwiesen hat, sich mit gleichem Erfolge auch auf die Elektricität und den Magnetismus wird anwenden lassen. Im zweiten Theile dagegen:

a. fehlen klare und bestimmte Erklärungen der als Wärme, Elektricität und Magnetismus zu betrachtenden Schwingungen;

b. sind mehrere von den als Beweis für die Richtigkeit der gegebenen Hypothesen über die Art jener Schwingungen aufgeführten Erscheinungen nicht richtig aufgefasst, oder ganz willkürlich gedeutet, oder doch wenigstens nicht entscheidend;

c. sind mehrfach Widersprüche vorhanden, welche die an sich schon verwickelte Hypothese noch verdächtiger machen. So wird namentlich auch dem Aether eine sonderbare Rolle zugetheilt; man hat zwar „nicht nothwendig, seine Zuflucht zu ätherischen Wärmesphären zu nehmen" (S. 39), vielmehr sollen Wärme, Elektricität und Magnetismus nur Schwingungen der Körpertheilchen sein; dennoch wird „der universelle und deshalb eigenschaftslose, unverkennbare, Alles durchdringende und daher unwägbare oder schwerelose Aether, von dessen Dasein vorzüglich die Kometen und die Erscheinungen des Lichtes ein absolut sicheres Zeugniss geben" (S. 2), dessen „unendlich zarte, im indifferenten Gleichgewichte befindliche und kugelförmige Atome absolut elastisch sind und einander abstossen" (S. 18), als Fortpflanzungsmittel für jene Schwingungen zugelassen (S. 34), ja er ist als solches gar nicht zu entbehren, und zwar nicht blos beim Lichte, sondern wegen der Drehung der Polarisationsebene auch bei Elektricität und Magnetismus (S. 65), bei denen er „die Wirkung auf die Ferne vermittelt";

d. ist die Erklärung der Erscheinungen aus den aufgestellten Ansichten in vielen Fällen gezwungen und gesucht, zum Theil sogar ganz und *gar unzulässig*, weil völlig willkürlich, unbegründet oder unnatürlich;

überdies fehlt noch so manche Erklärung gänzlich, z. B. die der elektrischen und magnetischen Influenz.

Daher kann der in der vorliegenden dritten Auflage erweiterte Versuch nach meinem Erachten noch nicht als gelungen bezeichnet werden, er kann noch ebenso wenig wie in der zweiten Auflage auf allgemeine Annahme Anspruch machen, er ist noch keine vollkommene, abgeschlossene oder fertige Theorie. Das scheint Herr Spiller auch selbst gefühlt zu haben, da er in den Schlusszeilen äussert, dass diese Betrachtungen einer schärferen, mathematisch-analytischen Untersuchung fähig seien, dass ihm aber zu dem weiteren Ausbau die nöthige Zeit gefehlt habe. Ich kann nur meine bereits früher ausgesprochene Ansicht wiederholen: wir sind eben kaum mit der Vorfrage fertig, die eigentliche Arbeit, die Hauptuntersuchung über die Natur der Schwingungen beginnt erst. Aus diesem Grunde und nicht wegen der vermeintlichen „Stützung auf unleugbare Thatsachen“ ist auch eine directe „Widerlegung“ nicht gut möglich. Wenn aber im Vorstehenden so viele Einwände gegen die von Herrn Spiller vorgetragene Hypothese erhoben wurden, so möge daraus nicht gefolgert werden, dass ich dadurch zugleich die dualistische Theorie gegen diesen neuen Angriff habe in Schutz nehmen und vertheidigen wollen; vielmehr hoffe ich durch den Hinweis auf die noch vorhandenen Mängel und Schwierigkeiten einen Anlass zur Beseitigung derselben gegeben zu haben, und auch ich würde mich herzlich freuen, wenn es Herrn Spiller gelänge, in einer vierten Auflage, bei einer noch zweckmässigeren Anordnung des Stoffes, eine Theorie des Magnetismus und der Elektricität aufzustellen, gegen welche gar nichts einzuwenden, an der gar nichts auszusetzen wäre.

Chemnitz, im Juli 1861. Dr. Zetzsche.

Die Elemente der Trigonometrie. Von Dr. Zetzsche. Altenburg 1861.

Zur Vermeidung etwaiger Missdeutungen sehe ich mich zu der Erklärung genöthigt, dass die von Herrn Dr. Hoffmann verfasste und auf Seite 90 der vorigen Literaturzeitung abgedruckte Recension der obigen Schrift während meiner Abwesenheit ohne mein Vorwissen aufgenommen worden ist und dass ich mit deren Inhalte nicht einverstanden bin.

Schlömilch.

Das Prismatoid. Von Professor Dr. Wittstein. Hannover 1860.

Es scheint nicht allgemein bekannt zu sein, dass Alles, was in der vorliegenden Abhandlung steht, längst mehrfach publicirt und in elementaren Compendien zu finden ist; ein Hinweis auf die früheren Autoren möchte daher wohl angemessen sein.

Die in Rede stehenden Eigenschaften sind vor langer Zeit von Herrn Director August in einer Programmabhandlung, wenn ich nicht irre, ele-

mentar bewiesen und in dessen Lehrbuch der Mathematik für den höheren Schulunterricht, dritter Cursus, Stereometrie, in einem besonderen Abschnitte „von den Trapezoidalkörpern oder Körperstumpfen" ausführlich entwickelt worden. Die Formel für den Inhalt des Trapezoidalkörpers findet man dort auch zur Inhaltsbestimmung der Kugel und des Paraboloides angewendet. Von einer Bereicherung der Elementargeometrie durch die Abhandlung des Herrn Prof. Wittstein kann daher nicht füglich die Rede sein. Ausserdem möge man noch vergleichen die Abhandlungen von Steiner in Crelle's Journal, Bd. XXIII, S. 275 und von Brix, *ibidem* Bd. XXV, S. 129.

(Briefliche Mittheilung von Dr. Jochmann in Berlin.)

Lehrbuch der Physik für die unteren Klassen der Gymnasien und Realschulen. Von S. Subic, Doctor der Philosophie, Magister der freien Künste und Professor der Physik. Mit Vorbehalt des Uebersetzungsrechtes. Pest 1861, Verlag von Gustav Heckenast.

Die Vorrede beginnt mit folgenden, die Erwartung spannenden Worten: „Entsprechend dem Bedürfniss der studirenden Jugend, welches im Beginne des Studiums der Physik die möglichste Einfachheit, Klarheit und verstandesgemässe Darlegung der Sätze der Experimentalphysik fordert, übergebe ich hiermit eine auf Experiment und Erfahrung gegründete Lehre der wichtigsten Sätze der Physik den Schülern der Untergymnasien und Unterrealschulen, sowie sie sich seit mehreren Jahren selbst dort erprobt, wo die Schüler mit den grössten Sprachschwierigkeiten zu kämpfen hatten." Der Verfasser spricht ferner in der Vorrede die sehr richtige Ansicht aus, dass ihm diejenige Methode am zweckmässigsten erscheine, welche der Jugend zuerst die Gegenstände und Ereignisse vorführt und sie im Angesichte derselben leitet, darüber nachzudenken. Ingleichen empfiehlt er, die Jugend frühzeitig zum eignen Experimentiren anzuregen. Nach der Durchlesung der Vorrede, welche noch viele andere nützliche Gedanken enthält, ging ich an diejenige des Werkes selbst und berichte hier über den Eindruck, den diese auf mich gemacht hat. Die Menge des Stoffes wird zunächst durch den Zweck des Buches bestimmt und kann man nach diesem ein Eingehen in die Polarisation, Interferenz, Beugung, Doppelbrechung des Lichtes nicht erwarten, dass aber unter den behandelten Thatsachen die Geschwindigkeit des Lichtes mit keiner Silbe erwähnt worden ist, muss als ein Mangel des Buches erscheinen und in lebhaftes Erstaunen setzen, umsomehr, als über die Beobachtungen der Verfinsterung der Jupiterstrabanten so leicht zu referiren ist und hieran leicht gezeigt werden kann, dass das Licht zu seiner Bewegung Zeit braucht. Der Herr Verfasser setzt, wie man z. B. an der Abhandlung über die Schraube *bemerkt, die* Kenntniss der Stereometrie voraus, man muss sich aber nur

wundern, dass er diese Wissenschaft so schlecht bei seinen Demonstrationen benutzt; so z. B. ist bei den Spiegeln und Linsen der Weg der Lichtstrahlen an einem Durchschnitte des Apparates erläutert, ohne nur zu sagen, dass es ein Durchschnitt ist, mit dem man es zu thun hat; der Durchschnitt wird ohne Weiteres Spiegel oder Linse genannt. Der Herr Verfasser hätte dem Schüler nicht zumuthen sollen, dergleichen Lücken in der Deduction zu ergänzen; wo bei der Beschreibung, wie man sieht, eine gewisse mathematische Vorbildung vorausgesetzt wird, sollte sich der Lehrer vor seinen Schülern keine dergleichen Blössen geben; setzt er aber die stereometrischen Begriffe nicht voraus, so sollte er dieselben im Texte nachholen oder ganz auf ein solches Werk verzichten, denn mit den unklaren Vorstellungen und Begriffen des gewöhnlichen Lebens lässt sich doch einmal in der Wissenschaft nicht arbeiten. Was nun den Ausdruck der physikalischen Gesetzmässigkeiten durch die Sprache anbelangt, so hat der Verfasser gerade hier sehr häufig den groben Fehler begangen, nicht deutlich zu sein, ja den Sinn des Gesetzes sogar gänzlich durch seine Ausdrucksweise zu entstellen. Als Beleg hierzu diene folgender Ausspruch (S. 130): „Bleibt die Temperatur der Luft ungeändert, so ist ihre Expansivkraft desto grösser, je mehr sie zusammengedrückt wird. Dieser unter dem Namen des Mariotte'schen Gesetzes bekannte Satz" etc. Namentlich der mechanische Theil leidet an Undeutlichkeiten, indem daselbst bei allen Sätzen, die sich auf die Einwirkung auf einen Punkt beziehen, ohne Weiteres von der Einwirkung auf einen Körper gesprochen wird, während doch ein Punkt gemeint ist. Ebenso macht es auf den Leser einen widerwärtigen Eindruck und gewährt dem Schüler keine wissenschaftliche Anregung, dass sie überall schlechte und undeutliche Definitionen finden, mit denen sich nicht arbeiten lässt; z. B. S. 184: „Die Senkung oder Neigung unter den Horizont heisst Inclination", wobei man nicht erfährt, welche Linie sich zum Horizont neigt und dass die magnetische Achse der Nadel sich im magnetischen Meridian befinden muss; ferner S. 236: „Befindet sich die Sonne hinter einer dunkeln Wolke, welche einen Riss hat, so sehen wir das Licht der Sonne strahlenartig hervortreten. Eine solche Lichtlinie wollen wir Lichtstrahl nennen"; desgleichen S. 176: „Die zwei Punkte der stärksten Kraft eines Magnetes nennt man Magnetpole oder kurz Pole!" Auch die wenigen Beispiele sind, wie die Definitionen, nicht frei von Undeutlichkeit und Unrichtigkeit; so findet sich Seite 96 folgende Stelle: „Bewegt eine Kraft einen Körper, so arbeitet sie. Die auf eine Secunde entfallende Arbeit einer Kraft nennt man Arbeitskraft 1. das Maass momentaner Kräfte. Ein Stoss, welcher einem Körper von 40 Pfund die Geschwindigkeit von 5 Fuss giebt, hat eine Arbeitskraft von 40×5 Fusspfund. Man bekommt also die Arbeitskraft eines gleichförmig bewegten Körpers, wenn man sein Gewicht mit seiner Geschwindigkeit multiplicirt". Ich konnte mich bei Durchlesung des Buches des Gedankens nicht

erwehren, dass der Verfasser über viele wissenschaftliche Gegenstände selbst gänzlich im Unklaren sei, wofür schon die oben angeführte Stelle über das Mariotte'sche Gesetz Zeugniss ablegt. Hierher gehört auch noch die Stelle (S. 129): „Stabiles Schwimmen. Damit ein schwimmender Körper vor dem Umschnappen sicher sei, muss sein Schwerpunkt tiefer liegen, als der Schwerpunkt der verdrängten Flüssigkeit." Es ist allerdings richtig, dass der Körper dann allemal stabil schwimmt, allein er kann auch stabil schwimmen, wenn sein Schwerpunkt über dem der verdrängten Flüssigkeit liegt, freilich lässt sich aber die Bedingung, unter welcher dies geschieht, nicht elementar ausdrücken. Wie nun die Auswahl der physikalischen Gesetze eine mangelhafte ist und wie diese selbst oft unrichtig, oft undeutlich ausgesprochen sind, so ist auch die Lehrmethode, wodurch doch der Zusammenhang unter den Erscheinungen und Gesetzen gezeigt werden soll, fast überall mangelhaft. Ein komisches Beispiel der Demonstration des Herrn Verfassers liefert unter Anderem Seite 20: „Aus der Figur 13 wird ersichtlich, dass horizontal liegende, am Ende, in der Mitte oder in ihrer ganzen Länge belastete Körper mit ihrer relativen Festigkeit wirken." Bisweilen ist die Herleitung ganz weggelassen und der Herr Verfasser hilft sich mit einem „die Erfahrung zeigt, dass" etc., oder wie Seite 238, wo ohne vorhergegangene Definition von Beleuchtungskraft gesagt wird: „Das Gesetz für die Abnahme der Beleuchtungskraft in die Ferne heisst: die Beleuchtungskraft nimmt mit der Entfernung im quadratischen Verhältnisse ab." — Das Vorhergehende zeigt, dass der Herr Verfasser den Zweck seines Buches durch seine mangelhafte Darstellung gänzlich verfehlt hat; am ganzen Buche ist nichts, als Papier und Druck gut; auch Wahl und Entwurf der zahlreichen Holzschnitte, sowie deren Ausführung ist misslungen zu nennen. Wir sprechen noch am Schlusse unser Bedauern gegen die Verlagshandlung aus, dass dieselbe eine literarische Arbeit unterstützt hat, die so wenig „Klarheit und verstandesgemässe Darlegung der Sätze der Experimentalphysik" zeigt, dass sie nicht zum physikalischen Unterrichte empfohlen werden kann.

Dr. Kahl.

Handbuch der Kugelfunctionen. Von Dr. E. Heine, ordentlicher Professor an der Universität Halle. Berlin, Druck und Verlag von G. Reimer.

Die wichtige Rolle, welche die Kugelfunctionen in der Theorie der Anziehung und in der Wärmelehre spielen, hat bekanntlich eine sehr grosse Anzahl von Arbeiten über jene Functionen hervorgerufen, wie schon die Namen Legendre, Laplace, Ivory, Gauss, Dirichlet, Jacobi, Bonnet, Borchardt, Neumann, Christoffel, Bertram, Liouville, Hansen, Scheibner etc. hinreichend beweisen. Je schwieriger hierdurch ein nur *einigermaassen* vollständiger Ueberblick geworden ist, um so freudiger

wird man das Erscheinen einer Arbeit begrüssen, über deren Zweck sich das Vorwort in folgenden Worten ausspricht: „Sie soll den Anfänger in die Theorie der Kugelfunctionen, welche gegenwärtig durch wichtige Werke über Physik und Astronomie ein Interesse auch für weitere Kreise erhalten hat, einführen und ihm als Lehrbuch dienen. Andererseits soll sie Demjenigen, welcher die Elemente bereits kennt, eine systematische Darstellung der hierher gehörigen Untersuchungen bis auf die neueste Zeit liefern, ihm eine Sammlung der Formeln geben, welche bei dem jetzigen Stande der Lehre als die wesentlichsten angesehen werden müssen, und ihm die Quellen bezeichnen, aus denen geschöpft wurde.“ Nach genauer Ansicht des Werkes kann Referent bezeugen, dass dieser Doppelzweck vollständig erreicht worden ist, und dass die Klarheit der Darstellung sowie die Reichhaltigkeit des Gegebenen eine gleich rühmliche Anerkennung verdienen. Der Verfasser liefert übrigens noch mehr, als die Vorrede sagt, und zwar in doppelter Beziehung. Man findet nämlich ausser den Arbeiten Anderer nicht wenige dem Verfasser eigenthümliche Untersuchungen, ferner beschränkt sich das Werk keineswegs auf die Theorie der Kugelfunctionen, sondern enthält auch Anwendungen derselben namentlich auf die mechanischen Quadraturen (u. A. nach der Gauss'schen Methode) und auf die Berechnung der Potentiale von Kugeln oder Ellipsoiden.

SCHLÖMILCH.

Bibliographie

vom 15. August bis 15. October 1861.

Periodische Schriften.

Mathematische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. Berlin, Dümmler in Comm. 8 Ngr.

Physikalische Abhandlungen der königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1860. Ebend. 2 Thlr. 22 Ngr.

Sitzungsberichte der königl. bayerischen Akademie der Wissenschaften. 1861. 4. Heft. München, Franz in Comm. 16 Ngr.

Argelander, F. W. A., Astronomische Beobachtungen auf der königl. Universitäts-Sternwarte zu Bonn. 4. Bd.: Bonner Sternverzeichniss. 2. Section. Bonn, Marcus. 5 Thlr.

Reine Mathematik.

Serenus v. Antissa, Ueber den Schnitt des Kegels. Aus dem Griechischen von E. Nizze. Stralsund, Hingst. ⅔ Thlr.

Friedlein, G., Gerbert, die Geometrie des Boethius und die indischen Ziffern. Ein Vers. in der Geschichte der Arithmetik. Erlangen, Bläsing. 12 Ngr.

Fischer, H., Briot und Bouquet's Theorie der doppelt-periodischen, insbesondere elliptischen Functionen, mit Benutzung dahin einschlagender Arbeiten deutscher Mathematiker. 1. und 2. Lief. Halle, Schmidt's Verlagsbuchh. à ½ Thlr.

Grelle, F., Analytische Geometrie der Ebene. Hannover, Brecke. 2 Thlr.

Grunert, J. A., Directe Bestimmung der Durchschnittspunkte der Bahnen zweier, in Kegelschnitten sich um die Sonne bewegenden Weltkörper. Wien, Gerold's Sohn in Comm. 18 Ngr.

Angewandte Mathematik.

Adriany, J., Die Markscheidekunde nebst den für den Markscheider wichtigsten Lehren der Feldmesskunde. 2. Aufl. Wien, Braumüller's *Verl.-Conto.* 1 Thlr.

POHL, J. und J. SCHABUS, Tafeln zur barometrischen Höhenmessung. Wien, Helf. ⅜ Thlr.

ONDERKA, V., Mathematische Geographie. Wien, Braumüller's Verl.-Conto. 1⅓ Thlr.

STRUVE, O., *Tabulae quantitatum Besselianarum, quibus apparentes stellarum positiones in medias convertuntur, adhibitis numeris constantibus Pulcovensibus pro a. 1840 ad 1864 computatae. Petropoli.* Leipzig, Voss. 28 Ngr.

Atlas des gestirnten Himmels, f. d. Anf. des Jahres 1855 entworfen auf der königl. Sternwarte zu Bonn. 7. Lief. Bonn, Marcus. 3 Thlr.

HARTWIG, E. W., Ueber die Berechnung der Auf- und Untergänge der Sterne. Nebst einigen Hilfstafeln. Schwerin, Hildebrand. 12½ Ngr.

NEUMANN, C., Lösung des allgemeinen Problems über den stationären Temperaturzustand einer homogenen Kugel ohne Hilfe von Reihenentwickelungen, nebst einigen Sätzen zur Theorie der Anziehung. Halle, Schmidt's Verlagshandl. 6 Ngr.

HANCKEL, H., Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeiten. Gekrönte Preisschrift. Göttingen. Leipzig, Abel. ⅓ Thlr.

SCHMIDT, G., Theorie der Dampfmaschinen. Freiberg, Engelhardt. 1⅔ Thlr.

Taschenbuch des Ingenieurs. Herausgegeben von dem Verein „die Hütte“. 4. Aufl. 1. Hälfte. Berlin, Ernst & Korn. pro compl. 1⅓ Thlr.

KARSTEN, H., Lehrbuch der Krystallographie. Leipzig, Voss. 2 Thlr.

Physik.

Encyclopädie der Physik, bearb. von BRIX, DECHER etc. Herausgeg. von KARSTEN. 10. Lief. Leipzig, Voss. 2⅔ Thlr.

MOLT, TH., Wandkarten zur physikalischen Erdbeschreibung. 2. Aufl. Stuttgart, Nitzschke's Verlag. 1 Thlr. 6 Ngr.

HEUSSI, J., Die Experimentalphysik. 1. Curs.: Kenntniss der Phänomene. 8. Aufl. Berlin, Duncker & Humblot. ½ Thlr.

ROBIDA, C., Erklärung der Lufterscheinungen aus den Grundzügen einer naturgemässen Atomistik. 2. Heft. Klagenfurt, Leon in Comm. 9 Ngr.

MEYERSTEIN, M., Das Spectrometer. Ein neues Instrument zur Bestimmung der Brechungs und Zerstreuungsverhältnisse verschiedener Medien, sowie zum Gebrauche bei allen goniometrischen Messungen. Göttingen, Deuerlich'sche Buchh. 8 Ngr.

REDTENBACHER, F., Die anfänglichen und gegenwärtigen Erwärmungszustände der Weltkörper. Mannheim, Bassermann. 4 Ngr.

SAALSCHÜTZ, L., *De non periodica mutatione caloris terrae. Dissert. inaug.* Königsberg, Schubert & Seidel. 3 Ngr.

BEZOLD, W. v., Ueber die physikalische Bedeutung der Potentialfunction in der Elektricitätslehre. München, liter.-artist. Anstalt in Comm. 8 Ngr.

WIEDEMANN, G., Die Lehre vom Galvanismus und Elektromagnetismus. 2. Bd. And. u. dr. Th.: Die Wirkungen des galvanischen Stromes in die Ferne. 1. Abth. Braunschweig, Vieweg. 2½ Thlr.

M'LEOD, W., *Physical atlas of Great Britain. London, Longman.* 7 *sh.* 6 *d.*

CAPELLI, G., *Osservazioni meteorologiche eseguite nella R. specola astronomica di Milano negli anni* 1858 – 1859. *Milano.* 20 *frcs.*

Mathematisches Abhandlungsregister.

1860.

Zweite Hälfte: 1. Juli bis 31. December.

A.

Abel'sche Function.

232. *Sur l'intégration de différentielles irrationelles.* Tchebichef. *Compt. rend. LI,* 46.

Aberration.

233. Ueber die Aberration des Lichtes. Hoek. Astr. Nachr. LIV, 145.

Aerodynamik.

234. Ein Beitrag zur Mechanik der Gase. Schmidt. Wien. Akad. Ber. XXXIX, 41.
235. *Illustrations of the dynamical theory of gases.* Maxwell. *Phil. Mag. XX,* 21. [Vergl. No. 2.]
236. *On the velocity of sound.* Earnshaw. *Phil. Mag. XX,* 37, 186.
237. Ueber die Aenderung des Tones und der Farbe durch Bewegung. Mach. Wien. Akad. Ber. XXXXI, 543.

Analytische Geometrie der Ebene.

238. Das umgekehrte Problem der Brennlinien. Strauch. Wien. Akad. Ber. XXXVIII, 861.
239. Das Problem des Pappus und die Gesetze der Doppelschnittsverhältnisse bei Curven höherer Ordnung und Classen. Fiedler. Zeitschr. Math. Phys. V, 377.

Vergl. Ellipse, Gleichungen 325, Kegelschnitte, Kreis, Krümmungshalbmesser.

Analytische Geometrie des Raumes.

240. Merkwürdige Erweiterung der Formeln der ebenen Trigonometrie auf ein System von drei sich nicht schneidenden Geraden im Raume. Grunert. Grun. Archiv XXXV, 1.
241. *Théorie générale des systèmes de rayons rectilignes.* Kummer. *N. ann. math. XIX,* 362. [Vergl. Bd. V, No. 260.]
242. *Des coordonnés curvilignes se coupant sous un an angle quelconque.* Aoust. Crelle LVIII, 352.
243. *Des coordonnés paraboliques et de leur application à la géométrie des paraboloides.* Valson. *N. ann. math XIX,* 208.
244. Ueber die Umhüllungslinien der Pollinien einer Curve und deren inverse Linie. Hoppe. Crelle LVIII, 374.
245. *Sur les surfaces polaires d'un point d'une surfaces algébrique prises par rapport à cette surface.* Dewulf. *N ann. math. XIX,* 431.
246. *On the cubic centres of a line with respect to three lines and a line.* Cayley. *Phil. Mag. XX,* 418.
247. Eine Notiz über Wendelinien. Bacaloglo. Grun. Archiv XXXV, 40.
248. Ueber Fusspunktcurven und Fusspunktflächen. Bacaloglo. Grun. Archiv XXXV, 41.
249. *Sur une cubique gauche.* Cremona. *N. ann. math. XIX,* 356.

250. *Sur quelques relations géométriques entre l'hélice et la cycloide.* **Dunesme.** *Compt. rend. LI*, 890.
Vergl. Loxodrome, Oberflächen, Oberflächen zweiter Ordnung, Paraboloid, Sphärik, Wellenfläche.

Arithmetische Reihe.

Vergl. Progression.

Astronomie.

251. *Mémoire sur le mouvement des noeuds de la lune.* **Lespiault.** *Compt. rend. LI*, 727.
252. *Calcul des deux inégalités lunaires à longues périodes decouvertes par M. Hansen et dues à l'action perturbatrice de Venus.* **Delaunay.** *Compt rend. LI*, 695, 735, 783. — **Le Verrier.** *ibid.* 703, 740, 788. — **Pontécoulant.** *ibid.* 958.
253. *Note sur les inégalités lunaires à longues périodes dues à l'action perturbatrice de Venus.* **Delaunay.** Astr. Nachr. LIV, 273.
254. *Sur la détermination du coefficient de l'équation séculaire de la lune.* **Pontécoulant.** *Compt rend. LI*, 134. — **Delaunay.** *ibid.* 154. [Vergl. No. 22.]
255. Ueber die Genauigkeit der Beobachtungen der Rectascensionen bei Anwendung chronographischer Apparate. **Pape.** Astr. Nachr. LIV, 177.
256. Neue Methode, die Biegung eines Kreisfernrohres zu ermitteln. **Kayser.** Astr. Nachr. LIV, 227.
257. *Quelques mots sur les queues des comètes.* **Bredichin.** Astr. Nachr. LIV, 289.
Vergl. Aberration, Refraction.

Attraction.

258. Bemerkung zu einer Stelle der *Mécanique céleste.* **Murmann.** Zeitschr. Math. Phys. V, 438.
259. Ueber die Anziehung einer mit Masse belegten abwickelbaren Fäche auf einen materiellen Punkt. **Mehler.** Crelle LVIII, 240.
260. *On a theorem relating to the attraction of the ellipse.* **Dahlander.** *Phil. Mag. XX*, 125.
Vergl. Potential.

B.

Bernoulli'sche Zahlen.

261. Einige Beiträge zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen und der Secanten-Coefficienten. **G. F. Meyer.** Grun. Archiv XXXV, 449.
262. Von einigen Summen und Differenzenformeln und den Bernoulli'schen Zahlen. **Bauer.** Crelle LVIII, 292.

Bestimmte Integrale.

263. *Sur le calcul inverse des intégrales définies.* **Rouché.** *Compt. rend. LI*, 126.
264. Ueber den Integralsinus und Integralcosinus. **Schlömilch.** Zeitschr. Math. Phys. V, 294.
265. Ueber das bestimmte Integral $\int_0^\infty \frac{\sin^p x}{x^q}\,dx$. **Schlömilch.** Zeitschr. Mathem. Phys. V, 286.
266. Ueber das bestimmte Integral $\int_0^{\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}} (a-b\,x^n)^{\frac{p}{q}}\,x^{m-1}\,dx$. **Bacaloglo.** Grun. Archiv XXXV, 70.
267. *Integralia quaedam definita.* **Lindman.** Grun. Archiv XXXV, 475.
Vergl. Abel'sche Function, Elliptische Functionen, Näherungswerth, Zahlentheorie 409.

Brennlinien.

Vergl. Analytische Geometrie der Ebene 238.

C.

Cartographie.

268. *Sur les cartes géographiques.* **Tissot.** *Compt rend. LI*, 964.
269. *Définition des modes de représentation de cartes géographiques.* **Tissot.** *N. ann. math. XIX*, 457.

270. *Tracé des cartes géographiques.* Tchebichef. *N. ann. math. XIX. Bulletin de bibl.* 49.

Combinatorik.

271. *Sur une série ordonnée d'après des nombre de combinaisons avec et sans répétition.* De Virieu. *N. ann. math. XIX*, 397.
272. *Sur une série combinatoire.* De Verieu. *N. ann. math. XIX*, 398.

Cubische Formen.

273. *On a relation between two ternary cubic forms.* Cayley. *Phil. Mag. XX*, 512.

D.

Determinanten.

274. *Multiplication des déterminants.* Souillart. *N. ann. math. XIX*, 320.
Vergl. Näherungswerth 361.

Determinanten in geometrischer Anwendung.

275. *Equation des rapports anharmoniques correspondant aux racines d'une équation du quatrième degré.* Painvain. *N. ann. math. XIX*, 407.
276. Ueber die Wendetangenten der Curven dritter Ordnung. Clebsch. Crelle LVIII, 229.
277. Ueber eine Classe von Eliminationsproblemen und über einige Punkte der Theorie der Polaren. Clebsch. Crelle LVIII, 273.
278. Die Beziehung zwischen den Halbmessern von vier sich gegenseitig berührenden Kreisen, sowie von fünf derartigen Kugeln. C. W. Baur. Zeitschr. Math. Phys. V, 365. *N. ann. math. XIX*, 440.
Vergl. Oberflächen zweiter Ordnung 366.

Differentialgleichungen.

279. Zur Integration der linearen Differentialgleichungen. Weiler. Grun. Archiv XXXV, 440.
280. Die Integration der linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Schlömilch Zeitschr. Math. Phys. V, 323.
281. Ueber totale und partielle Differentialgleichungen. Natani. Crelle LVIII, 301.
282. Integration einiger partiellen Differentialgleichungen. Steen. Zeitschr. Math. Phys. V, 427. [Vergl. No. 6.]
283. Ueber die partielle Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right].$$

Hoppe. Crelle LVIII, 369. [Vergl. No. 44.]
284. *Illustrations of symmetrical integration.* Carmichael. *Phil. Mag. XX*, 348.

Differenzenrechnung.

Vergl. Bernoulli'sche Zahlen 262, Combinatorik 271.

E.

Elasticität.

285. *Mémoire sur la théorie de l'élasticité des corps homogènes à élasticité constante.* Lorenz. Crelle LVIII, 329.

Elektrodynamik.

286. Die Fundamente der Elektrodynamik. Kahl. Zeitschr Math. Phys. V, 253, 305.

Elimination.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 277, homogene Functionen.

Ellipse.

287. Ueber die grössten Dreiecke, die sich über eine gegebene Gerade einer Ellipse oder Hyperbel einschreiben lassen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. V, 364.
288. *Théorèmes relatifs aux normales d'une ellipse.* Prat. *N. ann. math. XIX*, 235.
Vergl. Attraction 260.

Elliptische Functionen.

289. Entwurf einer neuen Theorie der elliptischen Integrale. Weiler. Grun. Archiv XXXV, 408.
290. Ueber Modulargleichungen der elliptischen Functionen. Schröter. Crelle LVIII, 378.

F.

Foucault'scher Pendelversuch.

291. *Nouvel examen de la question relative aux oscillations tournantes du pendule à libre suspension en ayant égard à l'influeuce de la rotation de la terre.* *Poncelet.* *Compt. rend. LI*, 467, 511.

Functionalgleichung.

Vergl. Kräfteparallelogramm.

Functionen.

292. Beiträge zur Theorie derjenigen Functionen, welche die Verallgemeinerung der hyperbolischen und cyclischen Cosinus und Sinus darstellen. Hellwig. Grun. Archiv XXXV, 186.
293. Entwicklung einer Function der vierten Rechnungsstufe in eine Reihe Paugger. Grun. Archiv XXXV, 21.
294. *Solution de questions de l'algèbre Bertrand.* *Mathieu.* *N. ann. math. XIX*, 371.
Vergl. Abel'sche Functionen, Elliptische Functionen, Potential.

Fusspunktlinien.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 248.

G.

Geodäsie.

295. Untersuchungen über die Pothenot'sche Aufgabe, falls solche auf den Raum ausgedehnt wird. Plath. Grun. Archiv XXXV, 241.
296. Ueber einige geodätische Formeln. v. Andrä. Astr. Nachr. LIII, 369.
297. Die Zahlenformel für den mittleren Krümmungshalbmesser des Erdsphäroids. Andres. Grun. Archiv XXXV, 72.
298. *Méthode des azimuts correspondants.* *Radau.* Astr. Nachr. LIII, 145.
299. *Sur un moyen de trouver la longitude sans chronomètre.* *Radau.* Astr. Nachr. LIV, 345.

Geometrie (descriptive).

300. *Sur les seconds points d'intersections des normales d'une cône de révolution passant par une première section conique.* *Kessler.* *N. ann. math. XIX*, 436.
Vergl. Krystallographie 349.

Geometrie (höhere).

301. *Propriétés relatives au déplacement fini quelconque dans l'espace d'une figure de forme invariable.* *Chasles.* *Compt. rend. LI*, 855, 905.
Vergl. Kegelschnitte 342.

Geometrische Reihe.

Vergl. Progression.

Geschichte der Mathematik.

302. *Question des porismes.* *Breton (de Champ).* *Compt. rend. LI*, 1034. — *Chasles.* *ibid.* 1043.
303. *Sur l'age de Zenodore.* *Cantor.* *Compt. rend. LI*, 630.
304. *Epitaphe de Diophante.* *N. ann. math. XIX.* *Bulletin de bibl.* 71.
305. *Les mathématiciens des Romains.* *Weidler.* *N. ann. math. XIX.* *Bulletin de bibl.* 85.
306. *Jobst Burgi et les logarithmes.* *Matzka.* *N. ann. math. XIX.* *Bulletin de bibl.* 62. [Vergl. No. 94.]
307. *Nouvelles remarques sur l'interprétation d'un passage de Descartes.* *Valat.* *Compt. rend. LI*, 1031. [Vergl. No. 93.]
308. *Généalogie de Viete.* *Filleau de la Touche.* *N. ann. math. XIX.* *Bulletin de bibl.* 73.

309. Ueber die Definitionen des Leibnitz. Trendelenburg. Berl. Akad. Ber. 1860, 374. — *N. ann. math. XIX. Bulletin de bibl.* 87.
310. *Jacques Charles le géomètre. Bienaymé. N. ann. math. XIX. Bulletin de bibl.* 90.
311. Ueber den Namen Theodolit. Hunaeus. Grun. Archiv. XXXV, 240.
312. *Sur une ancienne détermination du nombre absolu des vibrations du diapason. Govi. Compt. rend LI,* 450.
313. *Sur le premier exemplaire de l'édition stéréotype des tables de logarithmes de Lalande. Fournerat. N. ann. math. XIX. Bulletin de bibl.* 83.
314. *Usage du Souwan-pan des Chinois. D'Escayrac de Lauture. Compt. rend. LI,* 88. — *Poncelet. ibid.* 109.
315. Ueber Sonnenfinsternisse. Encke. Berl. Akad. Ber. 1860, 505.
316. Ueber die Sonnenfinsterniss vom 18. Juli 1860. Bremiker. Berl. Akad. Ber. 1860, 693.
317. Beiträge zur Geschichte der Fortschritte in der elektrischen Telegraphie. Zetzsche. Zeitschr. Math. Phys. V, 395. [Vergl. No. 108.]

Gleichungen.

318. *Sketch of a theory of transcendental roots. Cockle. Phil. Mag.* XX, 145, 309.
319. *Exercises sur les équations numériques. Bellavitis N. ann. math. XIX,* 343.
320. *Notes sur la transformation de Tschirnhausen. Cayley.* Crelle LVIII, 259, 263.
321. *On a problem of double partitions. Cayley. Phil. Mag. XX,* 337.
322. *Sur une équation de degré quelconque mais d'une certaine forme. De Virien. N. ann. math. XIX,* 389.
323. *L'équation* $x e^{-\frac{a}{2}\left(x-\frac{1}{x}\right)} = b$ *a deux racines égales si* $\psi < 90^\circ$, $a = \sin\psi$ *et* $b = \operatorname{tang}\frac{\psi}{2} \cdot e^{\cos\psi}$ *ou* $b = \operatorname{cotang}\frac{\psi}{2} \cdot e^{-\cos\psi}$. *Gressier. N. ann. math. XIX,* 230.
324. *On a system of algebraic equations. Cayley. Phil. Mag. XX,* 341.
325. *Sur la résolution numérique de deux équations du second degré. Abel Transon. N. ann. math. XIX,* 414.
326. Ueber die merkwürdigen Eigenschaften von drei simultanen Gleichungen. Unferdinger. Grun. Archiv XXXV, 32.

Vergl. Determinanten in geometrischer Anwendung 275, 277.

H.

Homogene Functionen.

327. Ueber eine symbolische Darstellungsweise algebraischer Formen und über die davon zu machende Anwendung auf Probleme der Elimination. Clebsch. Berl. Akad. Ber. 1860, 536.

Hydrodynamik.

328. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Lejeune-Dirichlet. Crelle LVIII, 181. — Dedekind. ibid. 217.
329. Ueber ein neues Gesetz der lebendigen Kräfte in bewegten Flüssigkeiten. Stefan. Wien. Akad. Ber. XXXVII, 420.
330. Ueber Reibung tropfbarer Flüssigkeiten. Helmholtz und v. Piotrowski. Wien. Akad. Ber. XXXX, 607.
331. *On a new species of figures of equilibrium for revolving fluids, the particles of which attract one another according to Newton's theory. Dahlander. Phil. Mag.* XX, 119.
332. *On the form assumed by a fluid shell revolving freely within a hollow spheroid. Dahlander. Phil. Mag. XX,* 426.
333. *On the form of satellites revolving at small distances from their primaries. Vaughan. Phil. Mag. XX,* 409.

Hyperbel.

Vergl. Ellipse 287, Sphärik.

I.

Imaginäres.

334. *Nouvelle théorie des fonctions de variables imaginaires. Marie. Journ. Mathém. XXV,* 393, 457. [Vergl. No. 120.]

335. Ueber die geometrische Darstellung der Werthe einer Potenz mit complexer Basis und complexem Exponenten. Durège. Zeitschr. Math. Phys. V, 345.

Interpolation.

336. *Sur les formules d'interpolation de Lagrange et de Newton.* *Abel Transon.* *N. ann. math. XIX*, 248. [Vergl. Bd. V, No. 112.]
Vergl. Methode der kleinsten Quadrate.

Irrationalgrössen.

337. Ueber das Rationalmachen der Nenner der Brüche. Zehfuss. Grun. Archiv XXXV, 117. [Vergl. No. 130.]
338. Die Lösung der Fermat'schen Aufgabe: Wegschaffung der Wurzelgrössen aus algebraischen Ausdrücken, in welchen solche als Summanden vorkommen. Lehmann: Auszug aus einer Abhandlung von A. v. d. Schulenburg. Grun. Archiv XXXV, 207.
339. *Etant donné* $a_1 + \sqrt{a_2} + \sqrt{a_3} + \ldots + \sqrt{a_n} = P$, *changeant dans ce polynôme* n' *signes et désignant le nouveau polynôme par* Q, *combien* PQ *renferme-t-il de quantités irrationelles.* *Kessler.* *N. ann. math. XIX*, 436.
Vergl. Näherungswerth.

K.

Kegelschnitte.

340. *Sur le triangle conjugué à une conique.* *Salmon.* *N. ann. math. XIX*, 345.
341. *Lieu des poles des cordes, qui dans les courbes du second degré joignent les pieds des normales à ces courbes menées d'un point de la développée.* *Desboves.* *N. ann. math. XIX*, 253.
342. *Lieu d'un point tel que les quatre tangentes menées de ce point à deux coniques forment un faisceau harmonique.* *De Jonquières.*
Vergl. Ellipse, Geometrie (descriptive), Gleichungen 325, Kreis, Parabel, Sphärik 392.

Kettenbrüche.

343. Zusammenhang unter den Coefficienten zweier gleichen Kettenbrüche von verschiedener Form. Heilermann. Zeitschr. Math. Phys. V, 362.
Vergl. Abel'sche Function.

Kräfteparallelogramm.

344. Ueber den Satz vom Parallelogramm der Kräfte. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. V, 435.

Kreis.

345. Ueber die Aufgabe, einen Kreis zu beschreiben, welcher drei gegebene Kreise berührt. Kerz. Grun. Archiv XXXV, 121.

Kreistheilung.

346. *Sur les diviseurs de certaines formes de nombres qui résultent de la théorie de la division du cercle.* *Kummer.* *Journ. Mathém. XXV*, 369.

Krümmungshalbmesser.

347. *Trouver l'équation de la courbe telle, que ses rayons de courbure soient vus d'un point donné sous un angle donné.* *Lecocq* *N. ann. math. XIX*, 285.

Krystallographie.

348. Ueber das Gesetz der rationalen Verhältnisse der Tangenten tautozonaler Krystallkanten. v. Lang. Wien. Akad. Ber. XXXXI, 525.
349. Ueber die directe Construction der schiefachsigen Krystallgestalten aus den Kantenwinkeln. Niemtschik. Wien. Akad. Ber. XXXXI, 535.

L.

Loxodrome.

350. Ueber Loxodromen auf Umdrehungsflächen. Junge. Zeitschr. Math. Phys. V, 296.

M.

Maxima und Minima.

351. Beiträge zur Lehre von Maximum und Minimum. Brenner. Grun. Archiv XXXV, 157.
352. *Solutio problematis geometrici.* Lindman. Grun. Archiv XXXV, 481.
353. *Sur le point d'une tangente à la courbe* $y^m = F(x)$ *qui satisfait à la condition de rendre* $\frac{Y^m}{F(X)}$ *un maximum ou un minimum.* Kessler. *N. ann. math. XIX*, 433.

Vergl. Ellipse 287, Parabel.

Mechanik.

354. Bemerkungen über Lagrange's analytische Mechanik. Bley. Grun. Archiv XXXV, 275.
355. *Mémoire sur la rotation d'un corps solide autour de son centre de gravité.* Lafon. *Compt. rend. LI*, 724.
356. *Mouvement du pendule.* Fink. *N. ann. math. XIX*, 449.
357. Mechanische Aufgabe. Kahl. Zeitschr. Math. Phys. V, 298.
358. *On the pressure of earth on revetment walls.* Sylvester. *Phil. Mag. XX*, 489.
259. *Mémoire sur le spiral réglant des chronomètres et des montres.* Phillips. *Journ. Mathém. XXV*, 313.

Vergl. Aerodynamik, Astronomie, Attraction, Elasticität, Elektrodynamik, Foucault'scher Pendelversuch, Hydrodynamik, Kräfteparallelogramm, Planimetrie 373, Wärmetheorie.

Methode der kleinsten Quadrate.

360. Ueber Interpolation nach der Methode der kleinsten Quadrate. Borchardt. Crelle LVIII, 270.

N.

Näherungswerth.

361. *On Poncelet's approximate linear valuation of surd forms.* Sylvester. *Phil. Mag. XX*, 203, 307, 525.
362. *On approximation to the integrals of irrational functions by means of rational substitutions.* Merrifield. *Phil. Mag. XX*, 446.

O.

Oberflächen.

363. Ueber Prof. A. Müller's Discussionsmethode der algebraischen Flächen höherer Ordnungen. Petzval. Wien. Akad. Ber. XXXXI, 735.
364. Untersuchungen über einige Arten von Flächen. Boeklen. Grun. Archiv XXXV, 93.

Vergl. Attraction 259, Hydrodynamik 331, 332, 333, Loxodrome, Wellenfläche.

Oberflächen zweiter Ordnung.

365. *Sur les lignes de courbure des surfaces du second ordre* Aoust. *Compt. rend. LI*, 640.
366. *Propriétés des tetraèdres conjugués dans les surfaces du second degré.* Painvin. *N. ann. math. XIX*, 290.
367. Ueber die geodätischen Linien auf dem Ellipsoid. Boeklen. Grun. Archiv XXXV, 101.
368. *Etant donnés deux ellipsoides* A *et* B, *trouver le lieu des sommets des trièdres dont les faces sont tangentes à* A *et parallèles à trois plans diamétraux conjugués de* B. Lemoine. *N. ann. math. XIX*, 349.
369. *Résumé d'une théorie des coniques sphèriques homofocales et des surfaces du second ordre homofocales.* Chasles. *Journ. Mathém. XXV*, 425. [Vergl. No. 167 und No 194.]

Vergl. Parabaloid.

P.

Parabel.

370. Ueber die grössten Polygone, die sich über eine gegebene Gerade einer Parabel einschreiben lassen. S. Spitzer. Zeitschr. Math. Phys. V, 363.

Paraboloid.

371. Ueber homofocale Paraboloide. Boeklen. Grun. Archiv XXXV, 81.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 243.

Planimetrie.

372. Verwandlung eines Dreiecks in ein gleichseitiges Dreieck von gleichem Flächeninhalt durch Rechnung. Nagel. Grun. Archiv XXXV, 118. [Vergl. No. 184.]
373. *Théorème sur le triangle circonscrit à un cercle. Harcourt. N. ann. math. XIX,* 437. — *Lebesgue. ibid.* 438.
374. *Sur deux polygones circonscriptibles à des cercles. Siacchi et Poitrasson. N. ann. math. XIX,* 420.
375. *Théorèmes sur les cercles qui touchent les cotés d'un triangle. Nagel. N. ann. math. XIX,* 354. — *Housel. ibid.* 438.

Polare.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 244, 245, Determinanten in geometrischer Anwendung 277.

Potential.

376. Das Potential eines homogenen rechtwinkligen Parallelepipedums. Röthig. Crelle LVIII, 249.

Produktenfolge.

377. *Théorème d'inégalité sur un produit continu. Schlömilch. N. ann. math. XIX,* 280. — *Prouhet. ibid.* 281.

Progression.

378. Bedeutung und Gültigkeit der allgemeinen Formeln für *t* und *s* der arithmetischen und der geometrischen Progression für den Fall, dass das *n* dieser Formeln eine gebrochene Zahl ist. Helmes. Grun. Archiv XXXV, 138.
379. *Note sur la différence de deux puissances consecutives. Tronsens. N. ann. math. XIX,* 310.

Q.

Quadratische Formen.

380. Die trinären Zahlformen und Zahlwerthe. Simerka. Wien. Akad. Ber. XXXVIII, 390.
381. *Sur le nombre des classes différentes de formes quadratiques à déterminants négatifs. Kronecker. Journ. Mathém. XXV,* 289. [Vergl. Bd. V, No. 434.]
382. *Sur la forme* $x^2 + y^2 + 2(z^2 + t^2)$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV,* 269.
383. *Sur la forme* $x^2 + y^2 + 4(z^2 + t^2)$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV,* 305.

R.

Rechenmaschine.

384. *Arithmographe polychrome. Dubois. Compt. rend. LI,* 293.

Refraction.

385. Ueber atmosphärische Strahlenbrechung. Kummer. Berl. Akad. Ber. 1860, 405.

Reihen.

386. Einige allgemeine Sätze zur Theorie der Reihen. Winckler. Wien Akad. Ber. XXXXI, 675.
387. Ueber die Differentiation unendlicher Potenzreihen. Schlömilch. Zeitschr. Math. Phys. V, 292.
388. *Somme de la série* $\Sigma \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2.3\ldots n} \cdot \frac{1}{2^n(2n+1)}$ *Besge. Journ. Mathém. XXV,* 367.
389. Summirung der unendlichen Reihe $S_x = \sum_{p=1}^{p=\infty} \frac{x^p}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_n}$. am Ende. Grun. Archiv XXXV, 220.
390. *Egalités entre des sommes qui dépendent de la fonction numérique* E(x). *Liouville. Journ. Mathém. XXV,* 287, 455.

Vergl. Combinatorik, Progression, Taylor's Reihe, Zahlentheorie 400.

S.

Sphärik.

391. Einiges über sphärische Curven. Bacaloglo. Grun. Archiv XXXV, 57.
392. *Sur les coniques sphériques. Cremona. N. ann. math. XIX,* 260. [Vergl. No. 194.]
393. *Sur l'hyperbole sphérique. Dupain. N. ann. math. XIX,* 315.
394. Ueber die Fläche des sphärischen Vierecks. Strehlke. Grun. Archiv XXXV, 104, 447. [Vergl. No. 193.]
395. *Sur les polygones réguliers sphériques. Faure. N. ann. math. XIX,* 421.

Stereometrie.

396. *Sur la classification des polyèdres. Ph. Breton. Compt. rend. LI,* 722.

T.

Tabellen.

397. Tafeln der aus 17ten, 19ten, 23sten und 29sten Einheitswurzeln gebildeten complexen Primfactoren aller Primzahlen im ersten Tausend. Reuschle. Berl. Akad. Ber. 1860, 714. — Kummer. ibid. 734.
398. Fehler in Schrön's siebenstelligen Logarithmentafeln, Ausgabe 1860. Grun. Archiv XXXV, 120.
Vergl. Geschichte der Mathematik 313.

Taylor'sche Reihe.

399. *Identité de deux expressions du reste de la série de Taylor. Jurgensen. N. ann. math. XIX,* 308. — *Roche. ibid.* 311.

Trigonometrie.

400. *Recueil de formules relatives aux fonctions circulaires et logarithmiques. N. ann. math. XIX,* 401.
401. *Formule pour l'aire d'un triangle. Wiart. N. ann. math. XIX,* 283.
402. *Transformation trigonométrique. Forestier. N. ann. math. XIX,* 418.
Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 240.

V.

Variationsrechnung.

403. Ueber die Methode, die grössten und kleinsten Werthe unbestimmter Integralformeln zu finden. Löffler. Wien. Akad. Ber. XXXIV, 227.
404. Beitrag zum Probleme der Brachystochrone. Löffler. Wien. Akad. Ber. XXXXI, 53.
Vergl. Näherungswerth 361.

W.

Wärmetheorie.

405. *On the relation between the radiating and absorbing powers of different bodies for light and heat. Kirchhoff. Phil. Mag. XX,* 1.

Wahrscheinlichkeitsrechnung.

406. *Note sur le problème de l'aiguille et le jeu du joint couvert. E. Barbier. Journ. Mathém. XXV,* 273.

Wellenfläche.

407. Ueber eine optische Eigenschaft von unendlich dünnen gradlinigen Strahlenbündeln. Kummer. Berl. Akad. Ber. 1860, 469. [Vergl. Bd. V, No. 260.]

Wendelinie.

Vergl. Analytische Geometrie des Raumes 247.

Z.

Zahlenrechnen.

408. Directe wissenschaftliche Begründung des üblichen Verfahrens bei der Division und Wurzelausziehung in dekadischen Zahlen. Niegemann. Grun. Archiv XXXV, 201.

Zahlentheorie.

409. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze. Scheibner. Zeitschr. Math. Phys. V, 233. [Vergl. Bd. V, No. 481.]
410. *Note sur les congruences.* Le Besgue. *Compt. rend. LI*, 9.
411. *Note au sujet d'une théorème de M. Kronecker.* Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 267. [Vergl. No. 215.]
412. Einfache Methode, die Reste der Zahl 9^{9^9} bei der Division durch die Primzahlen zu finden. Niegemann. Grun. Archiv XXXV, 119.
413. *Sur la décomposition de* $4z^2$ *en différence de deux carrés entiers.* Kessler. *N. ann. math. XIX*, 434.
414. *Sur le produit de deux nombres premiers l'un de la forme* $8k+3$ *et l'autre de la forme* $8h+5$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 303.
415. *Théorème concernant le triple d'un nombre premier de la forme* $8\mu+3$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 475.
416. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $8\mu+5$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 300.
417. *Sur les nombres premiers de la forme* $16k+7$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 301.
418. *Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+11$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 309.
419. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+19$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 311.
420. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+7$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 389.
421. *Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes* $40\mu+11$, $40\mu+19$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 387.
422. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+23$. Liouville. *Journ. Mathém. XXV*, 391.

Vergl. Cubische Formen, Quadratische Formen, Reihen 390.

Zinsrechnung.

423. Ueber Verlegung der Zahlungstermine. Oettinger. Zeitschr. Math. Phys. V, 433. [Vergl. No. 230.]
424. *Annuités.* Cuenoud. *N. ann. math. XIX*, 336.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Taf. I.

Fig. 1.

Fig. 4

Fig. 6.

Zahlentheorie.

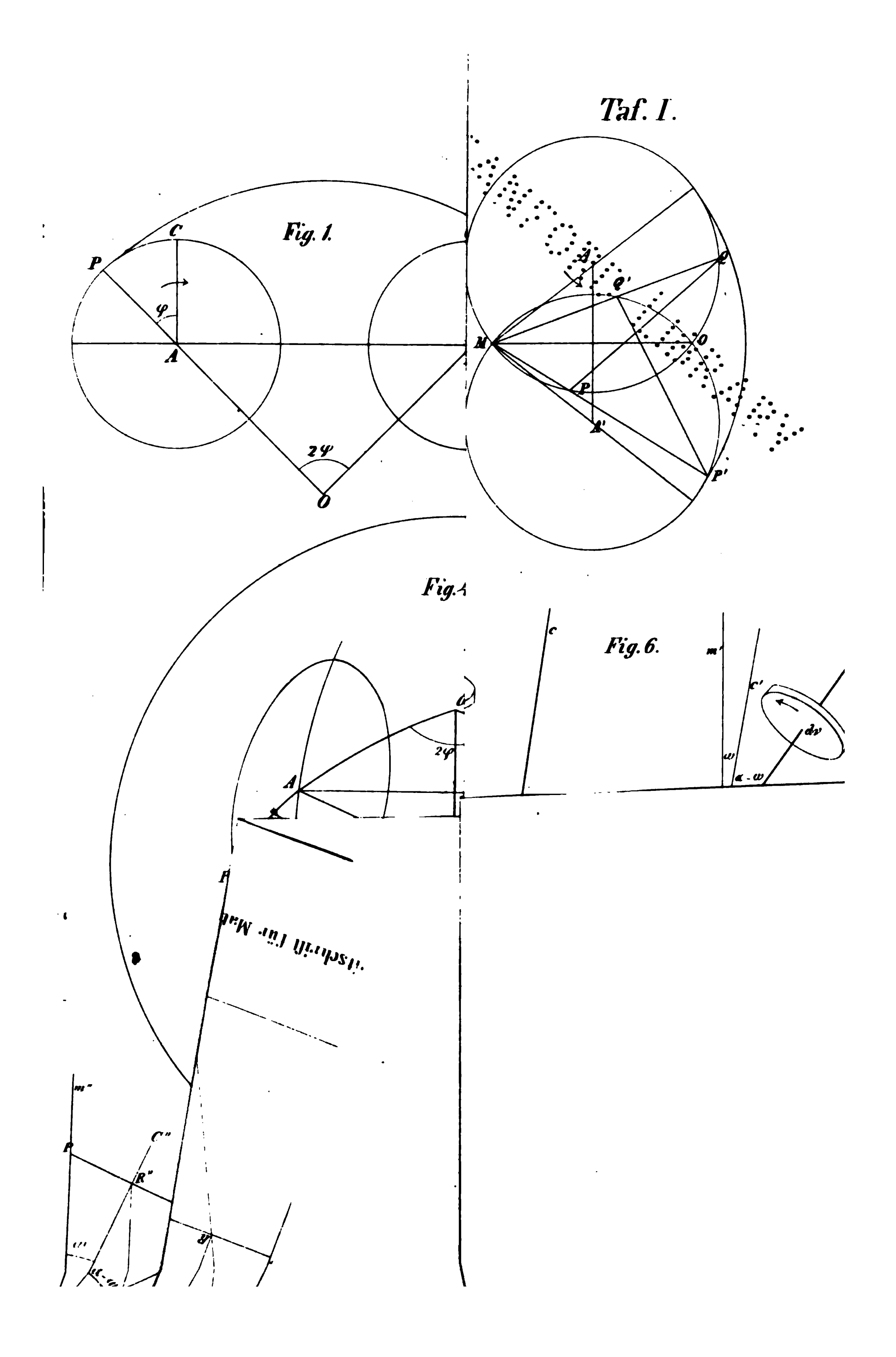
409. Ueber die Anzahl der Primzahlen unter einer beliebigen Grenze. **Scheibner.** Zeitschr. Math. Phys. V, 233. [Vergl. Bd. V, No. 481.]
410. *Note sur les congruences. Le Besgue. Compt. rend. LI*, 9.
411. *Note au sujet d'une théorème de M. Kronecker. Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 267. [Vergl. No. 215.]
412. Einfache Methode, die Reste der Zahl 9^{9^9} bei der Division durch die Primzahlen zu finden. **Niegemann.** Grun. Archiv XXXV, 119.
413. *Sur la décomposition de* $4x^2$ *en différence de deux carrés entiers. Kessler. N. ann. math. XIX*, 434.
414. *Sur le produit de deux nombres premiers l'un de la forme* $8k+3$ *et l'autre de la forme* $8h+5$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 303.
415. *Théorème concernant le triple d'un nombre premier de la forme* $8\mu+3$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 475.
416. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $8\mu+5$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 300.
417. *Sur les nombres premiers de la forme* $16k+7$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 301.
418. *Nouveau théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+11$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 309.
419. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $24k+19$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 311.
420. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+7$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 389.
421. *Théorème concernant les nombres premiers de l'une ou de l'autre des deux formes* $40\mu+11$, $40\mu+19$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 387.
422. *Théorème concernant les nombres premiers de la forme* $40\mu+23$. *Liouville. Journ. Mathém. XXV*, 391.

Vergl. Cubische Formen, Quadratische Formen, Reihen 300.

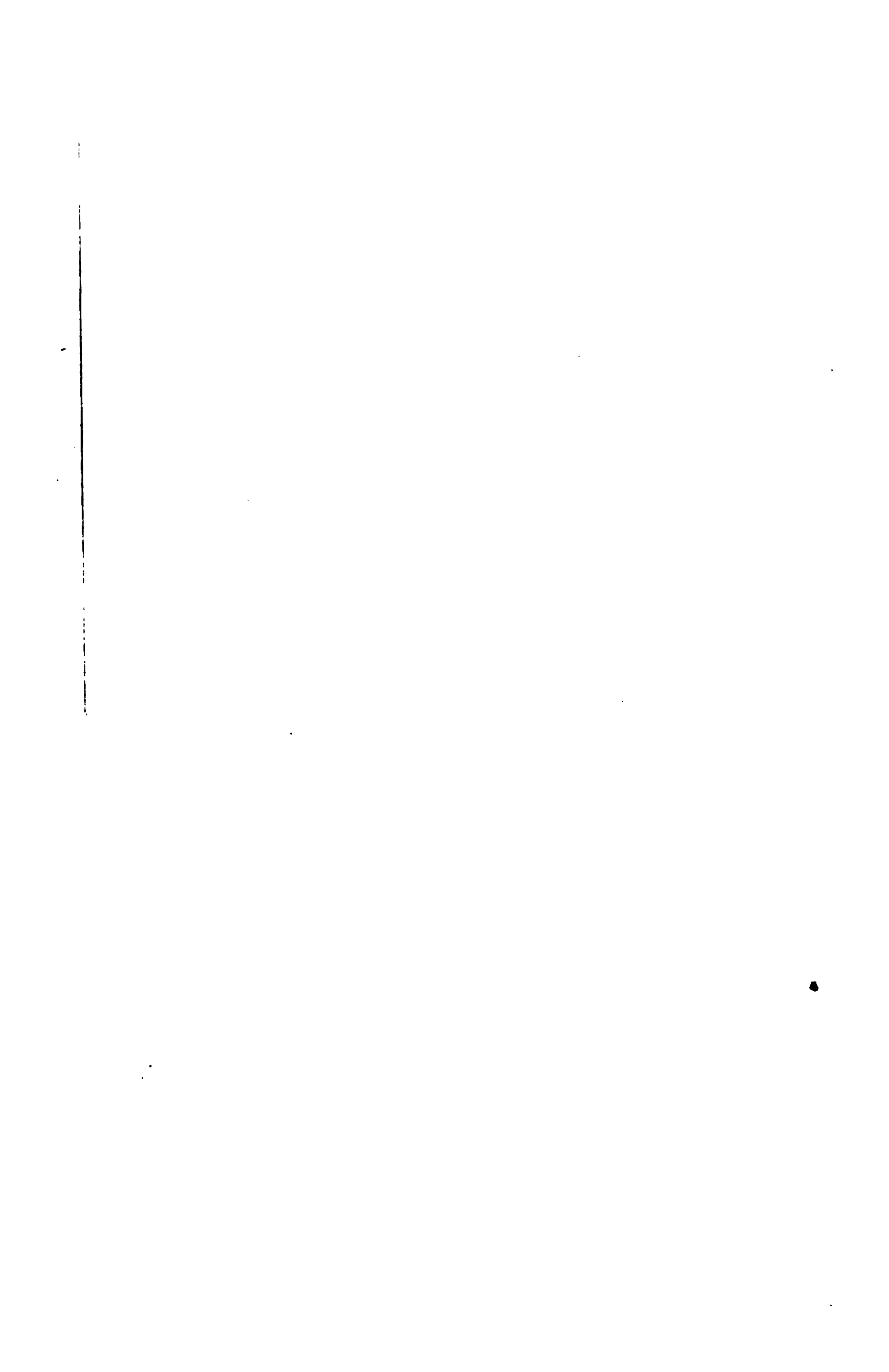
Zinsrechnung.

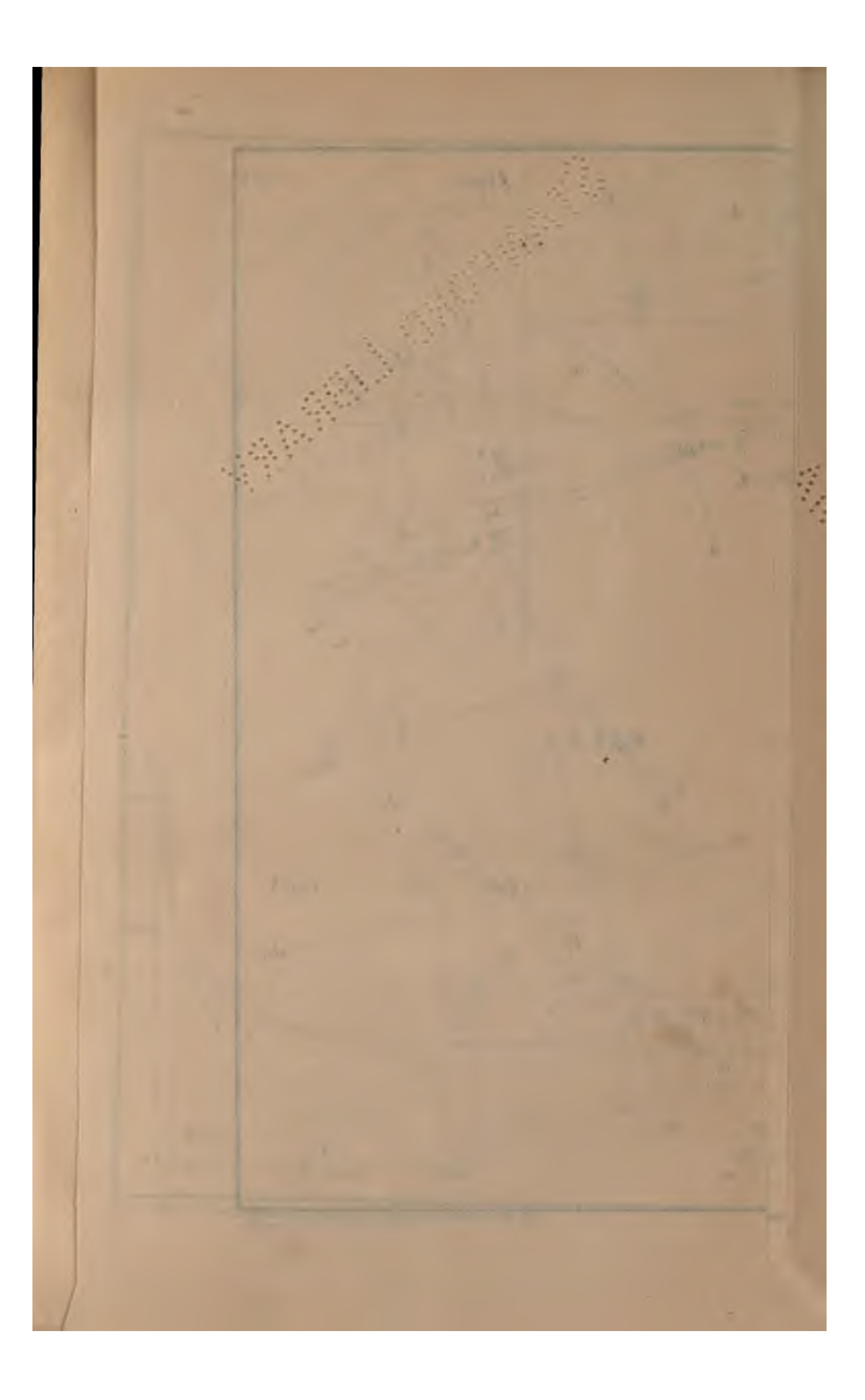
423. Ueber Verlegung der Zahlungstermine. **Oettinger.** Zeitschr. Math. Phys. V, 433. [Vergl. No. 230.]
424. *Annuités. Cuenoud. N. ann. math. XIX*, 336.

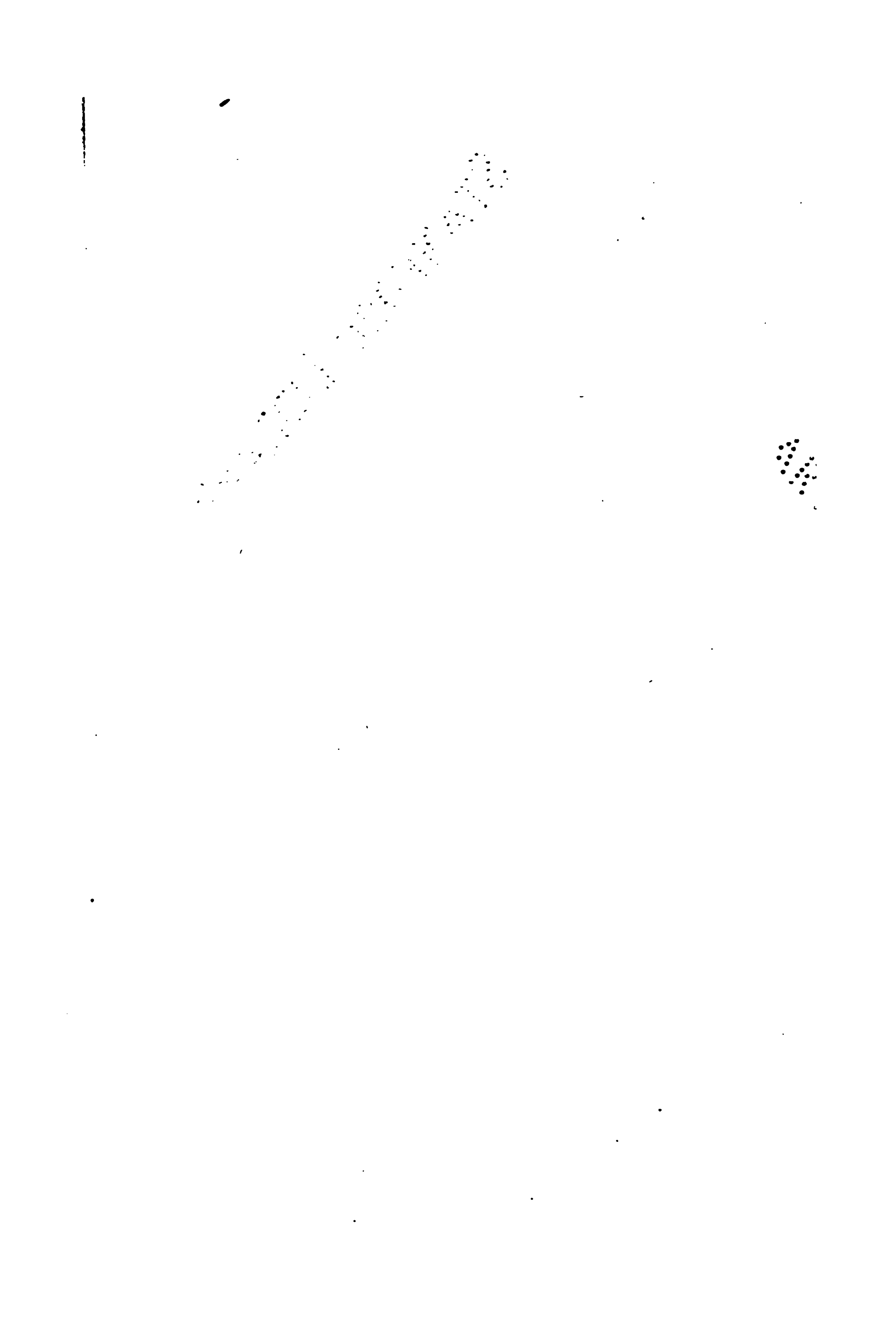
Druck von B. G. Teubner in Dresden.

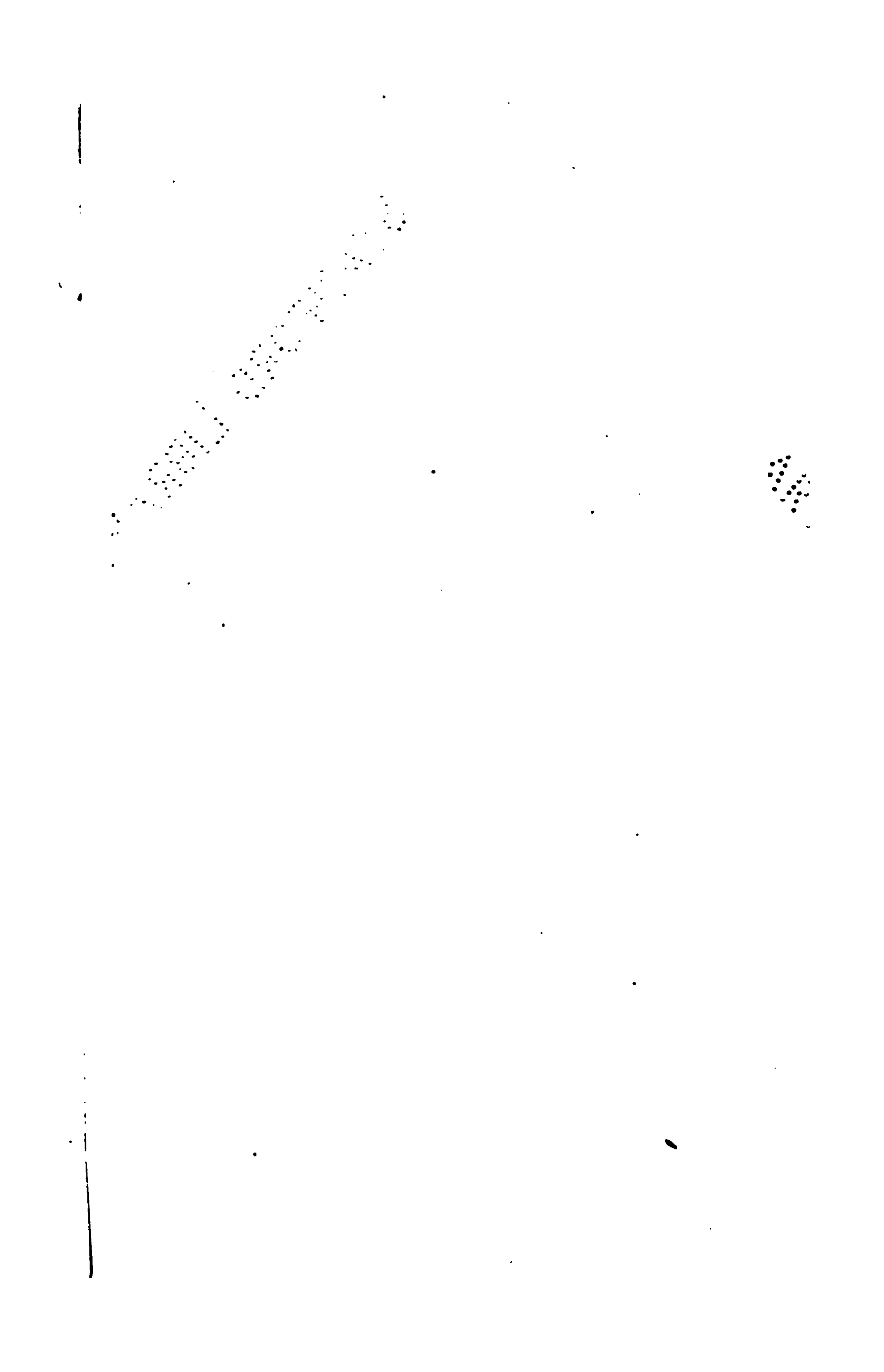


Taf. I.
Fig. 1.
C
P
φ
A
2ψ
O
M
Q
Q'
P
A'
P'
Fig. 6.
c
m'
c'
w
α - w
dv
A
2φ
m"
C"
R"
R

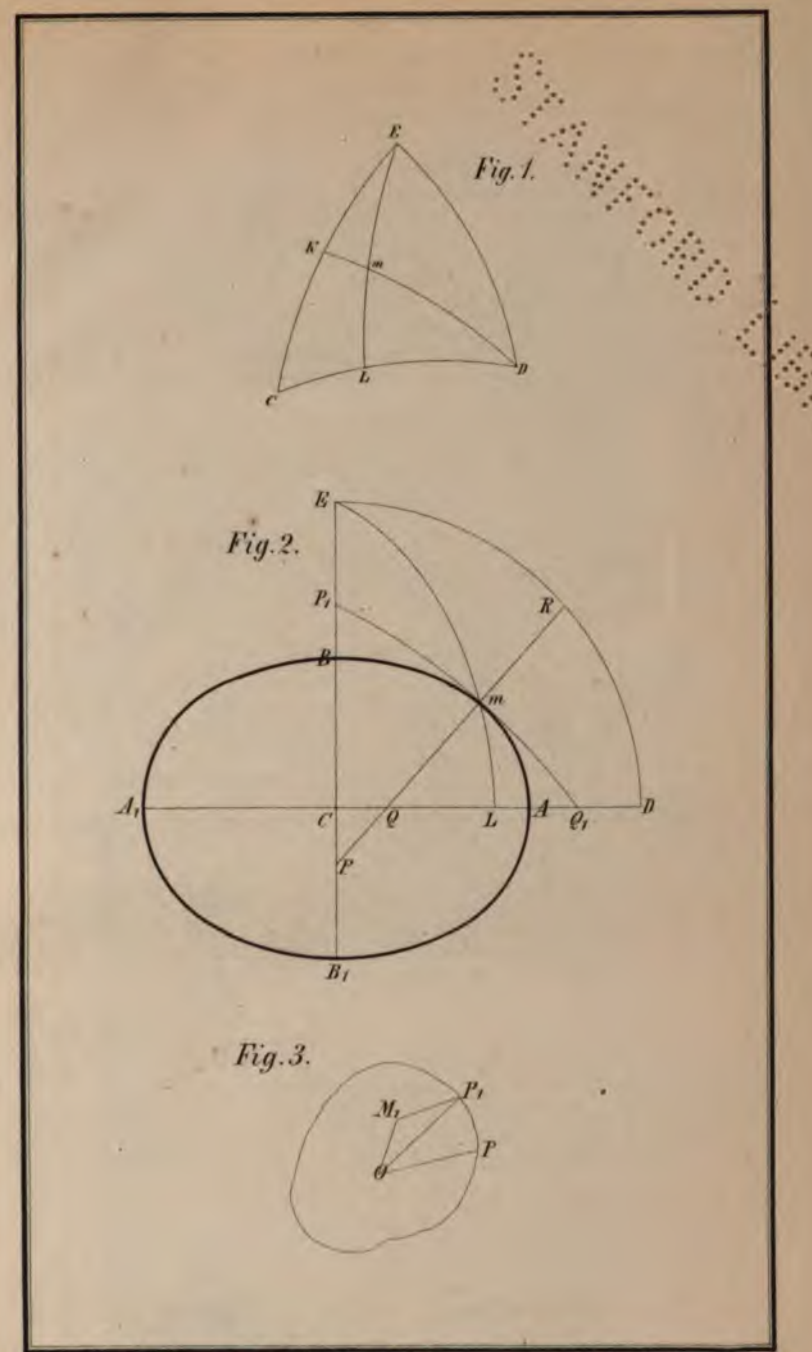






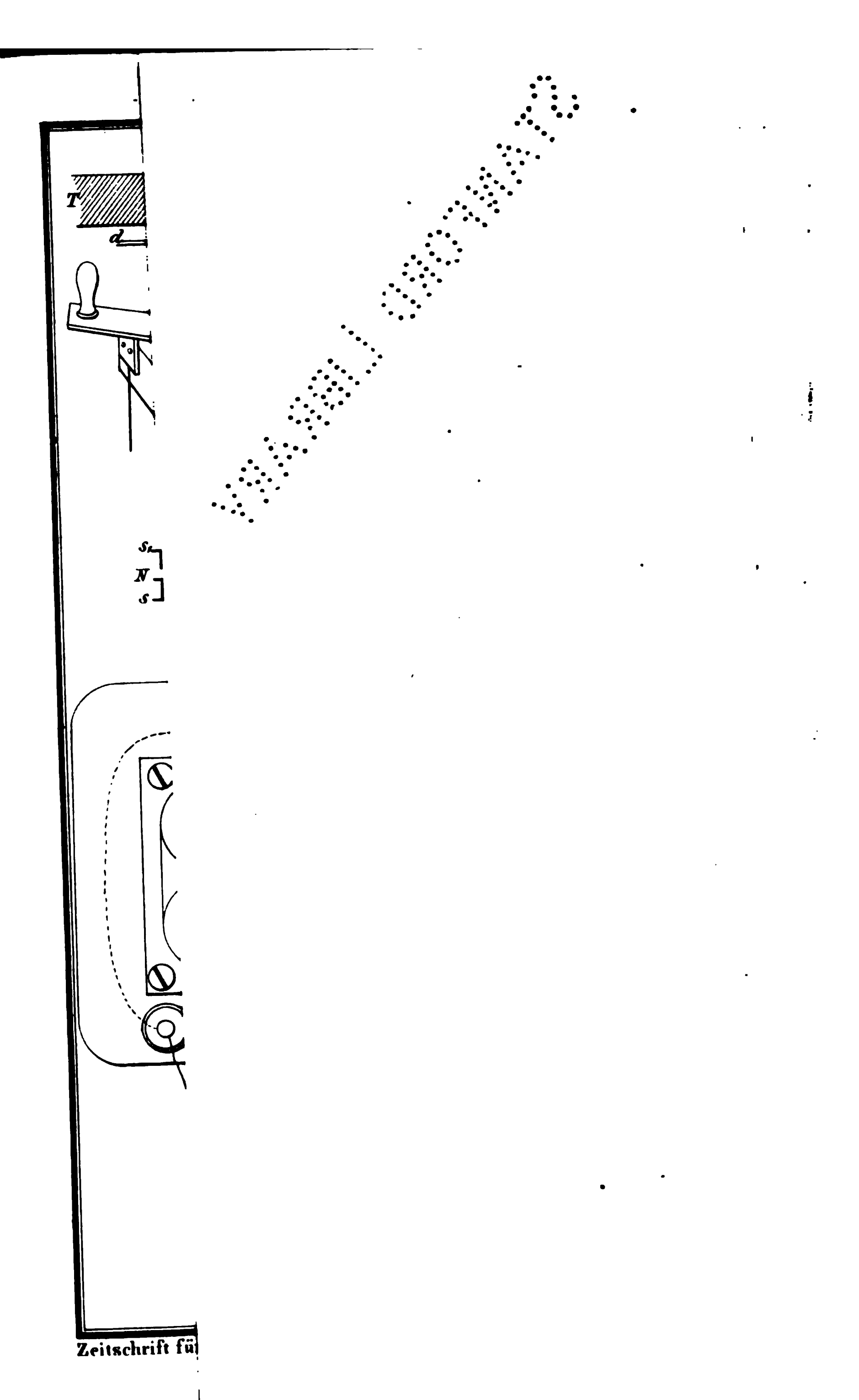






Lith. Anst. v. M. Singer, Lpzg.




T
d
S
N
s
Zeitschrift fü



